UNIVERSITAT DE BARCELONA

APUNTS

QUART SEMESTRE

Introducció al Càlcul Integral (ICI)

Autor:
Mario VILAR

Professor:
Dr. Albert CLOP

1 de juny de 2022

Introducció

Primer de tot, es trobarà que hi ha un índex, on hi distingim els diferents apartats ordenats d'una manera certament poc satisfactòria pel que fa a l'ordre cronològic del curs, sinó que he seguit més aviat el meu propi criteri. Hi ha capítols, seccions, subseccions (i fins i tot subsubseccions). Pel que fa al pes d'aquestes estructures en els encapçalaments:

1. el número de l'última secció/subsecció figurarà en cada cantonada superior de pàgina parella (per exemple, *1.2*);
2. el nom del capítol es trobarà a la part dreta de la capçalera de les pàgines parelles (per exemple, "Divisibilitat i nombres primers");
3. el nom de l'última secció/subsecció de la pàgina, a la cantonada dreta superior de les pàgines parelles (per exemple, "Polinomis: algorisme d'Euclides").

A més, hi ha una taula en què es veu fàcilment que s'ha seguit una mena de *sorting-by-color* per poder treballar de manera més eficient amb els diferents tipus d'enunciats matemàtics. En els encapçalaments, aleshores, tenim:

- el número de l'últim teorema, definició... de la pàgina en qüestió es trobarà a les pàgines senars, a la cantonada superior dreta (per exemple, **1.2.3**).

Teorema de prova. *Aquest és un teorema de prova. Els teoremes, les proposicions, els lemes, els corol·laris, les propietats, les conjectures i els processos tindran aquest format.*

Definició de prova. Aquesta és una definició de prova. Les definicions, els exemples i les notacions tindran aquest format.

Remarca de prova. Aquesta és una remarca de prova. Les remarques tindran aquest format.

Figura 1: Els diferents formats d'enunciats.

Índex

Taula de continguts

Capítol 1

I

La integral de Riemann

1.1

Construcció de la integral de Riemann

Definició 1.1.1 (Partició). Sigui $[a, b]$ un interval de nombres reals. S'anomena partició d'$[a, b]$ a tot conjunt

$$\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\} \subset [a, b] \tag{1.1.1}$$

amb la propietat que $a = t_0 < \cdots < t_n = b$.

Definició 1.1.2 (Suma inferior i superior). Associades a la partició $\mathcal{P}$ tenim dues possibles aproximacions de l'àrea, una suma inferior (o superior) associada a la partició $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} L(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),\ m_i = \inf\{f(t) \mid t \in [t_{i-1}, t_i]\}; \\ U(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),\ M_i = \sup\{f(t) \mid t \in [t_{i-1}, t_i]\}. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Perquè L, U tinguin sentit, cal que $m_i, M_i \in \mathbb{R}$ siguin finits. Implica que f sigui fitada.

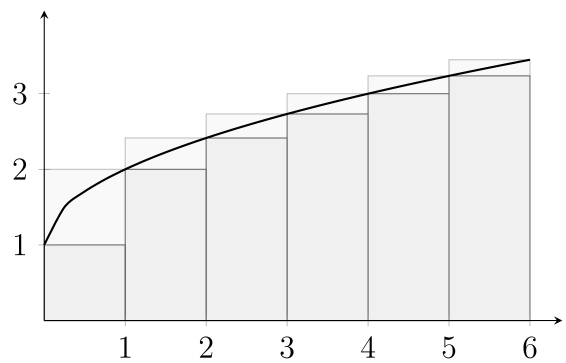


Figura 1.1: La suma inferior (gris fosc) i superior (gris) de Riemann per a $\mathcal{P} = \{0, \dots, 6\}$.

Definició 1.1.3 (Finor). Es diu que una partició $\mathcal{P}$ és més fina que una partició $\mathcal{Q}$ si $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$. Direm que $\mathcal{P} \succ \mathcal{Q}$.

Proposició 1.1.4. *Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fitada. Siguin $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ particions d'$[a, b]$. Aleshores, si $\mathcal{P}$ és més fina que $\mathcal{Q}$, es dona que:*

$$\begin{aligned} L(f, \mathcal{P}) &\geq L(f, \mathcal{Q}), \\ U(f, \mathcal{P}) &\leq U(f, \mathcal{Q}). \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

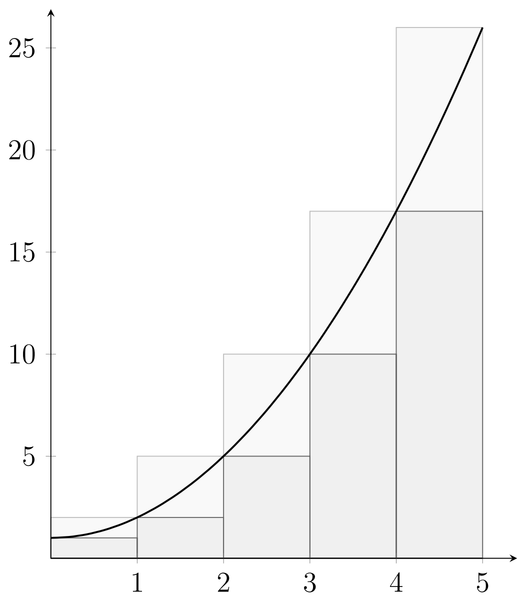


Figura 1.2: $\mathcal{P} = \{0, \dots, 5\}$.

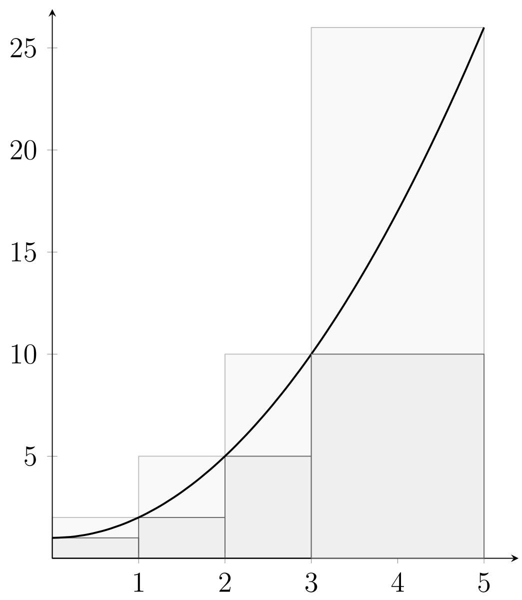


Figura 1.3: $\mathcal{P} = \{0, 1, 2, 3, 5\}$.

Demostració. Sigui $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cup \{t\}$, tal que $\mathcal{Q} = \{t_0, \dots, t_n\}$, on $t_0 = a$ i $t_n = b$ i $k < n$. t compleix que $t \in [t_{k-1}, t_k]$. $\forall i \neq k$, es dona $m_i(\mathcal{P}) = m_i(\mathcal{Q})$ i $M_i(\mathcal{P}) = M_i(\mathcal{Q})$. Ara, siguin:

$$\left.\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, t_k]\} \\ m_k' &= \inf\{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, t]\} \geq m_k \\ m_k'' &= \inf\{f(x) \mid x \in [t_k, t]\} \geq m_k \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} m_k(t_k - t_{k-1}) &= m_k(t_k - t) + m_k(t - t_{k-1}) \\ &\leq m_k'(t_k - t) + m_k''(t - t_{k-1}). \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Com que els altres sumands de $L(f, \mathcal{P})$ i $L(f, \mathcal{Q})$ no es veuen afectats, deduïm que $L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{Q})$:

$$L(f, \mathcal{Q}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k''(t - t_{k-1}) + m_k'(t_k - t) = L(f, \mathcal{P}). \tag{1.1.5}$$

En fer un procediment anàleg per suprems, acabaríem obtenint $U(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{Q})$. ■

Demostració alternativa. També podríem encetar la demostració dient que observant que $m_k \leq m_k'$ i $m_k \leq m_k''$ tindrem que:

$$\begin{aligned} L(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{Q}) &= m_k'(t - t_{k-1}) + m_k''(t_k - t) - m_k(t_k - t_{k-1}) \\ &= (m_k' - m_k)(t - t_{k-1}) + (m_k'' - m_k)(t_k - t) \geq 0. \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

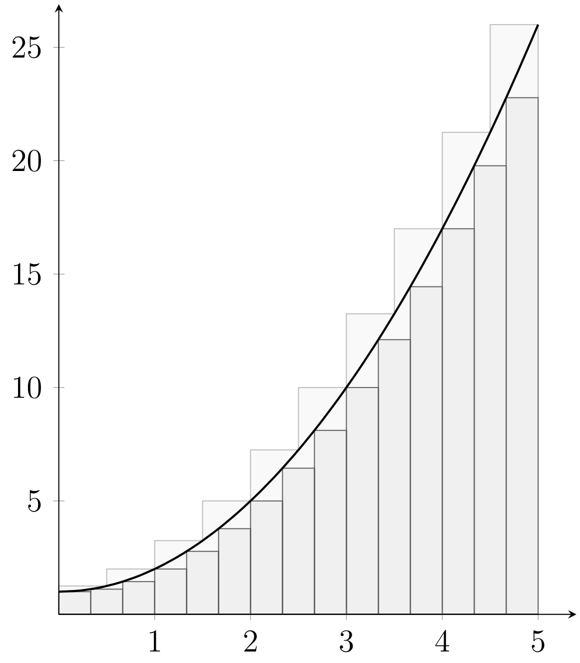
Obtenim, per tant, $L(f, \mathcal{P}) \geq L(f, \mathcal{Q})$. Sigui ara $\mathcal{P}$ una partició qualsevol amb $\mathcal{P} \succ \mathcal{Q}$. Podem posar $\mathcal{P} = \mathcal{P}_m \succ \mathcal{P}_{m-1} \succ \cdots \succ \mathcal{P}_0 = \mathcal{Q}$, on $\mathcal{P}_j$ és una partició que té exactament un punt més que $\mathcal{P}_{j-1}$. Pel que hem provat abans, tindrem:

$$L(f, \mathcal{P}) \geq L(f, \mathcal{P}_{m-1}) \geq \cdots \geq L(f, \mathcal{P}_1) \geq L(f, \mathcal{Q}). \tag{1.1.7}$$

■

Corol·lari 1.1.5. *Si $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ són dues particions qualssevol d'$[a, b]$ i $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és fitada a $[a, b]$, aleshores:*

$$L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{Q}). \tag{1.1.8}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \ldots, 5\right\}, \\ \mathcal{Q} &= \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, 5\right\} \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

Demostració. Sigui $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. Tindrem que $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \succ \mathcal{P}$ i $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} \succ \mathcal{Q}$ i, per la proposició anterior, tenim que la demostració consisteix en una simple desigualtat.

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{Q}). \tag{1.1.10}$$

■

Definició 1.1.6. Donada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fitada, definim les famílies de funcions següents:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \{L(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset [a, b]\}, \\ \mathcal{U}(f) &= \{U(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset [a, b]\}. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Definició 1.1.7 (Integral inferior i superior)**.**

1. El conjunt $\mathcal{L}(f)$ és un conjunt fitat superiorment (qualsevol suma superior n'és una fita superior). Per tant, existeix la major de les fites inferiors:

$$\sup\{\mathcal{L}(f)\} = \underline{\int_a^b} f. \tag{1.1.12}$$

   Aquesta és, de fet, la integral inferior de f en $[a, b]$.

2. De la mateixa manera, el conjunt $\mathcal{U}(f)$ és un conjunt fitat inferiorment (qualsevol suma inferior n'és una fita inferior). Per tant, existeix la menor de les fites superiors:

$$\inf\{\mathcal{U}(f)\} = \overline{\int_a^b} f. \tag{1.1.13}$$

   Aquesta és, de fet, la integral superior de f en $[a, b]$.

