1 Vectors

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$
$$\implies \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1,$$
$$|v| \geq 0,$$
$$a\vec{v} = (av_x, av_y, av_z),$$
$$|v| = 0 \implies \vec{v} = 0.$$
$$\cos(\alpha) = \frac{v_x}{|\vec{v}|},\ \cos(\beta) = \frac{v_y}{|\vec{v}|},\ \cos(\gamma) = \frac{v_z}{|\vec{v}|},$$
$$|v| = 1 \implies \hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}(v_x, v_y, v_z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

També suma, producte escalar, desigualtat triangular, etcètera:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z) = \vec{v} + \vec{u},$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k})(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z,$$
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|},$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \implies \vec{u}\perp\vec{v}, |\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|.$$

Per si a cas, producte vectorial:

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\theta)$$
$$\vec{u}\times\vec{v} = (u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}) \times (v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})$$

2 Cinemàtica i dinàmica

Cinemàtica galileana

Velocitat mitjana: $\vec{v}_M = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Velocitat instantània: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$.

Acceleració mitjana: $\vec{a}_M = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Acceleració instantània: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$.

L'acceleració té dues components intrínseques, la normal ($|\vec{a}_n| = |\vec{a}|\sin(\theta) = \frac{v^2}{R}\hat{n}$), i la tangencial ($|\vec{a}_t| = |\vec{a}|\cos(\theta) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\hat{v}$).

Moviments bàsics

MRU: $x = x_0 + vt$.

MRUA: $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$.

Tir parabòlic: en l'eix horitzontal, MRU ($x = v_x^0 t$) i en el vertical, un MRUA amb g ($y = y_0 + v_y^0 t + \frac{1}{2}gt^2$). $x_{max} = v_x^0 t$ i $y_{max} = v_y^0 t + \frac{1}{2}gt^2$. L'acceleració no és sol tangencial en cap punt.

MCU: $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}$, $T = \frac{2\pi R}{v}$, $\omega = \frac{v}{R}$.

MHS: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $f = \frac{1}{T}$, $v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$, $a(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi)$.

Lleis de Newton

1. Tot cos persevera en el seu estat de repòs o moviment a menys que una força externa obligui a canviar el seu estat (principi d'inèrcia).
2. El canvi de moviment és proporcional a la força i té lloc en la direcció en què aquesta s'imprimeix: $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{p} = m\vec{v}$.
3. Amb tota acció sempre té lloc una reacció igual i en sentit contrari (acció-reacció). Aquestes forces oposades no s'apliquen al mateix punt.

Gravitació

$$\vec{F} = G\frac{m_1m_2}{|\vec{r}_{1\to 2}|^2}$$

Fregament

Si està en moviment:

$$F_f = \mu_e N,$$
$$N = mg\cos(\theta),$$
$$\mu_e = \tan(\theta),$$
$$v = \sqrt{2d\left(\frac{F}{m} - \mu_c g\right)}.$$

Si està parat, $F_f \neq \mu_e mg\cos(\theta)$.

Problema trineu

$$F = \frac{mg(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha))}{\cos(\beta) + \mu\sin(\alpha)}.$$

Encastaments

Considerem $\mu = 0$.

$$F = (m_1 + m_2)a,$$
$$F - F_{21} = m_1 a,$$
$$F_{12} = m_2 a,$$

Ara $\mu \neq 0$ i $\mu_1 = \mu_2$.

$$F - \mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a',$$
$$F - \mu m_1 g - F_{21} = m_1 a'$$
$$F_{12} - \mu m_2 g = m_2 a'.$$

Politges

$$T_1 - T_2 = m_c a,\ T_1 \sim T_2 \equiv T;$$
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g$$

Rampes

Considerant que es mou cap a l'esquerra:

$$m_1 g\sin(\alpha) - \mu_e m_1 g\cos(\alpha) - T = m_1 a$$
$$T - m_2 g\sin(\beta) - \mu_e m_2 g\cos(\beta) = m_2 a$$
$$a = \frac{m_1\sin(\alpha) - \mu_e(m_1\cos(\alpha) + m_2\cos(\beta))}{m_1 + m_2}g$$

Si ens dona inferior a zero, provem cap a l'altre costat. Si també dona zero, significa que el sistema no es mou.

