1 Probabilitat

Teorema 1.1 (Grassmann). $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demostració. Efectivament,

$$\begin{aligned} P(A \cup (B \cap A^C)) &= P(A) + P(B \cap A^C) = P(A) + P(B \cap A^C) + P(B \cap A) - P(B \cap A) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned} \tag{1.1}$$

■

Teorema 1.2 (Teorema de les probabilitats totals). *Considerem una partició $B_1, \dots, B_n$, on cada element de la partició té probabilitat estrictament positiva. Per a un esdeveniment qualsevol A tenim que*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i). \tag{1.2}$$

Demostració. Com que

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i), \tag{1.3}$$

la propietat d'additivitat de les probabilitats i la definició de probabilitat condicionada impliquen

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i). \tag{1.4}$$

■

Teorema 1.3 (Teorema de probabilitats compostes). *Considerem n esdeveniments $A_1, \dots, A_n$ tals que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Aleshores:*

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}). \tag{1.5}$$

Demostració. Es demostra per inducció. El cas $n = 2$ surt de la mateixa definició de probabilitat condicionada perquè $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$. Suposem ara que és cert per a $n-1$ i comprovem que es compleix per a n. La prova es fa utilitzant la definició de probabilitat condicionada i la hipòtesi d'inducció:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \\ &\cdots P(A_{n-1}|A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

■

Teorema 1.4 (Fórmula de Bayes). *Sigui $A_1, \dots, A_n$ una partició de Ω i B un esdeveniment, on tant la partició com B tenen probabilitat estrictament positiva. Aleshores, per a qualsevol $i = 1 \div n$,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}. \tag{1.7}$$

Demostració. Surt directament d'utilitzar la definició de probabilitat condicionada i les probabilitats totals respecte a $A_1, \dots, A_n$. En efecte:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}. \tag{1.8}$$

■

2 Variables aleatòries

Definició 2.1 (Variable aleatòria). *Una variable aleatòria és una aplicació que transforma elements de l'espai mostral en elements d'un subconjunt dels naturals o dels reals, és a dir:*

$$X : \Omega \longrightarrow I, \quad I \subset \mathbb{N},\ I \subset \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Definició 2.2 (Esperança). *Sigui X una variable discreta que pren valors $x_1, \ldots, x_k$ amb probabilitats $p_1, \ldots, p_k$. El valor esperat de X és la suma ponderada dels valors de la variable per les seves probabilitats:*

$$E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x). \tag{2.2}$$

2.1 Distribució binomial ($\mathbb{N}$)

Definició 2.3 (Distribució binomial). *Una distribució binomial compta quantes vegades ha succeït un esdeveniment en repetir n vegades una certa experiència aleatòria de manera independent.*

Definició 2.4. *Donada una experiència aleatòria, repetida n vegades, i sigui A un esdeveniment amb $k \leq n$. Es dona:*

$$\begin{gathered}\{l\text{'esdeveniment } A \text{ ha tingut lloc } k \text{ vegades}\} = \{X = k\} \\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0 \div n.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Observació 2.5.

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1. \tag{2.4}$$

2.2 Distribució normal ($\mathbb{R}$)

Definició 2.6 (Distribució normal). *Una variable X segueix una distribució normal si pot prendre qualsevol real i i la probabilitat que té de prendre un valor qualsevol entre dos valors reals a i b, $a < b$ és:*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2\pi\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \tag{2.5}$$

on $f(x)$ és la densitat de la distribució normal, μ és la mitjana (el punt central de la distribució), σ és la desviació i σ^2 és la variància (com de dispersa és la funció al voltant de μ).

graa La distribució normal té una sèrie de propietats força importants:

Propietat 2.7.

1. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, *té sempre un màxim en* $(\mu, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})$ *i té dos punts d'inflexió en* $x_1 = \mu - \sigma$ *i* $x_2 = \mu + \sigma$.
2. $P(-\infty \leq X \leq +\infty) = 1$.
3. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$.
4. $\forall a \in \mathbb{R}$, *tenim que* $P(x = a) = 0$, $P(a \leq X) = P(a < X)$ *i* $P(x \geq b) = P(x > b)$.

Definició 2.8 (Distribució normal estàndard). *És la distribució normal tal que $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, és a dir, $N(0,1)$. En aquest cas,*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \tag{2.6}$$

Proposició 2.9. *Sigui $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$.*

- *Si X segueix una distribució $N(\mu, \sigma^2)$, aleshores $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ segueix una distribució normal estàndard.*
- *Si Y segueix una distribució normal estàndard, aleshores $T = \mu + \sigma Y$ segueix una distribució normal $N(\mu, \sigma^2)$.*

Demostració. Si X segueix una distribució $N(\mu, \sigma^2)$, tenim que per a $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ i fent el canvi de variable $z = (x-\mu)/\sigma$, obtenim:

$$\begin{aligned} P(a \leq Z \leq b) = P\left(a \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq b\right) = P(a\sigma + \mu \leq X \leq b\sigma + \mu) = \\ \int_{a\sigma+\mu}^{b\sigma+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} dx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \end{aligned} \tag{2.7}$$

que prova que Z segueix una distribució normal estàndard. En canvi, si Y segueix una distribució normal estàndard, fent el mateix canvi de variable obtenim per a $T = \mu + \sigma Y$ que

$$\begin{aligned} P(a \leq T \leq b) = P(a \leq \mu + \sigma Y \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \\ \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2\right\} dt, \end{aligned} \tag{2.8}$$

que demostra la segona proposició. ■