Observació 1.1.8. Adonem-nos que

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f. \tag{1.1.14}$$

Definició 1.1.9 (Integrable en el sentit de Riemann)**.** Es diu que una funció fitada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és integrable en el sentit de Riemann si

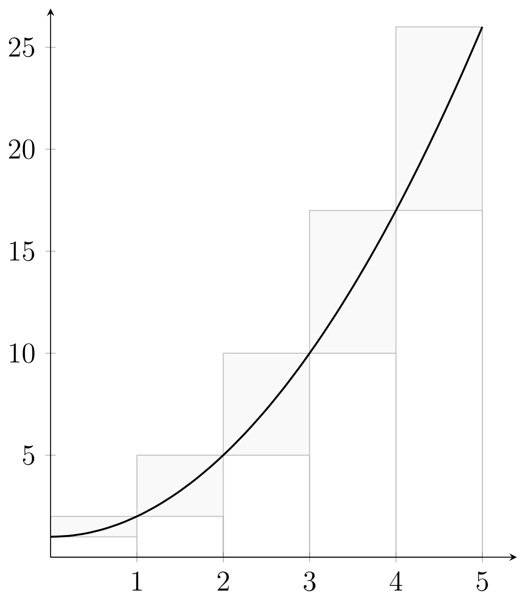
$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f. \tag{1.1.15}$$

Quan això passa, escriurem $f \in \mathscr{R}([a,b])$ i direm que:

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f. \tag{1.1.16}$$

Teorema 1.1.10. *Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció fitada. Aleshores,*

$$f \in \mathscr{R}([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\} \subset [a,b] \;\middle|\; U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon. \tag{1.1.17}$$



Demostració.

$\Longrightarrow$ Sigui $\varepsilon > 0$. Per definició, $\underline{\int_a^b} f = \inf\{\mathcal{U}(f)\}$.

Lema 1.1.11. *Sigui un conjunt $A = \mathcal{U}(f)$ i $I = \inf\{A\}$. Aleshores, $A \cap [I, I+\varepsilon) \neq \emptyset$, $\forall \varepsilon > 0$.*

Això vol dir que existeix una partició $\mathcal{P}$ tal que:

$$\overline{\int_a^b} f \leq U(f,\mathcal{P}) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} \implies U(f,\mathcal{P}) + \overline{\int_a^b} f < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.1.18}$$

i com que f és integrable, tindrem:

$$\overline{\int_a^b} = \underline{\int_a^b} \implies U(f,\mathcal{Q}) - L(f,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{1.1.19}$$

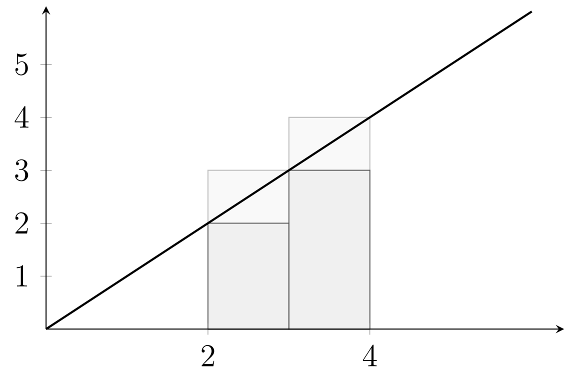
Anàlogament per $\mathcal{L}(f)$ existeix una partició $\mathcal{Q}$ tal que:

$$\begin{gathered} \underline{\int_a^b} f - \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies U(f,\mathcal{P}) + \overline{\int_a^b} f < \frac{\varepsilon}{2}. \\ U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{Q}) < \varepsilon. \end{gathered} \tag{1.1.20}$$

$\Longleftarrow$ Suposem ara f no integrable, és a dir, $\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$. Sigui $K = \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f$. Aleshores, $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) > K$ per a tota partició $\mathcal{P}$ i, per tant, la condició de l'enunciat no es verifica per $\varepsilon < K$.

■

Teorema 1.1.12. *Sigui f monòtona i fitada a $[a,b]$. Llavors, $f \in \mathscr{R}([a,b])$.*



$$A_r = \sum_{i=1}^{n} \delta(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \varepsilon. \tag{1.1.21}$$

Demostració. Suposem f monòtona creixent (es prova anàlogament quan f és monòtona decreixent). Sigui $\varepsilon > 0$ i $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} > 0$. Volem que l'àrea corresponent a $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P})$ sigui justament ε. Sigui ara $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partició d'$[a,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ per a $i = 1 \div n$. Observem que $m_i = f(t_{i-1})$ i $M_i = f(t_i)$. Per tant:

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}), \\ U(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}). \end{aligned} \tag{1.1.22}$$

I resulta:

$$\begin{aligned} U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) < \delta \cdot \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) = \delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon, \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

on hem aplicat que $\sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(b) - f(a)$, ja que els termes del mig es cancel·len entre ells. Com f és fitada i compleix que $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$, f és integrable. ■

Definició 1.1.13 (Funció contínua en x). Una funció és contínua en x tal que $\forall \varepsilon \exists \delta \mid |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall |t| < \delta$. Direm que $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

Definició 1.1.14 (Funció uniformement contínua en x). Té un grau de restricció més que la continuïtat, ja que δ només depèn de ε en la continuïtat i és uniformement contínua depenent de x i δ.

$$\forall \varepsilon \exists \delta \mid \forall x\ |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall |t| < \delta. \tag{1.1.24}$$

Teorema 1.1.15. *Sigui un interval $[a,b]$ tal que $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Aleshores, f és uniformement contínua en $[a,b]$.*

Demostració. Suposem que f no és uniformement contínua. Aleshores, neguem la condició de continuïtat uniforme: $\exists \varepsilon > 0 \mid \forall \delta \exists x, t \mid |f(x+t) - f(x)| \geq \varepsilon$. Prenem $\delta = \frac{1}{n}$ i, per tant, $\exists x_n, t_n$ tal que $|f(x_n + t_n) - f(x_n)| > \varepsilon$. Utilitzant el teorema de Bolzano-Weierstrass:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b] \implies \exists \{x_{n_k}\}_{i=1}^{\infty} \mid x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \ell. \tag{1.1.25}$$

ens surt que $x_n + t_n \to \ell + 0 = \ell$. Tenim que $|f(x_n + t_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, d'on hem obtingut que $x_n \to \ell$ i $x_n + t_n \to \ell$, d'on trobarem la contradicció. Com que f és contínua en ℓ:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \exists \delta_{\ell,\varepsilon} \mid |f(\ell + t) - f(\ell)| < \varepsilon,\ \forall |t| < \delta_{\ell,\varepsilon} \\ \varepsilon \leq |f(x_n) + f(t_n) - f(x_n)| \leq |f(x_n + t_n) - f(\ell)| + |f(\ell) - f(x_n)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \end{aligned} \tag{1.1.26}$$

on hem utilitzat que

$$\begin{gathered} |x_n + t_n - \ell| < \delta_{\ell,\varepsilon}, \\ |x_n - \ell| < \delta_{\ell,\varepsilon}. \end{gathered} \tag{1.1.27}$$

■

Teorema 1.1.16. *Sigui $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Aleshores, $f \in \mathscr{R}[a,b]$.*

Demostració. Pel teorema anterior, f resulta uniformement contínua. Volem trobar que

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f, \tag{1.1.28}$$

és a dir, $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P} \mid U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. Així, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ sempre que $|x - y| < \delta$. Sigui $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\} \subset [a,b]$ una partició tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ per $i = 1 \div n$. Aleshores,

$$\forall x, y \in [t_{i-1}, t_i] \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \implies M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{1.1.29}$$

Doncs, de manera formal, $\forall \epsilon \exists x \mid f(x_\epsilon) > \sup\{f\} - \epsilon = M_i - \epsilon$ i $\forall \epsilon \exists y \mid f(y_\epsilon) \leq \inf\{f\} + \epsilon = m_i + \epsilon$.

$$M_i - m_i = M_i - f(x_\epsilon) + f(x_\epsilon) - f(y_\epsilon) + f(y_\epsilon) - m_i \leq \epsilon + \frac{\varepsilon}{b-a} + \epsilon = 2\epsilon + \frac{\varepsilon}{b-a} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{1.1.30}$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) &\leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.1.31}$$

■

1.2

Comportament de la integral respecte operacions elementals

Proposició 1.2.1. *Siguin f, g integrables en $I = [a, b]$. Llavors, $f + g$ és integrable en I i*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{1.2.1}$$

Demostració. Sigui $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partició de I i siguin

$$\left.\begin{aligned} m_i &= \inf\{(f+g)(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ m_i' &= \inf\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ m_i'' &= \inf\{g(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M_i &= \sup\{(f+g)(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ M_i' &= \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ M_i'' &= \sup\{g(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2}$$

Observem que $m_i \geq m_i' + m_i''$ i que $M_i \leq M_i' + M_i''$. Així doncs, tenim:

$$\begin{gathered} L(f, \mathcal{P}) + L(g, \mathcal{P}) \leq L(f+g, \mathcal{P}) \\ U(f+g, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}) \\ L(f, \mathcal{P}) + L(g, \mathcal{P}) \leq L(f+g, \mathcal{P}) \leq U(f+g, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}) \end{gathered} \tag{1.2.3}$$

i, per tant,

$$U(f+g, \mathcal{P}) - L(f+g, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}) - L(g, \mathcal{P}). \tag{1.2.4}$$

En particular, com això passa per a tota partició $\mathcal{P}$, podem escollir $\mathcal{P}$ com vulguem. Com que $f, g \in \mathscr{R}([a, b])$, podem escollir $\mathcal{P}$ de manera que

$$\begin{aligned} U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \\ U(g, \mathcal{P}) - L(g, \mathcal{P}) < \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Considerem $\varepsilon > 0$. Com que f, g són integrables existiran particions $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ de I amb $U(f, \mathcal{P}_1) - L(f, \mathcal{P}_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $U(g, \mathcal{P}_2) - L(g, \mathcal{P}_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sigui $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$:

$$U(f+g, \mathcal{P}) - L(f+g, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}) - L(g, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.2.6}$$

Això prova que $f + g$ és integrable. Sigui ara $\mathcal{P}$ una partició qualsevol de I. Tindrem que:

$$L(f, \mathcal{P}) + L(g, \mathcal{P}) \leq L(f+g, \mathcal{P}) \leq \int_a^b (f+g) \leq U(f+g, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}) \tag{1.2.7}$$

i per altra banda

$$L(f, \mathcal{P}) + L(g, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq U(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}). \tag{1.2.8}$$

Usant:

$$\left.\begin{aligned} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} a \leq x \leq b \\ -b \leq -y \leq -a \end{aligned}\right\} \implies |x - y| \leq b - a. \tag{1.2.9}$$

Deduïm que per qualsevol partició $\mathcal{P}$ es verificarà:

$$\left| \int_a^b (f+g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P}) - L(g, \mathcal{P}) < \varepsilon. \tag{1.2.10}$$

Ara bé, l'últim terme d'aquesta desigualtat es pot fer tant petit com vulguem prenent la partició $\mathcal{P}$ prou fina. Obtenim, doncs:

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{1.2.11}$$

■

Proposició 1.2.2. *Sigui f integrable a $I = [a,b]$ i $c \in \mathbb{R}$. Aleshores, cf és integrable a I i $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.*

Demostració. Fem només el cas $c > 0$ i l'altre cas es fa de forma totalment anàloga. Sigui $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partició d'I i siguin:

$$\left.\begin{array}{l} m_i = \inf\{(f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ m_i' = \inf\{cf(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ M_i' = \sup\{cf(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \end{array}\right\} \tag{1.2.12}$$

Clarament, $m_i' = cm_i$ i $M_i' = cM_i$. Tindrem, doncs, que:

$$U(cf,\mathcal{P}) - L(cf,\mathcal{P}) = c(U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P})). \tag{1.2.13}$$

Considerem $\varepsilon > 0$ i sigui $\mathcal{P}$ amb $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{c}$ (aquesta partició existeix ja que f és integrable per hipòtesi). Llavors:

$$U(cf,\mathcal{P}) - L(cf,\mathcal{P}) < \frac{c\varepsilon}{c} = \varepsilon. \tag{1.2.14}$$

Això prova que $cf \in \mathscr{R}([a,b])$. Per altra banda, tenim que:

$$\begin{aligned} c\cdot L(f,\mathcal{P}) = L(cf,\mathcal{P}) \leq \int_a^b cf \leq U(cf,\mathcal{P}) = c\cdot U(f,\mathcal{P}) \\ c\cdot L(f,\mathcal{P}) \leq c\int_a^b f \leq c\cdot U(f,\mathcal{P}). \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Deduïm utilitzant un argument anàleg a la demostració anterior, doncs, que

$$\left|\int_a^b cf - c\int_a^b f\right| \leq c(U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P})) \leq \varepsilon. \tag{1.2.16}$$

Com que el darrer terme de la desigualtat el podem fer tan petit com vulguem, deduïm que:

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f. \tag{1.2.17}$$

■

Observació 1.2.3. Podem dir que $\mathscr{R}([a,b])$ és un espai vectorial i $\int_a^b$ hi és lineal.