Llei de Hooke

$$F = -Kx,$$
$$K = m\omega^2,$$
$$-Ky_0 + mg = 0 \iff y_0 = \frac{mg}{K},$$
$$F_{tot} = -Ky + mg.$$

Moviment circular

Ens imaginem un cercle, amb T_1 a la part superior, T_2 al costat dret i T_3 a la inferior, i T_4 d'un angle variable.

$$T_1 + mg = m\frac{v_1^2}{R},$$
$$T_2 = m\frac{v_2^2}{R},$$
$$T_3 - mg = m\frac{v_3^2}{R},$$
$$T_4 - mg\cos(\omega) = m\frac{v_4^2}{R}.$$

Hem de posar una força $mg\sin(\omega) = ma_t$, ja que si no, no seria un moviment circular uniforme.

Pèndol cònic

$$T\sin(\alpha) = mg,$$
$$T\cos(\alpha) = m\frac{v^2}{R},$$
$$\implies \omega^2 = \frac{g}{\sqrt{l^2 - R^2}}.$$

3 Energia

Principi de conservació de l'energia: l'energia sempre es conserva. No es crea ni es destrueix, es transforma.

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \iff W = \int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Potència: $P = \frac{dW}{dt}$, en Watts (W). Si F i direcció constants: $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$. Treball mecànic: $dW = \vec{F}d\vec{r} = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos(\theta)$.

$$W_{tot} = \Delta E_C,$$
$$W_{FC} = -\Delta E_P,$$
$$W_{FNC} = \Delta E_M.$$

$$E_P(t) = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{A^2}{2}K\sin^2(\omega t + \varphi),$$
$$E_C(t) = \frac{A^2}{2}m\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi),$$
$$E_M(t) = \frac{A^2}{2}m\omega^2.$$

4 Electrostàtica

Camp elèctric i potencial

Llei de conservació de la càrrega: en un sistema aïllat, la càrrega es conserva. $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, $\vec{F} = K\frac{Qq}{r^2}\hat{r}$, $\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\hat{r}$, $V = K\frac{Q}{r}$, $E_P = K\frac{Qq}{r}$. La força elèctrica és conservativa.

Principi de superposició:

$$V_{tot} = \sum_i V_i,$$
$$\vec{E}_{tot} = \sum_i \vec{E}_i.$$

Maxwell

Flux elèctric (Φ_E) en la llei de Gauss:

$$\Phi_E = \oint\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_r\epsilon_0}.$$

Frase important: "a l'interior d'un conductor en equilibri electrostàtic el camp elèctric és nul i el potencial és constant". $\oint dS = A_T$.

Direcció radial

$$E = \frac{2k\lambda}{r},\ \lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Placa il·limitada

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2ES = 4\pi K\sigma S,$$
$$E = \frac{4\pi K\sigma S}{2S} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

El camp no depèn de la distància a la placa perquè el flux no varia amb h.

Condensador planoparal·lel

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\sigma d}\epsilon_0 = \frac{A}{d}\epsilon_0,$$
$$E_{int} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$
$$dV = -Edx,\ V = Ed.$$

Combinació de condensadors: en paral·lel, $V_1 = V_2$ i $Q_T = Q_1 + Q_2$: $C_T = \sum_i C_i$. En canvi, en sèrie: $\frac{1}{C_T} = \sum_i \frac{1}{C_i}$.

Esfera

Exterior ($r > R$): $\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\hat{r}$ i $V = K\frac{Q}{r}$.

Interior ($r < R$): $\vec{E} = 0$ i $V = K\frac{Q}{r}$.