Teorema 1.2.4 (Integrabilitat d'una composició de funcions). *Sigui f integrable en $[a,b]$ amb $f([a,b]) \subset [c,d]$ i g contínua en $[c,d]$. Llavors, $g \circ f$ és integrable en I.*

Demostració. Sigui $K = \max\{|g(x)| \mid x \in [c,d]\}$. Considerem $\varepsilon > 0$. Com que g és uniformement contínua, existeix $\delta > 0$ tal que

$$|x-y| < \delta \implies |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a+2K}. \tag{1.2.18}$$

Podem escollir δ de manera que $\delta < \frac{\varepsilon}{b-a+2K}$. Com que $f \in \mathscr{R}([a,b])$ escollim $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ partició d'$[a,b]$ amb

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \delta^2. \tag{1.2.19}$$

Siguin els ínfims i suprems de f i $g \circ f$ en els corresponents intervals de la partició:

$$\left.\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \mid x \in [t_{i-1},t_i]\} \\ m_i' &= \inf\{(g\circ f)(x) \mid x \in [t_{i-1},t_i]\} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1},t_i]\} \\ M_i' &= \sup\{(g\circ f)(x) \mid x \in [t_{i-1},t_i]\} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.20}$$

Aleshores:

$$U(g\circ f,\mathcal{P}) - L(g\circ f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}). \tag{1.2.21}$$

Dividim el conjunt d'índexs $1 \div n$ en dos subconjunts I, J de la següent manera:

1. en el subconjunt I (bo) considerem els índexs i tals que $M_i - m_i < \delta$,
2. en el subconjunt J (dolent) considerem els índexs i tals que $M_i - m_i \geq \delta$

Fixem-nos que si $i \in I$, aleshores per tot parell $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ tindrem que:

$$|f(x)-f(y)| < \delta \xrightarrow{g \text{ uniformement contínua}} |g(f(x)) - g(f(y))| < \frac{\varepsilon}{(b-a)+2K} \tag{1.2.22}$$

I, per definició de ínfim i suprem:

$$M_i' - m_i' < \frac{\varepsilon}{b-a+2K}. \tag{1.2.23}$$

D'altra banda, tindrem:

$$\begin{aligned} \delta \sum_{i\in J} (t_i - t_{i-1}) &= \sum_{i \in J} \delta (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i\in J} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) &= U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \delta^2 \implies \sum_{i \in J} (t_i - t_{i-1}) < \delta. \end{aligned} \tag{1.2.24}$$

Per tant:

$$\begin{aligned} U(g\circ f,\mathcal{P}) - L(g\circ f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i\in I} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) \\ &+ \sum_{i \in J} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a+2K} \sum_{i\in I} (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i\in J} 2K (t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a+2K}(b-a) + 2K\delta < \frac{\varepsilon(b-a)}{(b-a)+2K} + \frac{2K}{(b-a)+2K}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.2.25}$$

On hem usat que $M_i' - m_i' \leq 2K$. I això prova que $g \circ f$ és integrable en $[a,b]$. ■

Corol·lari 1.2.5. *Sigui f integrable en $[a,b]$. Aleshores, f^2 també ho és. Si existeix $\delta > 0$ amb $f(x) \geq \delta$ per a tot $x \in [a,b]$, llavors $\frac{1}{f}$ també és integrable.*

Demostració. La funció f^2 s'obté al composar f amb la funció $g(x) = x^2$ que és contínua i $g(f) = f^2$. Per 1.2.4, obtenim que f^2 és integrable. La funció $\frac{1}{f}$ s'obté al composar f amb la funció $h(x) = \frac{1}{x}$ per $x \geq \delta$ i, així, és contínua a $[\delta, M]$, amb $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. També per 1.2.4 obtenim que $\frac{1}{f}$ és integrable en $[a,b]$. ■

Corol·lari 1.2.6. *Siguin f, g integrables en $[a,b]$. Llavors, $f \cdot g$ és integrable en $[a,b]$.*

Demostració. Tenim que

$$fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}, \tag{1.2.26}$$

i com que la suma de funcions contínues i el seu quadrat són contínues, resulta que fg també ho és. ■

Proposició 1.2.7. *Suposem que $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ tal que $f \leq g$ en tot l'interval. Aleshores:*

$$f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g. \tag{1.2.27}$$

Demostració. Veurem que $\int_a^b (g - f) \geq 0$. Fixem-nos, però, al ser $g - f \geq 0$ podem posar:

$$U(g-f, \mathcal{P}) \geq L(g-f, \mathcal{P}) \geq 0, \tag{1.2.28}$$

on en la última desigualtat hem usat que $g - f \geq 0$. Com a conseqüència, $U(g-f,\mathcal{P}) \geq 0$ i $\int_a^b g - f \geq 0$. ■

Proposició 1.2.8. *$f \in \mathscr{R}([a,b])$ amb $m \leq f \leq M$ per certes constants $m, M \in \mathbb{R}$, es dona que*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a). \tag{1.2.29}$$

Demostració. Agafant la partició $\mathcal{P} = \{a, b\}$ es dona:

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P}) &\geq m(b-a), \\ U(f,\mathcal{P}) &\leq M(b-a). \end{aligned} \tag{1.2.30}$$

■

Corol·lari 1.2.9 (Teorema del valor mitjà de la integral). *Sigui $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Existeix $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f = f(c)(b-a)$. Equivalentment, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.*

Demostració. Apliquem la proposició anterior a

$$\begin{aligned} M &= \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}, \\ m &= \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}. \end{aligned} \tag{1.2.31}$$

Com que $f \in \mathcal{C}([a,b])$, per Weierstrass la funció és fitada i existeixen mínim i màxim que coincideixen amb l'ínfim i el suprem. De fet, $\exists x_m$ i x_M tals que $f(x_M) = M$ i $f(x_m) = m$. Per tant, la proposició anterior diu que:

$$f(x_m) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M = f(x_M). \tag{1.2.32}$$

Per tant, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f \in [f(x_m), f(x_M)]$ i pel teorema de Bolzano, existeix $c \in (x_m, x_M)$ tal que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$. ■

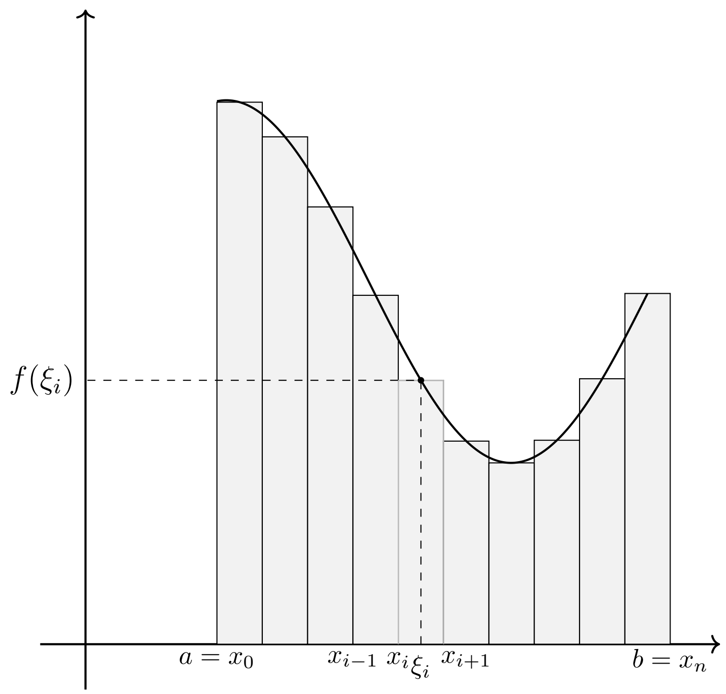


Figura 1.4: Teorema del valor mitjà del càlcul integral.

Proposició 1.2.10. *Sigui $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Així, el valor absolut de la funció és integrable Riemann i $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.*

Demostració. Utilitzem la desigualtat usual $-|f| \leq f \leq |f|$. Aleshores, $|f| \in \mathscr{R}([a,b])$, donat que $|f|$ és la composició del valor absolut amb f, $|f| = g \circ f$, amb $g(x) = |x|$. Finalment:

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \implies \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|. \tag{1.2.33}$$

■

Teorema 1.2.11. *Sigui $f \in \mathscr{R}([a,b])$ i sigui $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que per al conjunt $\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq g(x)\}$ és finit. Aleshores, $g \in \mathscr{R}([a,b])$ i $\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Demostració. Sigui $h = f - g$. Aleshores, $h = 0$ a tot arreu excepte, com a molt, en un conjunt finit de punts. Hem de provar que $h \in \mathscr{R}([a,b])$ i $\int_a^b h = 0$. Aleshores:

$$\left.\begin{matrix} h \in \mathscr{R}([a,b]) \\ f \in \mathscr{R}([a,b]) \end{matrix}\right\} \implies g = f = h \implies \int_a^b g = \int_a^b f - \int_a^b h = \int_a^b f. \tag{1.2.34}$$

Siguin $x_1, \ldots, x_n$ tals que $x_i \in [a,b]$ on $h(x_i) \neq 0$, amb $i = 1 \div m$. Sigui $M = \max\{|h(x_1)|, \ldots, |h(x_m)|\}$ i sigui $\varepsilon > 0$. Sigui $\mathcal{P}$ una partició tal que:

$$t_i - t_{i-1} < \frac{\varepsilon}{2 \cdot M \cdot m}. \tag{1.2.35}$$

Aleshores,

$$U(h, \mathcal{P}) - L(h, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}). \tag{1.2.36}$$

El nombre de sumands no és lliure i igual a $2m$ sumands, ja que la funció només és no nul·la en un nombre no finit de punts. A més, com que $M_i - m_i \leq M$ i $t_i - t_{i-1} = \frac{\varepsilon}{2Mm}$, ens queda el següent:

$$U(h,\mathcal{P}) - L(h,\mathcal{P}) < 2m \cdot M \cdot \frac{\varepsilon}{2Mm} = \varepsilon. \tag{1.2.37}$$

Per altra banda, per qualsevol partició $\mathcal{P}$ tindrem que:

$$L(h,\mathcal{P}) \leq 0 \leq U(h,\mathcal{P}) \tag{1.2.38}$$

i, per tant, $\int_a^b h = 0$. ■

Proposició 1.2.12. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua a tot $[a,b]$ llevat de potser un nombre finit de discontinuïtats evitables o de salt. Aleshores, $f \in \mathscr{R}([a,b])$.*

Observació 1.2.13. Podem dir que una funció contínua a trossos és la combinació d'una contínua i una constant a trossos. Les integrals d'aquestes últimes són unió de rectangles.

1.3 El teorema fonamental del càlcul

Proposició 1.3.1. *Sigui f integrable en $[a,c]$ i $b \in (a,c)$. Aleshores, f és integrable en $[a,b]$ i $[b,c]$ i*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \tag{1.3.1}$$

Recíprocament, si f és integrable en $[a,b]$ i $[b,c]$, llavors és integrable en $[a,c]$ i val (1.3.1).

Demostració.

$\Longrightarrow$ Suposem que f és integrable en $[a,c]$ i sigui $\varepsilon > 0$. Considerem una partició $\mathcal{P}$ de $[a,c]$ amb $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. Sigui $\mathcal{P}'$ la partició d'$[a,c]$ obtinguda a l'afegir b a $\mathcal{P}$. Com que $\mathcal{P}' \succ \mathcal{P}$ tindrem que $U(f,\mathcal{P}') - L(f,\mathcal{P}') \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. Ara bé, la partició $\mathcal{P}'$ es pot descompondre en dues particions $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, una de l'interval $[a,b]$ $(\mathcal{P} \cap [a,b))$ i una altra del $[b,c]$ $(\mathcal{P} \cap [b,c])$. Així, tindrem:

$$\begin{aligned} U(f,\mathcal{P}') &= U(f,\mathcal{P}_1) + U(f,\mathcal{P}_2) \\ L(f,\mathcal{P}') &= L(f,\mathcal{P}_1) + L(f,\mathcal{P}_2). \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

En conseqüència:

$$\varepsilon > U(f,\mathcal{P}') - L(f,\mathcal{P}') = U(f,\mathcal{P}_1) - L(f,\mathcal{P}_1) + U(f,\mathcal{P}_2) - L(f,\mathcal{P}_2) \tag{1.3.3}$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} U(f,\mathcal{P}_1) - L(f,\mathcal{P}_1) < \varepsilon, \\ U(f,\mathcal{P}_2) - L(f,\mathcal{P}_2) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Obtenim, doncs, que f és integrable en $[a,b]$ i $[b,c]$. Considerem ara una partició $\mathcal{P}$ qualsevol d'$[a,c]$. Podem considerar que $b \in \mathcal{P}$ (en cas contrari, afegim el punt b a la partició). Siguin $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ les corresponents particions ens els intervals $[a,b]$ i $[b,c]$. Tindrem que:

$$L(f,\mathcal{P}) \leq \int_a^c f \leq U(f,\mathcal{P}). \tag{1.3.5}$$

Per altra banda,

$$L(f,\mathcal{P}) = L(f,\mathcal{P}_1) + L(f,\mathcal{P}_2) \leq \int_a^b f + \int_b^c f \leq U(f,\mathcal{P}_1) + U(f,\mathcal{P}_2) = U(f,\mathcal{P}). \quad (1.3.6)$$

Així, tindrem l'entorn:

$$\left| \int_a^c f - \left(\int_a^b f + \int_b^c f \right) \right| \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}). \quad (1.3.7)$$

Com que el segon terme d'aquesta desigualtat es pot fer tan petit com vulguem, prenent $\mathcal{P}$ prou fina, deduïm que:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \quad (1.3.8)$$

$\Longleftarrow$ Exercici.

■

Observació 1.3.2. Fins ara, la notació $\int_a^b f$ només té sentit quan $a < b$. Quan $a > b$ convindrem que $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Definició 1.3.3 (Antiderivada)**.** Sigui f integrable en $[a,b]$. Aleshores, per la proposició anterior f és integrable en $[a,x]$ per tot $x \in [a,c]$ i té sentit definir la següent funció:

$$F(x) = \int_a^x f. \quad (1.3.9)$$

De fet, si $c \in [a,b]$ llavors aquesta integral també té sentit com a mínim pels $x \geq c$. Per a $x < c$, tampoc és un problema ja que podem aplicar 1.3.2.

Proposició 1.3.4. *Si f és integrable en $[a,b]$, $F(x) \in \mathcal{C}([a,b])$.*

Demostració. Sigui $x \in [a,b]$. Hem d'estudiar

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}, \quad (1.3.10)$$

i provar la continuïtat de la funció a partir de:

$$\lim_{h\to 0} F(x+h) - F(x) = 0 \iff \lim_{y\to x} F(y) = F(x). \quad (1.3.11)$$

Sigui $M = \max\{|f(y)| \mid y \in [a,b]\}$. Suposarem $h > 0$, i tindrem que:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f. \quad (1.3.12)$$

Com f és fitada, $|F(x+h) - F(x)| = |\int_x^{x+h} f|$, $-Mh \leq \int_x^{x+h} f \leq Mh$ i usant 1.2.9, resultarà:

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \int_x^{x+h} |f| \leq M \cdot |h| \xrightarrow{h\to 0^+} 0, \quad (1.3.13)$$

ja que per a $x+h-x=h$ com a màxim podem trobar una àrea igual al quadrat d'altura M i si $h\to 0$ aleshores obtenim el resultat de l'equació anterior. Per tant,

$$\lim_{h\to 0^+}|F(x+h)-F(x)|=0. \tag{1.3.14}$$

En particular, F és contínua per la dreta en el punt x. Fem el mateix per $h<0$:

$$\begin{gathered}|F(x+h)-F(x)|=\left|\int_x^{x+h} f\right|=\left|-\int_{x+h}^{x} f\right|=\left|\int_{x+h}^{x} f\right|\leq\int_{x+h}^{x}|f|\\ \implies Mh\leq F(x+h)-F(x)\leq M(-h)\iff |F(x+h)-F(x)|\leq M\cdot|h|.\end{gathered} \tag{1.3.15}$$

Per tant, en aquest cas h és contínua per l'esquerra. ■

Teorema 1.3.5 (Teorema fonamental del Càlcul Integral). *Si f és integrable en $[a,b]$ i f és contínua en $c\in[a,b]$, aleshores F és derivable en c i*

$$F'(c)=f(c). \tag{1.3.16}$$

Demostració. Per 1.3.4, tenim que F és contínua en $[a,b]$. Hem d'estudiar

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h}. \tag{1.3.17}$$

Un altre cop, $F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f$. Suposem $h>0$. Clarament, si $x\in[c,c+h]$, aleshores:

$$m_h=\inf_{[c,c+h]} f\leq f(x)\leq\sup_{[c,c+h]} f=M_h. \tag{1.3.18}$$

Per tant, $m_k\leq f(x)\leq M_k$ si $x\in[c,c+h]$. Si integrem sobre $[c,c+h]$:

$$\int_c^{c+h} m_h\leq\int_c^{c+h} f\leq\int_c^{c+h} M_h\iff m_h\cdot h\leq\int_c^{c+h} f\leq M_h\cdot h. \tag{1.3.19}$$

Dividim tot per h i ens queda que:

$$m_h\leq\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f\leq M_h\iff m_h\leq\frac{F(c+h)-F(c)}{h}\leq M_h. \tag{1.3.20}$$

Ja hem fixat $M_h=\sup\{f(x)\mid x\in[c,c+h]\}$. Si prenem límit a

$$m_h\leq\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f\leq M_h\xrightarrow{h\to 0} f(c)\leq\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f\leq f(c) \tag{1.3.21}$$

I ara, apliquem el lema del sandvitx i trobem que $\lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h}=f(c)$. Tornem a demostrar que $M_h,m_h\to f(c)$ quan $h<0$ de la mateixa manera:

$$\lim_{h\to 0} m_h\leq\lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h}\leq\lim_{h\to 0} M_h \tag{1.3.22}$$

I obtenim que $\lim_{h\to 0} m_h=\lim_{h\to 0} M_h=f(c)$. Per tant, obtenim el resultat:

$$F'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h}=f(c). \tag{1.3.23}$$

El Teorema Fonamental del Càlcul garanteix que, donada f contínua en $[a,b]$, aleshores $F(x)=\int_a^x f$ és contínua a $[a,b]$ i derivable a tot $x\in[a,b]$, amb $F'(x)=f(x)$. ■

Observació 1.3.6. Com f és contínua a $x = c$, donat $\varepsilon > 0 \exists h > 0$ tal que:

$$x \in [c-h, c+h] \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon \implies f(x) < f(c) + \varepsilon,\ \forall x \in [c-h, c+h]. \quad (1.3.24)$$

Aleshores, $M_h \leq \sup\{f(x) \mid x \in [c-h, c+h]\} \leq f(c) + \varepsilon$. De la mateixa manera, veiem que $f(c) - \varepsilon \leq m_k \leq M_k \leq f(c) + \varepsilon$. Ara, només a l'observar que $M_h \to f(c)$ i $m_h \to f(c)$ quan $h \to 0$:

$$|f(x) - f(c)| \to 0 \implies f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon,\ \forall x \in [c, c+h] \implies \begin{cases} f(c) - \varepsilon \leq M_h \leq f(c) + \varepsilon \\ f(c) - \varepsilon \leq m_h \leq f(c) + \varepsilon \end{cases} \quad (1.3.25)$$

Definició 1.3.7 (Primitiva). Donada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, es diu que f té primitiva si existeix una funció derivable $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F' = f$. Si passa això, F és la primitiva de f.

Hem provar, doncs, que tota funció f contínua a $[a, b]$ admet, com a mínim, una primitiva, la donada per $F(x) = \int_a^x f$.

Observació 1.3.8. $G(x) = F(x) + K$, també és una primitiva de f, donat que $G' = (F + c)' = F' + c' = F'$.

Corol·lari 1.3.9 (Regla de Barrow per funcions contínues). *Sigui f contínua en $[a, b]$. Sigui G una primitiva de f. Aleshores, $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.*

Demostració. Sigui $F(x) = \int_a^x f$. Pel Teorema Fonamental del Càlcul, F és derivable i $F' = f$. Així doncs, i com que G és primitiva de f:

$$0 = f - f = F' - G' = (F - G)', \quad (1.3.26)$$

d'on deduïm que $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = k$. D'altra banda,

$$k = (F - G)(a) = F(a) - G(a) = \int_a^b f - G(a) = -G(a). \quad (1.3.27)$$

Per tant, $\int_a^b f = F(b) = k + G(b) = -G(a) + G(b)$. ∎

Observació 1.3.10. Sigui f integrable i sigui $F(x) = \int_a^x f$, tal que F sigui contínua. Notem: F podria no ser derivable i, per tant, una primitiva G podria no existir.

Teorema 1.3.11. *Sigui $f \in \mathscr{R}([a, b])$. Suposem que f admet una primitiva G (hipòtesi forta). Aleshores:*

$$\int_a^b f = G(b) - G(a). \quad (1.3.28)$$

En altres paraules, perquè la regla de Barrow sigui certa no fa falta que l'integrand sigui continu.