Si connectem dues esferes, $V_1' = V_2'$ i $Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2$.

$$V_i' = K\frac{Q_i'}{R_i} = V,$$
$$E_i' = K\frac{Q_i'}{R_i^2} = K\frac{4\pi R_i^2\sigma_i'}{R_i^2} = 4\pi K\sigma_i',$$
$$\sigma_i' = \frac{Q_i'}{4\pi R_i^2} = \frac{VR_i}{4\pi R_i^2 K} \propto \frac{1}{R_i}.$$

5 Corrent elèctric

Llei d'Ohm: $\Delta V = RI$. Hipòtesi òhmica: $\vec{v}_d \equiv \mu\vec{E}$. $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_dA$. σ, μ, ρ indiquen conductivitat, mobilitat i resisitivitat. A és àrea i L longitud.

$$\vec{J} = \frac{\vec{I}}{A} = nq\vec{v}_d = nq\mu\vec{E} = \sigma\vec{E},$$
$$\rho = \frac{1}{\sigma},$$
$$V_a - V_b = \Delta V = EL,$$
$$R = \rho\frac{L}{A} = \frac{\Delta V}{E\sigma A} = \frac{\Delta V}{I}.$$

Combinació de resistències

En sèrie, $I = I_1 = I_2$ i $V = V_1 + V_2$: $R_{eq} = \sum_i R_i$.

En paral·lel, $V = V_1 = V_2$ i $I = I_1 + I_2$: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$.

Bateries

- r resistència interna,
- ΔV tensió real efectiva,
- ϵ tensió ideal,

$$\epsilon = (R + r)I,$$
$$\Delta V = \epsilon - rI.$$

Lleis de Kirchhoff

En un node: $\sum_i I_i = 0$ (conservació de la càrrega).

En una malla: $\sum_i V_i = 0$ (conservació de l'energia).

Aparells de mesura

Amperímetres: $I = \frac{V}{R_A + R}$, on volem que $R \to 0$.

Voltímetres: $V = \frac{R_V R}{R_V + R}I$, interessa que $R_V \gg R$.

Sense voltímetre, $\epsilon = (R + R')I_S, V_{AB} = RI_S = 5V$; *amb voltímetre,* $R_{RV} = \frac{R_V R}{R_V + R}, \epsilon = (R_{RV} + R')I_a$

Energia i potència en circuits

$$\text{En una resistència: } P = IV = I^2R,$$
$$\text{En una bateria: } P = I(\epsilon - rI)$$

ϵI és la potència subministrada i rI^2 és la potència dissipada.

Efecte Joule: energia elèctrica convertida en calor.

6 Magnetisme

B: $\odot$, cap a fora; $\otimes$, cap a dins.

$$\vec{F} = q\vec{v}\vec{B} \iff |\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin(\theta),$$
$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}.$$

Si $\vec{B}\perp\vec{v}$, MCU:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}, R = \frac{mv}{qB}.$$

- La força magnètica no fa treball i no compleix 3aLNewton,
- si una càrrega es mou paral·lelament al camp, $F_M = 0N$.
- si una càrrega està quieta no sent cap força magnètica,
- la direcció de F_M es determina amb la regla de la mà dreta.

Força sobre elements del corrent

l és la longitud del cable, A és l'àrea. $v_d dt = dl$.

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \implies \vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B},$$
$$B = \frac{\mu_e m g}{I l} \iff \mu_e = \frac{BIl}{mg}.$$

Motors elèctrics (I)

Sobre una espira quadrada apareixeran un parell de forces que tendiran a orientar-la en el sentit del camp. $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}| = IaB$.

Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^2},$$
$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\, Tm/A,$$
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^2} \implies B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d},$$

Frase important: en un cable rectilini, el camp és perpendicular al cable i tangent al perímetre del cercle que travessa.

Llei d'Ampère

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}_C \equiv \mu_0 I_C \implies B 2\pi R = \mu_0 I_C$$

Forces entre corrents

$$\vec{F}_{12} = I_2 l B_1 = \frac{I_2 I_1 l \mu_0}{2\pi d},$$
$$\vec{F}_{21} = I_2 l B_1 = \frac{I_1 I_2 l \mu_0}{2\pi d}.$$

Ampére: intensitat que passa per dos cables que estan en el buit a una distància d'1m i s'exerceixen una força per unitat de longitud de $2\cdot 10^{-7} N/m$.

Llei de Faraday

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

- Tota variació de flux que travessa el circuit hi produeix una FEM induïda,
- només hi ha FEM mentre hi ha variació de flux,
- aquesta FEM crea corrents induïts.