Demostració. Sigui $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partició d'$[a, b]$: associem-hi els m_i, M_i. Pel TVM de Lagrange, $G(t_i) - G(t_{i-1}) = f(c_i)(t_i - t_{i-1})$ per algun $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$. D'altra banda, $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, per als suprems i ínfims en l'interval corresponent. Per tant, podem fer $m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$, ja que $t_i - t_{i-1} > 0$. Per altra banda,

$$m_i(t_i - t_{i-1} \leq G(t_i) - G(t_{i-1})) \leq M_i(t_i - t_{i-1}). \quad (1.3.29)$$

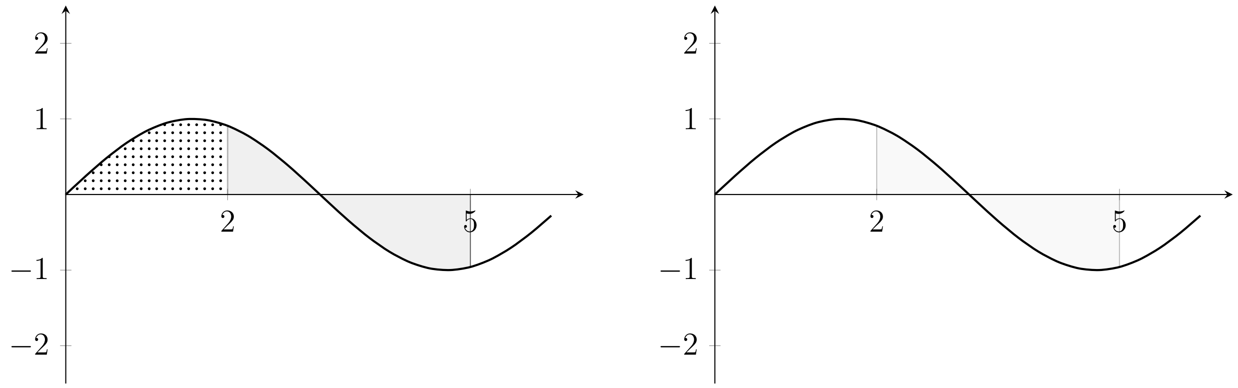
Si ara sumem per $i = 1 \div n$:

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^{n} (G(t_i) - G(t_{i-1})) \leq U(f, \mathcal{P}) \iff L(f, \mathcal{P}) \leq G(t_n) - G(t_0) \leq U(f, \mathcal{P}), \quad (1.3.30)$$

i això passa per tota partició $\mathcal{P}$. En particular, si triem una partició $\mathcal{P}$ tal que $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$, aleshores $U(f,\mathcal{P}) < L(f,\mathcal{P}) + \varepsilon$ i

$$L(f, \mathcal{P}) \leq G(b) - G(a) \leq L(f, \mathcal{P}) + \varepsilon, \quad (1.3.31)$$

de tal manera que $\int_a^b f = G(b) - G(a)$. ■



Corol·lari 1.3.12 (Fórmula d'integració per parts). *Siguin $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables. Suposarem que f, g tenen una primitiva F, G respectivament. Aleshores,*

$$\int_a^b F \cdot g = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f \cdot G. \quad (1.3.32)$$

Demostració. Començarem dient que el fet que F sigui derivable implica que F és contínua i, per tant, és integrable. Com g és integrable, $F \cdot g$ és integrable. Podem raonar anàlogament per $f \cdot G$. Apliquem que $(F \cdot G)' = F \cdot g + f \cdot G$, i com $Fg + fG$ té primitiva podem aplicar Barrow a $Fg + fG$. ■

Teorema 1.3.13 (Canvi de variable). *Sigui $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ derivable, amb derivada contínua, tal que $\varphi(c) = a$ i $\varphi(d) = b$. Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Aleshores:*

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \varphi)\varphi'. \quad (1.3.33)$$

Demostració. Com $(f \circ \varphi)\varphi'$ té primitiva $F \circ \varphi$, ja que $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Com φ és integrable perquè és derivable i f també ho és, $(f \circ \varphi)$ és integrable i φ' és contínua ja que és integrable, així que tot plegat serà integrable. ■

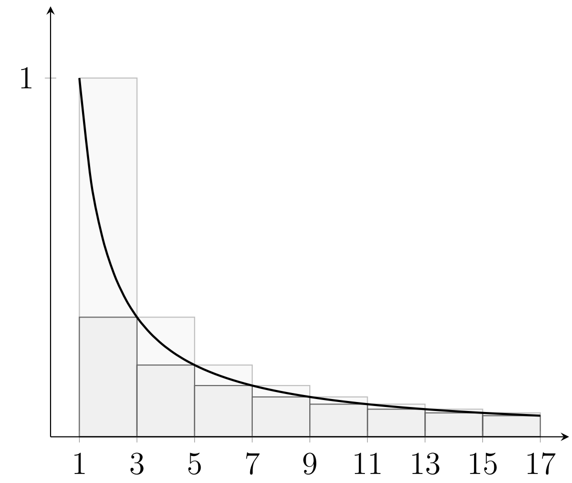
1.4

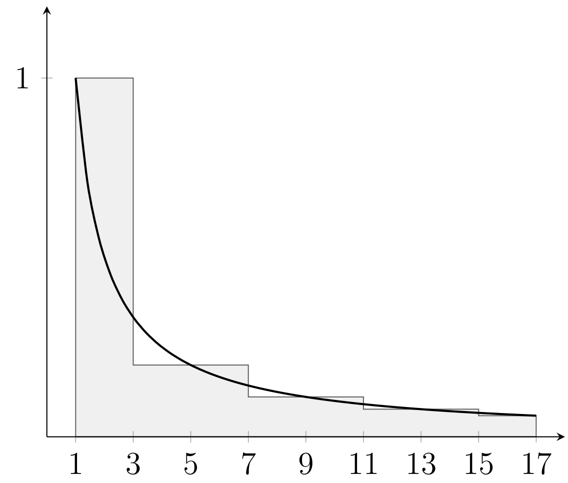
Sumes de Riemann

Donada una partició $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ d'$[a,b]$ una suma de Riemann de f associada a $\mathcal{P}$ és una expressió del tipus:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \quad (1.4.1)$$

on $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Totes aquestes expressions es denoten $S(f, \mathcal{P})$. Clarament, $L(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P})$ independentment de l'elecció de x.





Teorema 1.4.1. *Si $f \in \mathscr{R}([a, b])$ per tot $\varepsilon > 0$ existeix una partició $\mathcal{P}$ d'$[a, b]$ tal que*

$$\left| \int_a^b f - S(f, \mathcal{P}) \right| < \varepsilon, \tag{1.4.2}$$

sigui quina sigui l'elecció dels x_i.

Demostració. Donat que

$$\left.\begin{array}{c} L(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f \leq U(f, \mathcal{P}), \\ L(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}), \end{array}\right\} \implies \left| \int_a^b f - S(f, \mathcal{P}) \right| \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon. \tag{1.4.3}$$

■

Teorema 1.4.2. *Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fitada. Suposem que existeix un nombre $A \in \mathbb{R}$ tal que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una partició $\mathcal{P}$ (qualsevol, independent dels x_i) de $[a, b]$ i*

$$|S(f, \mathcal{P}) - A| < \varepsilon. \tag{1.4.4}$$

Aleshores, $f \in \mathscr{R}([a, b])$ i $A = \int_a^b f$.

Demostració. Per provar-ho, és suficient provar que en aquesta desigualtat $|S(f, \mathcal{P}) - A| < \varepsilon$ es pot intercanviar $S(f, \mathcal{P})$ per $L(f, \mathcal{P})$ i $U(f, \mathcal{P})$. Aquest reemplaçament és viable quan f és monòtona, ja que

$$\begin{array}{c} m_i = f(t_{i-1}), \\ M_i = f(t_i). \end{array} \tag{1.4.5}$$

o també quan f és contínua, perquè per Weierstrass

$$m_i = f(c_i), M_i = f(d_i), \tag{1.4.6}$$

però en general m_i, M_i no tenen per què assolir-se. No continuarem la demostració ja que per aquest fet resulta molt delicada. ■

Definició 1.4.3 (Norma). S'anomena *norma* de la partició $\mathcal{P}$ a:

$$\|\mathcal{P}\| = \sup_{i=1\div n} (t_i - t_{i-1}). \tag{1.4.7}$$

Corol·lari 1.4.4. *Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fitada. Aleshores,*

$$f \in \mathscr{R}([a, b]) \iff \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \;\Big|\; \|\mathcal{P}\| < \delta \implies |S(f, \mathcal{P}) - A| < \varepsilon. \tag{1.4.8}$$

En cas que això passi, aleshores A és precisament el valor de la integral, $A = \int_a^b f$.

Escollim, com a cas particular, l'interval $[a, b]$ i les particions

$$\mathcal{P}_n = \{a + k\frac{b-a}{n},\ k = 0 \div n\}. \tag{1.4.9}$$

Adonem-nos que $\|P_n\| = \frac{b-a}{n}$. En altres paraules, $\mathcal{P}_n = \{t_0^n, \dots, t_n^n\}$ tal que $t_k^n = a + \frac{b-a}{n}k$ i, per tant:

$$t_1^n - t_{i-1}^n = \frac{b-a}{n} \tag{1.4.10}$$

i els punts són equidistants. Com que $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{P}_n\| = 0$, podem dir que

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f, \mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i)\right) \cdot \frac{b-a}{n} \tag{1.4.11}$$

El valor de la integral no és res més que una mitjana normalitzada amb els extrems de l'interval.

Exemple 1.4.5. Per exemple, si $[a, b] = [0, 1]$, llavors:

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),\ x_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]. \tag{1.4.12}$$

Per tant, fer el càlcul del límit següent resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^4 + kn^3}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2\sqrt{1+\frac{k}{n}}}. \tag{1.4.13}$$

I busquem posar una n al denominador:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{1.4.14}$$

on $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$. Com que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) &\to \int_0^1 f, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) &\to \int_0^1 f. \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

això és:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx. \tag{1.4.16}$$

Exercici 1.4.6. *Calculem*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = A \tag{1.4.17}$$

Resolució. Apliquem logaritme a banda i banda de la igualtat, ho transformem a suma de logaritmes i agafem $f(x) = \log(1+x^2)$:

$$\log A = \lim_{n\to\infty}\log\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$$
$$\Longrightarrow \int_0^1 \log(1+x^2)dx = \log(2) - 2 + \frac{\pi}{2}. \tag{1.4.18}$$

■

II

Integració impròpia

Aquest capítol serà una extensió de l'anterior quan falla alguna de les hipòtesi o, simplement, volem explorar altres casuístiques que es puguin donar. En particular, aplicarem aquest anàlisi a la integrabilitat de Riemann. Queda pendent:

1. $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ fitades,
2. $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fitades,
3. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ no fitades,
4. $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ no fitades.

2.1 INTRODUCCIÓ

Definició 2.1.1 (Localment integrable)**.** Sigui $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Sigui $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Direm que f és localment integrable a $[a, b)$, i escriurem $f \in \mathscr{R}_{loc}([a, b])$, si $f \in \mathscr{R}([a, b])$, si $f \in \mathscr{R}([a, x])$ per a tot $x \in [a, b)$.

Observació 2.1.2. Si $f \in \mathscr{R}([a, b]) \implies f$ fitada a $[a, b]$. En canvi, si $f \in \mathscr{R}_{loc}([a, b])$ es dona si, i només si, $f \in \mathscr{R}([a, x])$ per a tot $x \in [a, b) \implies f$ és fitada a $[a, x], \forall x \in [a, b)$. Així, veiem que no és el mateix, ja que permetem que la fita depengui de x: també podria explotar a mesura que $x \to b$.

Exemple 2.1.3. Per a $f(x) = \frac{1}{1-x}$, f és fitada a $[0, x]$ per a tot $x \in [0, 1)$, però la fita depèn de x: podem dir que f no és localment integrable a l'interval $[0, 2)$.

Definició 2.1.4 (Localment fitada)**.** Una funció localment fitada a $[a, b)$ és una funció fitada a tots els subintervals $[a, x]$, $x \in [a, b)$.

Exemple 2.1.5. Si $f(x)$ és un polinomi, llavors $f \in \mathscr{R}_{loc}([0, +\infty))$. En efecte, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{C}([a, x]) \implies f \in \mathscr{R}([0, x])$.

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és localment integrable, llavors la integral $\int_a^b f$ podria no estar ben definida en el sentit Riemann, ja que f podria no ser fitada a $[a, b)$, però sabem què és $\int_a^x f$ per a cada $x \in [a, b)$. Per tant, es podria optar per definir a tot l'interval fent servir la següent notació:

$$\int_a^b f := \lim_{x \to b^-} \int_a^x f. \tag{2.1.1}$$

Definició 2.1.6 (Integrabilitat Riemann d'un interval semiobert)**.** Sigui $f \in [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{R}_{loc}([a, b))$. Es diu que f és integrable Riemann a $[a, b)$ i escriurem $f \in \mathscr{R}([a, b))$ si el límit per l'esquerra:

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f \tag{2.1.2}$$

existeix i és finit. Quan això passi, direm que $\int_a^b f$ és una integral impròpia convergent i el seu valor és

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f \tag{2.1.3}$$

Si el límit no existeix, direm que $\int_a^b f$ és una integral impròpia divergent. Anàlogament, $f \in \mathscr{R}_{loc}((a,b])$ si $f \in \mathscr{R}([x,b])$ per a tot $x \in (a,b]$. Quan això passa, $\int_a^b f$ es diu impròpia quan $x \to a$ i

$$\int_a^b f = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f. \tag{2.1.4}$$

Observació 2.1.7. Si és una integral impròpia divergent, ho serà o bé perquè el límit oscil·la, o bé perquè aquest explota. També s'acostuma a dir que la integral $\int_a^b f$ és impròpia quan $x \to b$, o que té una singularitat al punt b.

Exemple 2.1.8. Es donarà que $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ és impròpia quan $x \to 1$ donat que $\frac{1}{1-x} \in \mathcal{C}([0,1))$. Així, la singularitat estarà a l'extrem i serà el punt on es perd integrabilitat local:

$$\mathcal{C}([0,x]), \forall x < 1 \implies \mathscr{R}([0,x]) \forall x < 1, \implies \mathscr{R}_{loc}([0,1)). \tag{2.1.5}$$

Exemple 2.1.9. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ és impròpia quan $x \to 1$ i $x \to -1$.

Definició 2.1.10 (Integrabilitat local d'un interval obert)**.** Donada una funció $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, direm que f és localment integrable a (a,b), i escriurem $f \in \mathscr{R}_{loc}((a,b))$ si $f \in \mathscr{R}([c,d])$ per a tot interval tancat $[c,d] \subset (a,b)$. Direm que $\int_a^b$ és convergent si existeix un nombre $y \in (a,b)$ tal que les dues integrals impròpies

$$\int_a^y f(t)dt, \quad \int_y^b f(t)dt \tag{2.1.6}$$

són convergents. En tal cas, definirem:

$$\int_a^b f = \int_a^y f + \int_y^b f. \tag{2.1.7}$$

Exemple 2.1.11. Els polinomis són funcions localment integrables a $\mathbb{R}$. De fet, tota funció contínua a $\mathbb{R}$ hi és localment integrable. En canvi, la funció $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ no és localment integrable a $(1, +\infty)$ i, per tant, si volguéssim analitzar la integral estaríem obligats a partir-la en trossos en els quals tinguéssim la integrabilitat local assegurada: $[1,2), (2,3], [3,+\infty)$.

Definició 2.1.12 (Integrabilitat Riemann d'un interval obert)**.** Direm que $f \in \mathscr{R}((a,b))$ si existeix algun punt $t \in (a,b)$ tal que $f \in \mathscr{R}((a,t])$ i $f \in \mathscr{R}([t,b))$:

$$\int_a^b f = \int_a^t f + \int_t^b f, \tag{2.1.8}$$

on la primera és impròpia quan $x \to a$ i la segona ho és quan $x \to b$. Si $\exists t \in (a,b)$, aleshores tot $t \in (a,b)$ va bé. En altres paraules, quan això passa, la integral $\int_a^b f$ és independent de t.

Exemple 2.1.13. Agafem $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Aleshores, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{C}((0,1])$. Acabem deduint que $f \in \mathscr{R}_{loc}((0,1])$ i, doncs, $\int_0^1 f$ és impròpia a $x \to 0^+$. Per decidir si $\int_0^1$ convergeix,

$$\int_0^1 f = \lim_{x \to 0^+} \int_x^1 f = \lim_{x \to 0} \int_x^1 f(t)dt = \lim_{x \to 0} \int_x^1 t^{-\frac{1}{2}} dt = 2. \tag{2.1.9}$$

Exercici 2.1.14. *Considerem la funció* $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida per* $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$. *Trobeu quins valors d'α garanteixen que f és integrable Riemann.*

Resolució. Cas per cas, podem procedir:

1. Si $\alpha \leq 0$, aleshores $f \in \mathcal{C}([0,1])$ i, per tant, $f \in \mathscr{R}([0,1])$.
2. Si $\alpha > 0$, llavors f no està definida a $x = 0$ i tampoc està fitada a $(0,1]$. Com que $f \in \mathcal{C}([x,1])$ per a tot $x \in (0,1]$, deduïm que f és localment integrable a $(0,1]$ i, a més:
$$\lim_{x\to 0} \int_x^1 f(t)dt = \lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases} \tag{2.1.10}$$
de manera que la integral $\int_0^1 f$ és impròpia a $x = 0$ i $f \in \mathscr{R}(0,1])$ si, i només si, $0 < \alpha < 1$, i la integral convergeix. Per a $\alpha \geq 1$ és una integral impròpia divergent.

■

Exemple 2.1.15. Resoleu:
$$\int_0^1 \log \frac{1}{x} dx. \tag{2.1.11}$$

Resolució. Es té $f(x) = \log \frac{1}{x}$, i $f \in \mathcal{C}((0,1]) \implies f \in \mathscr{R}_{loc}((0,1])$, així que podem aplicar el procediment habitual i
$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \log \frac{1}{t} dt = \lim_{x\to 0+} \left(\left[t \log \frac{1}{t} \right]_x^1 + \int_x^1 t \frac{1}{t} dt \right) = 1. \tag{2.1.12}$$

Com l'assímptota logarítmica va per sobre de la potencial i l'àrea de la potencial és finita, per força l'àrea de la logarítmica també serà finita. ■

Observació 2.1.16. Fixem-nos que si $f \in \mathscr{R}_{loc}([a,b))$, aleshores $F(x) = \int_a^x f$ té sentit. De fet, per tal que $\int_a^b f$ sigui convergent, és necessari i suficient que existeixi el límit següent:
$$\lim_{x\to b^-} F(x). \tag{2.1.13}$$

Adonem-nos que $F \in \mathcal{C}([a,b))$ (estem demanant que tingui límit a la frontera).

Exemple 2.1.17. Resolgueu la següent integral:
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}. \tag{2.1.14}$$

Resolució. Tenim $f(x) = \frac{1}{x^2-1} \in \mathcal{C}([2,+\infty)) \implies f \in \mathscr{R}_{loc}([2,+\infty))$, de tal manera que $\int_2^\infty f$ és impròpia quan $x \to +\infty$. En conseqüència:
$$\begin{aligned} \int_2^\infty f = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x f &= \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t^2-1} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \log(x-1) - \frac{1}{2} \log(x+1) + \frac{1}{2} \log 3 = \frac{\log 3}{2}. \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

■

Exercici 2.1.18. *Resoleu:*

$$\int_0^1 |\log x| dx. \tag{2.1.16}$$

Demostració. La primitiva F es determina per $f(x) = -\log x$ i

$$F(x) = \int -\log x dx = -x \log x + x. \tag{2.1.17}$$

Aplicant la definició,

$$\lim_{y\to 0} \int_y^1 |\log x| dx = \lim_{y\to 0} \int_y^1 -\log x dx = \lim_{y\to 0} -x\log x + x \Big]_y^1 = 1 + \lim_{y\to 0} \frac{\log y}{\frac{1}{y}} = 1 + \frac{\infty}{\infty}. \tag{2.1.18}$$

Aplicant l'Hôpital:

$$1 + \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}} = 1. \tag{2.1.19}$$

■

Exercici 2.1.19. *Resoleu:*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} - x} dx. \tag{2.1.20}$$

Demostració. Dividim els intervals d'integració tenint en compte les discontinuïtats en el domini:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x} - x} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} - x} dx = \lim_{y\to 0} \int_y^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x} - x} dx + \lim_{y\to 1} \int_{\frac{1}{2}}^y \frac{1}{\sqrt{x} - x} dx. \tag{2.1.21}$$

Per al càlcul de la primitiva agafem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-x}$ i $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}-x} dx = -2\log(1 - x\sqrt{x})$. Aleshores:

$$\lim_{y\to 0} 2\log\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + 2\log(1-\sqrt{y}) + \lim_{y\to 1} -2\log(1-\sqrt{y}) + 2\log\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = +\infty. \tag{2.1.22}$$

■

Exercici 2.1.20. *Resoleu:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{|x^2 - 2|} dx. \tag{2.1.23}$$

Demostració. Agafem $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$. Podem calcular la seva primitiva i ens dona:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2 - 2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log(x - \sqrt{2}) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log(x + \sqrt{2}). \tag{2.1.24}$$

Ara podem procedir: dividir amb els intervals adequats per considerar els signes i resoldre la integral, de la següent manera:

$$\begin{gathered}\int_0^{+\infty} \frac{1}{|x^2 - 2|} dx = \int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx + \int_{\sqrt{2}}^3 f(x)dx + \int_3^{+\infty} f(x)dx \\ = \lim_{y\to\sqrt{2}} \int_0^y -f(x)dx + \lim_{y\to\sqrt{2}} \int_y^3 f(x)dx + \lim_{y\to+\infty} \int_3^y f(x)dx = +\infty \implies \text{divergeix.}\end{gathered} \tag{2.1.25}$$

■

Exercici 2.1.21. *Resoleu:*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx. \tag{2.1.26}$$

Demostració. Podem agafar $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ i calculem la seva primitiva:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \left\{\begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ 2t \cdot dt = dx \end{matrix}\right\} = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\arcsin(t) = 2\arcsin(\sqrt{x}). \tag{2.1.27}$$

Dividim en les diferents discontinuïtats:

1. Calculem lim a mesura que $y \to 0$:

$$\lim_{y\to 0}\int_y^2 f(x)dx = \lim_{y\to 0} 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) - 2\arcsin(\sqrt{y}) = 0. \tag{2.1.28}$$

2. Calculem lim a mesura que $y \to 1$:

$$\lim_{y\to 1} 2\arcsin(\sqrt{y}) - 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 2\frac{\pi}{2} = \pi. \tag{2.1.29}$$

Cal fer la suma dels dos components: $0 + \pi = \pi$. Amb això, ja hem acabat. ■

2.2 Models d'integració

Per mesurar la magnitud de les singularitats, cal disposar de models. Introduirem alguns dels models a continuació.

2.2.1 Model exponencial

Es tracta d'una integral impròpia a l'infinit.

$$\int_1^{+\infty} a^x dx,\ 0 < a < 1. \tag{2.2.1}$$

Fixem $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \longmapsto f(x) := a^x$. Aleshores, $f \in \mathcal{C}([1, +\infty)) \implies f \in \mathscr{R}_{loc}([1, +\infty))$ i $\int_1^x f$ està ben definida per tot x del domini. Ara cal veure si convergeix:

Proposició 2.2.1. *El model exponencial definit per* (2.2.1) *convergeix.*

Demostració. Tenim que:

$$\int_1^{+\infty} = \lim_{x\to\infty}\int_1^x f = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{a^t}{\log a}\right]_1^x = \frac{-a}{\log a} > 0, \tag{2.2.2}$$

de manera que $\int_1^{+\infty}$ convergeix. ■

2.2.2 Model potencial

Exemple 2.2.2. Donada $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, agafem $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ i $x \in [1, \infty)$. Aleshores, $f \in \mathcal{C}([1, +\infty)) \implies f \in \mathscr{R}_{loc}([1, +\infty))$ i la integral és impròpia quan $x \to +\infty$. Així:

$$\begin{gathered}\int_1^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x f = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-\alpha} dt \\ = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \ \alpha > 1; \\ \infty, \ \alpha < 1. \end{cases} \\ \lim_{x\to\infty} [\log t]_1^x = \lim_{x\to\infty} (\log x - 0) = +\infty, \ \alpha = 1. \end{cases}\end{gathered} \tag{2.2.3}$$

Exemple 2.2.3 (Model potencial al 0). Agafem $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ i $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Ara, $x \in (0, 1]$. Aleshores, $f \in \mathcal{C}((0, 1]) \implies f \in \mathscr{R}_{loc}((0, 1])$. La integral és impròpia quan $x \to 0^+$.

$$\begin{gathered}\int_0^1 f = \lim_{x\to0^+} \int_x^1 t^{-\alpha} dt \\ \begin{cases} \lim_{x\to0^+} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} +\infty, \ \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, \ \alpha < 1. \end{cases} \\ \lim_{x\to0^+} [\log t]_x^1 = \lim_{x\to0+} (-\log x) = +\infty, \ \alpha = 1. \end{cases}\end{gathered} \tag{2.2.4}$$

Els casos interessants són quan $\alpha > 0$.