Llei de Lenz

Teorema: la força electromotriu induïda s'oposa a l'efecte que provoca: en aparèixer una intensitat també apareix una força magnètica F sobre el circuit: $F = IlB$.

$$\Phi = \oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = Blx,$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv \implies \epsilon = -Blv.$$

L'energia es conserva:

$$dW_f = F\cdot dx = \frac{B^2 l^2 v}{r}dx \implies P_F = \frac{(Blv)^2}{R},$$
$$P_J = RI^2 = R\left(\frac{Blv}{R}\right)^2 = P_F.$$

Motors elèctrics (II)

$$\Phi = N\vec{B}\cdot\vec{S} = NBS\cos(\omega t),$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = -NBS\omega\sin(\omega t) = \epsilon(t) = \epsilon_m \sin(\omega t).$$

Transformadors

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1} \sim \frac{I_1}{I_2}.$$

Autoinducció

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(NS\mu\frac{N}{l}I\right) = -\mu\frac{N^2}{l}S\frac{dI}{dt}$$
$$\implies L \equiv \mu\frac{N^2}{l}S \implies \epsilon_i = -L\frac{dI}{dt},$$
$$V_L = -L\frac{dI}{dt}.$$

Solenoide

Per a $l > 10R$, camp uniforme. $N, \mu = \mu_r\mu_0$ són número d'espires i permeabilitat. L és el coeficient d'autoinductància, en *Henry*.

$$B = \mu\frac{N}{l}I,$$
$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S},$$
$$L \equiv \mu\frac{N^2}{l}S = \frac{\Phi}{I},$$

Inducció electromagnètica

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_r\epsilon_0},$$
$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S},$$
$$d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S},$$
$$\Phi = \oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = BS\cos(\theta).$$

Circuits RL

$$\epsilon = RI + L\frac{dI}{dt},$$
$$V_L = L\frac{dI}{dt},$$
$$\frac{dI}{dt} = \frac{\epsilon}{L} - \frac{RI}{L},$$
$$i \equiv I - \frac{\epsilon}{R} \implies \frac{di}{dt} = -\frac{Ri}{L}.$$

La intensitat final del corrent: $i = \frac{v}{R}$.
Hem de distingir $I(t)$ en funció de si l'interruptor està connectat ($I_1(t)$) o no ($I_2(t)$):

$$I_1(t) = \frac{\epsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}),$$
$$I_2(t) = \frac{\epsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Energia magnètica en una bobina

$$\epsilon_i = -L\frac{dI}{dt},$$
$$P = \epsilon_i I = -LI\frac{dI}{dt},$$
$$dE_M = -LIdI \implies L\int_0^I dI I = \frac{LI^2}{2}.$$

Inici:

$$I_0 = \frac{\epsilon}{R_1+R_2},$$
$$I(t) = \frac{\epsilon}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}\right),$$
$$E_M = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}\frac{L\epsilon^2}{(R_1+R_2)^2}.$$

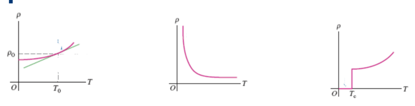
Final:

$$0 = R_2 I' + L\frac{dI'}{dt},$$
$$I'(t) = \frac{\epsilon}{R_1+R_2}e^{-\frac{R_2}{L}t}$$
$$\implies E'_M = \int_0^\infty dt L I'\frac{dI'}{dt} = \cdots = E_M.$$

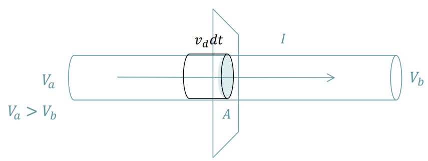
Circuits RLC

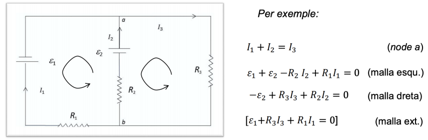
$$V_0\sin(\omega t) = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} =$$
$$R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C}, I(t) = \frac{dQ}{dt}.$$