Exemple 2.2.4 (Model potencial al punt). Hem de decidir si volem aproximar per l'esquerra o per la dreta. Es destaca el límit de la singularitat i podem agafar un límit d'integració qualsevol, que s'adapti a la casuística del nostre problema. Aplicarem l'exemple anterior, del model potencial al 0.

1. Posem $x \to a^+$. Aleshores:

$$\int_a \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ell \ll \infty, \ \alpha < 1, \\ +\infty, \ \alpha \geq 1. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

2. Ara, $x \to a^-$. Apliquem un procediment anàleg:

$$\int_{a-1}^a \frac{dx}{(a-x)^\alpha} = \int_1^0 \frac{-dt}{t^\alpha} = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ell \ll \infty, \ \alpha < 1, \\ +\infty, \ \alpha \geq 1. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Exemple 2.2.5. Tractarem $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Ara, $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \implies f \in \mathcal{C}((-\infty, +\infty)) \implies f \in \mathscr{R}_{loc}(\mathbb{R})$ i $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ és impròpia quan $x \to -\infty$ i $x \to +\infty$. Com es pot veure, cal tractar cada singularitat individualment.

$$\begin{gathered}\int_c^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_c^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} [\arctan t]_c^x = \lim_{x\to+\infty} (\arctan x - \arctan c) = \frac{\pi}{2} - \arctan(c). \\ \int_{-\infty}^c f = \lim_{x\to-\infty} \int_x^c \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to-\infty} [\arctan t]_x^c = \lim_{x\to-\infty} (\arctan c - \arctan x) = \arctan(c) - \frac{\pi}{2}.\end{gathered} \tag{2.2.7}$$

En conseqüència, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ també és convergent, i:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{y} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{-\infty}^{c} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(c) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \arctan(c) = \pi. \tag{2.2.8}$$

Exemple 2.2.6. Ara tractarem $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^2-3x+2}dx$ i $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2} \in \mathcal{C}([0,+\infty) \setminus \{1,2\})$. Ara, $f \in \mathscr{R}_{loc}([0,1))$, $f \in \mathscr{R}_{loc}((1,2))$, $f \in \mathscr{R}_{loc}((2,+\infty))$ i és impròpia a $x \to +\infty$ i $x \to 1,2$. Per tant:

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{1,5} + \int_{1,5}^2 + \int_2^3 + \int_3^{+\infty}. \tag{2.2.9}$$

Petit detall: si agafem $g(x) = \frac{1}{x-2}$, tenim que $g = f$ excepte en un nombre finit de punts, $\{1,2\}$, i, per tant, la seva integral és la mateixa.

2.3 Teorema de Cauchy

Teorema 2.3.1 (Teorema de Cauchy). *Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ totalment integrable. Aleshores,*

$$\int_a^b f \text{ convergeix} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists c \in (a,b) \mid \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| < \varepsilon,\ (x_1,x_2) \subset (c,b). \tag{2.3.1}$$

Demostració. Sigui $F(x) = \int_a^x f$. F està ben definida a $[a,b)$ tot i que podria no ser-hi fitada. De fet, volem veure si existeix $\lim_{x\to b^-} F(x)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Com que per hipòtesi, existeix $\lim_{x\to b^-} F(x) = \ell$, donat $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que

$$x \in (b-\delta, b) \implies |F(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3.2}$$

Si $b - \delta < x < b$. En particular, si $x_1, x_2 \in (b-\delta, b)$, aleshores:

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \leq |F(x_2) - \ell| + |F(x_1) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.3.3}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Suposem que $\forall \varepsilon > 0$ existeix $c \in (a,b)$ tal que $|\int_{x_1}^{x_2} f| < \varepsilon$ si $c < x_1 < x_2 < b$. Volem provar que $\exists \lim_{x\to b^-} F(x)$. Sigui $(x_n)_n \subset (a,b)$ tal que $(x_n)_n \to b$. Si n és prou gran, com que la successió tendeix a b, la successió es trobarà acotada en l'interval (c,b). Per tant, si n, m són prou grans:

$$|F(x_n) - F(x_m)| = \left| \int_{x_n}^{x_m} f \right| < \varepsilon \tag{2.3.4}$$

i, per tant, $(F(x_n))_n$ és successió de Cauchy. Una propietat de les successions de Cauchy és que $\exists \ell = \lim_{n\to+\infty} F(x_n)$. Si agafem una altra successió $(x'_n) \subset (a,b)$ i $(x'_n)_n \to b$ aleshores, $(F(x'_n))_n$ també és de Cauchy. Per tant, $\exists \ell' = \lim_{n\to+\infty} F(x'_n)$.

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - F(x_n)| + |F(x_n) - F(x'_m)| + |F(x'_m) - \ell'|, \tag{2.3.5}$$

on $|\ell - F(x_n)|$ és petit ja que $F(x_n) \to \ell$, $|F(x_n) - F(x'_m)|$ ho és perquè és igual a $\int_{x_n}^{x'_n} f$ i si n gran, llavors $x_n, x'_n \in (c,b)$. Finalment, $|F(x'_m) - \ell'|$ ho és a causa que $F(x'_n) \to \ell'$. Aleshores, el límit ℓ no depèn de la successió $(x_n) \to b$ i, per tant, F té límit ℓ quan $x \to b^-$. Això és equivalent a la convergència de la integral.

■

Corol·lari 2.3.2. *Sigui $f \in \mathscr{R}_{loc}([a,b))$, $b \in \mathbb{R}$ i finita i f fitada. Aleshores, $f \in \mathscr{R}([a,b))$, és a dir, $\int_a^b f$ és convergent.*

Demostració. Si f és fitada, aleshores $\exists k \mid |f(x)| \leq k,\ \forall x \in [a,b)$. En conseqüència:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f| \leq \int_{x_1}^{x_2} k = k|x_1 - x_2|. \tag{2.3.6}$$

Per tant, si escollim $c \in (b - \frac{\varepsilon}{k}, b)$, aleshores per tot $x_1, x_2 \in (c, b)$ tenim

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \leq k|x_1 - x_2| < k(b-c) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon. \tag{2.3.7}$$

■

Proposició 2.3.3. *Siguin $f, g \in \mathscr{R}_{loc}([a,b))$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $f, g \in \mathscr{R}([a,b))$, llavors $\lambda f + \mu g \in \mathscr{R}([a,b))$ i*

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g. \tag{2.3.8}$$

Demostració. Si f, g són integrables Riemann a tot interval $[a,x]$ llavors també ho és $\lambda f + \mu g$. A més, la linealitat de la integral garanteix que la igualtat:

$$\int_a^x (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^x f + \mu \int_a^x g \tag{2.3.9}$$

sigui una igualtat d'integrals de Riemann en el sentit usual (no impròpies). Si ara afegim la hipòtesi que $f, g \in \mathscr{R}([a,b))$ aleshores els límits de $\int_a^x f$ i $\int_a^x g$ quan $x \to b$ existeixen i són finits, i per linealitat del límit deduïm que també $\int_a^x (\lambda f + \mu g)$ té límit finit quan $x \to b$. La igualtat

$$\lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \tag{2.3.10}$$

és, doncs, conseqüència de la igualtat dels límits. ■

2.4 Criteris de convergència

De la definició de $f \in \mathscr{R}([a,b))$ sabem que la convergència de $\int_a^b f$ és equivalent a demanar que tota primitiva F de f tingui límit finit quan $x \to b$. En el cas de funcions $f \geq 0$, l'existència de límit pot relaxar-se significativament. En efecte, si $f \in \mathscr{R}_{loc}([a,b))$ amb $f \geq 0$, aleshores $F(x) = \int_a^x f$ és creixent.

Teorema 2.4.1. *Si $f \in \mathscr{R}_{loc}([a,b))$, tal que $f \geq 0$ en aquest interval, aleshores*

$$f \in \mathscr{R}([a,b)) \iff F \text{ fitada a } [a,b). \tag{2.4.1}$$

Demostració. Suposem que $f \in \mathscr{R}([a,b))$. Aleshores, el límit $\lim_{x\to b} F(x)$ existeix i és finit. Com f és integrable a tot interval $[a,x]$, això també garanteix que F és contínua a $[a,b)$. D'altra banda, com $f \geq 0$, deduïm que F és creixent a $[a,b)$. Si F és contínua i creixent a $[a,b)$, i té límit quan $x \to b^-$, necessàriament F ha de ser fitada. Suposem que F és fitada a $[a,b)$. Com que F és creixent, el límit $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existeix i, per tant, la integral impròpia $\int_a^b f$ és convergent. ■

Observació 2.4.2. Si $f \geq 0$ només hi ha dues situacions viables:

1. $\int_a^b f$ convergeix o bé
2. $\int_a^b f$ divergeix (a causa d'oscil·lacions).

Per tant, si una funció és positiva $f \geq 0$, aleshores: $\int_a^b f \ll +\infty$ (convergeix) o bé $\int_a^b f = +\infty$ (divergeix). Més endavant matisarem lleugerament aquesta notació.

2.4.1 Criteri de comparació per desigualtat

Teorema 2.4.3 (Criteri de comparació per desigualtat). *Siguin $f, g : [a, b) \longrightarrow [0, +\infty)$ localment integrables. Suposem que $\exists k \geq 0$ i $c \in [a, b)$ tal que $f(x) \leq k \cdot g(x)$, $\forall x \in [c, b)$. Aleshores:*

$$\int_a^b g \ll +\infty \implies \int_a^b f \ll +\infty. \tag{2.4.2}$$

Demostració. La demostració passa per agafar les primitives $F(x) = \int_c^x f$ i $G(x) = \int_c^x g$ i utilitzarem la convergència per separat:

$$\begin{aligned} \int_a^b f \ll +\infty &\iff \int_c^b f \ll +\infty \iff F \text{ fitada}, \\ \int_a^b g \ll +\infty &\iff \int_c^b g \ll +\infty \iff G \text{ fitada}. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Si $\int_a^b g$ és convergent, llavors també $\int_c^b g$ també convergeix i, per tant, G és fitada a $[c, b)$. La desigualtat $f(x) \leq k \cdot g(x)$ garanteix que $F \leq kG$ a $[c, b)$ i, per tant, també F és fitada a $[c, b)$. Novament, tenim que $\int_c^b f$ convergeix, i com f és localment integrable a $[a, b)$, també la integral $\int_a^b f$ és convergent. ■

Exemple 2.4.4. Agafem $\int_0^1 \frac{dx}{x^7+3x^2}$. Agafem $f = \frac{1}{x^7+3x^2}$ i $g = \frac{1}{3x^2}$. Evidentment, $0 \leq f \leq g$. Hem de trobar una majorant g que integri: si la hipòtesi és falsa la nostra conclusió serà buida i no es complirà que $\int_0^1 g < \infty \implies \int_0^1 f < \infty$. Sent una mica més curosos podem trobar:

$$0 \leq \frac{1}{3x^2} \leq \frac{K}{3x^2 + x^7} \xrightarrow[3x^2+x^7 \leq 3x^2+x^2]{x^7 \leq 3x^2, \forall x \in (0,1)} 0 \leq \frac{1}{3x^2} \leq \frac{4}{3} \frac{1}{x^7 + 3x^2}. \tag{2.4.4}$$

Observació 2.4.5. El contrarrecíproc ens dona la següent implicació:

$$\int_a^b = +\infty \implies \int_a^b g = +\infty. \tag{2.4.5}$$

2.4.2 Criteri de comparació per pas al límit

En el criteri de comparació per pas al límit intentarem reemplaçar $f \leq k \cdot g$ per $\lim_{x \to b} \frac{f}{g}$.