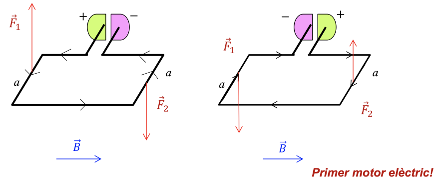
Apunts finals

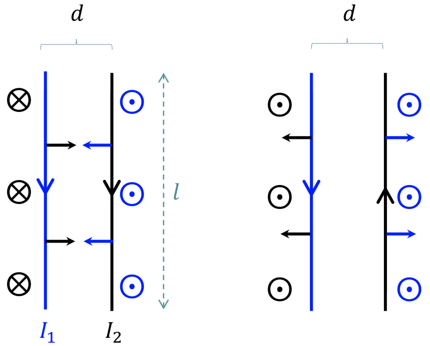


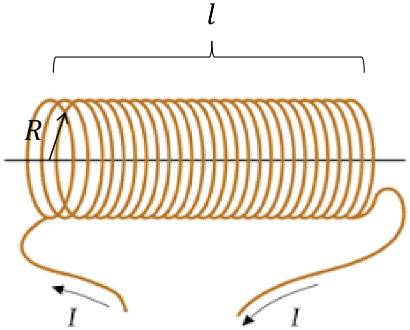
Conductor　Semiconductor　Superconductor

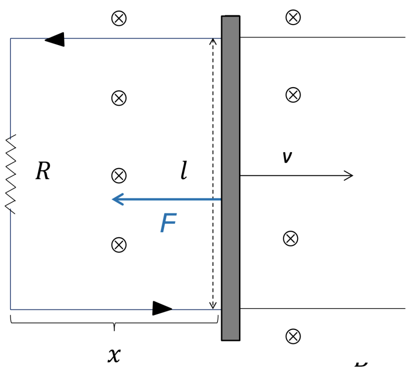


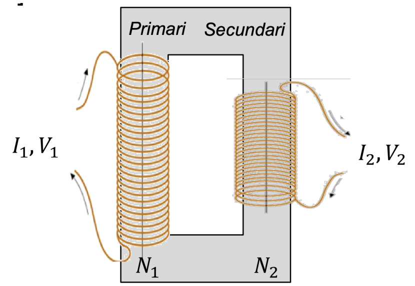


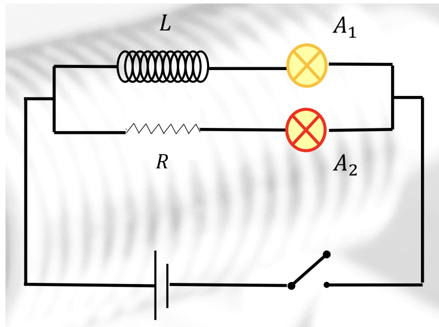


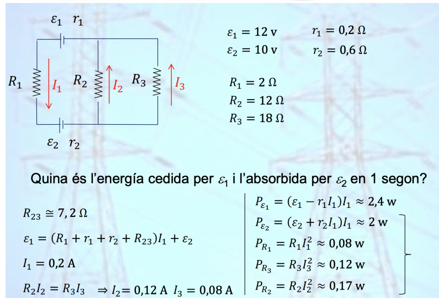


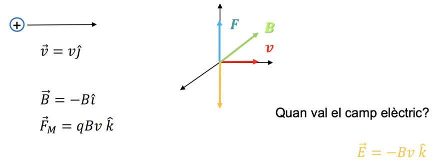












Per obtenir la resistència R analitzarem el circuit quan els interruptors estan oberts i quan estan tancats. En el primer cas:

$$\epsilon = (300 + 100 + 50)I = 450I.$$

Quan estan tancats la resitència R queda en paral·lel amb la de 100 Ω, quedant una resistència equivalent de:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{100} + \frac{1}{R}.$$

Per saber la nova intensitat total del circuit, I', cal combinar aquesta resistència en sèrie amb la de 300 Ω. La de 50 Ω no tindrà cap paper perquè en estar en paral·lel amb una branca sense resistència, i per tant no tindrà corrent. O sigui:

$$\epsilon = (R_{eq} + 300)I'.$$

Finalment, hem de tenir present que la intensitat que mesura l'amperímetre en aquest darrer cas no és I', sinó:

$$I_A = \frac{V_{R_{eq}}}{R},$$

que ha de ser igual a:

$$\frac{\epsilon}{450}$$

$V_{R_{eq}}$ és la caiguda de tensió a la branca de R i la resistència de 100 Ω:

$$V_{R_{eq}} = R_{eq}I.$$

Ajuntant-ho tot per aïllar R obtenim, finalment, $R = 600\ \Omega$.