Teorema 2.4.6 (Criteri de comparació per pas al límit). *Siguin $f, g : [a, b) \longrightarrow [0, +\infty)$ tals que $\in \mathscr{R}_{loc}([a, b))$ i $f, g \geq 0$. Suposem que el límit $A = \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ és $A \in [0, +\infty]$, és a dir, que A pot ser infinit però no contemplarem el cas d'oscil·lacions infinites. Sigui com sigui, es dona el següent:*

1. *Si $A = 0$, $\int_a^b g \ll +\infty \implies \int_a^b f \ll +\infty$.*
2. *Si $A = +\infty$, $\int_a^b f \ll +\infty \implies \int_a^b g \ll +\infty$.*

3. *Si $A \in (0,+\infty)$, $\int_a^b f \ll +\infty \iff \int_a^b g \ll +\infty$.*

Demostració. Dividirem la prova en els tres apartats del teorema:

1. Per hipòtesi, donat $\varepsilon > 0$, $\exists c \in (a,b)$ tal que

$$c < x < b \implies \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon. \tag{2.4.6}$$

Per tant, com $f, g \geq 0$, $f(x) \leq \varepsilon \cdot g(x)$, si $c < x < b$. Per tant, podem aplicar el criteri de comparació per desigualtat i obtenir la implicació:

$$\int_a^b g \ll +\infty \implies \int_a^b f \ll +\infty. \tag{2.4.7}$$

2. Canviem f per g i g per f i apliquem el primer apartat de manera totalment anàloga. Només cal observar que $\lim_{x\to b} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, per la qual cosa es dedueix que $\exists c \in (a,b)$ tal que $g(x) \leq \varepsilon \cdot f(x)$ si $x \in (c,b)$, d'on $\int_c^b f \ll +\infty$ implica que $\int_c^b g \ll +\infty$.
3. Donat $\varepsilon > 0$ $\exists c \in (a,b)$ tal que:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon \iff A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon. \tag{2.4.8}$$

Si multipliquem per $g \geq 0$,

$$(A-\varepsilon)g < f < (A+\varepsilon)g. \tag{2.4.9}$$

Pel criteri de comparació, $\int_c^b f$ i $\int_c^b g$ convergeixen simultàniament.

■

Exercici 2.4.7. *Determineu el caràcter convergent de la integral*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3+7}{x^4+3x^2+10}dx. \tag{2.4.10}$$

Demostració. L'integrant $f(x) = \frac{x^3+7}{x^4+3x^2+10}$ és continu a $[0,+\infty)$ i, per tant, hi és localment integrable; la integral només és impròpia a $+\infty$. Si volem aplicar el criteri de comparació per pas al límit, cal trobar una funció $g : [0,+\infty)$ tal que el caràcter de $\int_0^{+\infty} g$ sigui conegut i, a més, el límit $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g}$ tingui un valor real positiu i finit. Per exemple, si prenem $g(x) = \frac{1}{x}$ tenim que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{2.4.11}$$

i, per tant, podríem estar temptats d'usar el tercer punt del criteri de comparació per pas al límit. En contrapartida, la integral $\int_0^{+\infty} g$ no té sentit, donat que no només és impròpia a $+\infty$, sinó que també ho és al 0. No podem aplicar el criteri de comparació per pas al límit directament: hem de canviar o bé la funció g o bé l'interval. El que farem és canviar l'interval de la comparació a un interval que no inclogui la singularitat que g té al zero. Per exemple, a $[1,+\infty)$ sí que podem aplicar el tercer punt del criteri de comparació per pas al límit i deduir que $\int_1^{+\infty} f$ i $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ tenen el mateix caràcter. Com que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$, deduïm també que $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+7}{x^4+3x^2+10}dx$ divergeix. En conseqüència, també $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+7}{x^4+3x^2+10}dx$ divergeix. ■

Exemple 2.4.8. Posem $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-x}$. Agafem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-x} \in \mathscr{R}_{loc}((0,1))$ i hi ha una singularitat a $x \to 0^+$ i $x \to 1^-$. Quan $f \geq 0$, podem aplicar tant el criteri de comparació per desigualtat com el criteri per comparació del límit.

$\boxed{x \to 0^+}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}-x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}-x}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = 1,$$

on $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) \implies \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}})$. Aleshores, aplicant el criteri de comparació per desigualtat:

$$\int_0 f \ll \infty \iff \int_0 \frac{dx}{\sqrt{x}} \ll \infty.$$

Aleshores, $\int_0 f \ll \infty$.

$\boxed{x \to 1^-}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}-x}}{\frac{1}{(1-x)^\alpha}},$$

on $\frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{x}-x} = \frac{-\alpha(1-x)^{\alpha-1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}-1}} = 2$. Hem deduït primerament que $\alpha > 0$ i, posteriorment $\alpha = 1$. Aleshores, pel criteri de comparació per al límit:

$$\int^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-x} \ll \infty \iff \int^1 \frac{dx}{1-x} \ll \infty$$

Aleshores, $\int^1 f = \infty$.

Exemple 2.4.9. Posem $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^3+x^5)^{\frac{1}{3}}}$ i agafem $f(x) = \frac{1}{(x^3+x^5)^{\frac{1}{3}}} \in \mathscr{R}_{loc}((0,+\infty))$, de manera que és una integral impròpia i té següents singularitats en $x \to 0^+$ i $x \to +\infty$. Com que $f \geq 0$, podem usar el criteri de comparació per límits.

1. Per a $x \to 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{(x^3+x^5)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} = 1. \tag{2.4.12}$$

   Com $\int_0 \frac{1}{x} = +\infty$, també $\int_0 f = +\infty$.

2. Quan $x \to +\infty$, passa el següent:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{(x^3+x^5)^{\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}} = 1. \tag{2.4.13}$$

   Com $\int^\infty \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}} \ll \infty$, també $\int^\infty f \ll \infty$.

Exemple 2.4.10. Ara posem $\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{(x^4+x^5)^{\frac{1}{3}}} dx$ i agafem $f(x) = \frac{\log(1+x)}{(x^4+x^5)^{\frac{1}{3}}}$ i veiem que $f \in \mathscr{R}_{loc}((0,+\infty))$, estudiem singularitats a $x \to 0^+$ i $x \to +\infty$. Com que $f \geq 0$, podem aplicar el criteri de comparació per límits.

$$\frac{\log(1+x)}{(x^4+x^5)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\log(1+x)}{x^{\frac{4}{3}}(1+x)^{\frac{1}{3}}}. \tag{2.4.14}$$

Com abans, hem de dividir en funció de les singularitats que tenim:

1. $x \to 0^+$: per a valors propers al 0, es dona que $\log(1+x) \approx x$ i $(1+x)^{\frac{1}{3}} \approx 1$. Aleshores:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{x}{x^{\frac{4}{3}}\cdot 1}} = 1. \tag{2.4.15}$$

   Tornem a raonar la conclusió del criteri aplicat: com $\int_0 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} \ll \infty$, també $\int_0 f \ll \infty$.

2. $x \to +\infty$: per a valors propers al $+\infty$, es dona que $\log(1+x) \approx ?$ i $(1+x)^{\frac{1}{3}} \approx x^{\frac{1}{3}}$. Aleshores, quan $x \to a$:

$$g \approx h: \quad \lim_{x \to a} \frac{g}{h} \in (0, +\infty). \tag{2.4.16}$$

Ara bé, recordem el valor desconegut ?:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}} = \infty, \tag{2.4.17}$$

on hem aplicat que:

$$\begin{aligned} \int^{\infty} f \ll \infty &\implies \int^{\infty} \tfrac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}, \\ \int^{\infty} = \infty &\impliedby \int^{\infty} \tfrac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}. \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Suposem un $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\frac{5}{3}+\varepsilon}}} = \lim_{x \to \infty} x^{\varepsilon} \log(1+x) = \infty. \tag{2.4.19}$$

Seguim amb el mateix problema. Fem la resta en lloc de la suma:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\frac{5}{3}-\varepsilon}}} = \lim_{x \to \infty} x^{-\varepsilon} \log(1+x) = 0. \tag{2.4.20}$$

Tornem a raonar la conclusió del criteri aplicat: com $\int^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}-\varepsilon}} \ll \infty$, també $\int^{\infty} f \ll \infty$. Per tant, $\int^{\infty} \ll \infty$. Hauríem de vigilar per a $0 < \varepsilon < \frac{2}{3}$.

Exemple 2.4.11. Suposem $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{(x^8+x^7)^{\frac{1}{3}}} dx$ i agafem $f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{(x^8+x^7)^{\frac{1}{3}}}$ de manera que $f(x) \in \mathscr{R}_{loc}((0,+\infty))$ i serà impròpia quan $x \to 0^+$ i $x \to +\infty$. Com que $f \geq 0$, podem utilitzar el criteri de comparació amb pas al límit.

1. $x \to 0^+$: $\log(1+x^2) \approx x^2$ i $(x^8+x^7) \approx x^{\frac{7}{3}}$. Així:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{x^2}{x^{\frac{7}{3}}}} = 1. \tag{2.4.21}$$

Apliquem la conclusió del criteri de comparació amb pas al límit:

$$\int_0 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} \ll \infty \implies \int_0 f \ll \infty \implies \int_0 f \ll \infty. \tag{2.4.22}$$

2. $x \to +\infty$: quan x tendeix a infinit positiu, $\log(1+x^2) \approx \log(x)$ i $(x^8+x^7)^{\frac{1}{3}} \approx x^{\frac{8}{3}}$. Aleshores:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\frac{8}{3}-\varepsilon}}} = 0 \implies \int^{\infty} f \ll \infty. \tag{2.4.23}$$

Exemple 2.4.12. Sigui

$$\int_0^{\pi} = \frac{1-\cos(x)}{x^2 \sqrt{\sin(x)} \sqrt[3]{\cos^2(x)}} dx. \tag{2.4.24}$$

Sigui $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2 \sqrt{\sin(x)} \sqrt[3]{\cos^2(x)}}$. Es veu que $f \in \mathscr{R}_{loc}((0, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \pi))$ i tenim quatre singularitats: $x \to 0^+$, $x \to \frac{\pi}{2}^-$, $x \to \frac{\pi}{2}^+$, $x \to \pi^-$. Dividim la nostra demostració en aquestes singularitats:

1. $x \to 0^+$: per a aquests valors de x, $1-\cos(x) \approx \frac{x^2}{2}$, $\sqrt{\sin(x)} \approx x^{\frac{1}{2}}$ i $\sqrt[3]{\cos^2(x)} \approx 1$. Calculem el límit del quocient amb el criteri de potències:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot 1}} = 1 \implies \int_0 f \ll \infty. \tag{2.4.25}$$

2. $x \to \frac{\pi}{2}^-$: per a aquests valors de x, $1-\cos(x) \approx 1$ i $x^2 \approx \frac{\pi}{2}^2$, $\sqrt{\sin(x)} \approx 1$ i $\sqrt[3]{\cos^2(x)} \approx (\frac{\pi}{2}-x)^{\frac{2}{3}}$. Ara:

$$\frac{\cos(x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\gamma}} = \frac{-\sin(x)}{-\gamma\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\gamma-1}} = 1, \tag{2.4.26}$$

on hem deduït primerament que $\gamma > 0$ i, posteriorment, $\gamma = 1$ en funció dels valors que pot prendre el resultat. En qualsevol cas,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos(x)}{\frac{\pi}{2}-x} = 1. \tag{2.4.27}$$

Finalment:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\frac{2}{3}}} = 1 \implies \int^{\frac{\pi}{2}} f \ll \infty \iff \int^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\frac{2}{3}}} \ll \infty. \tag{2.4.28}$$

3. $x \to \frac{\pi}{2}^+$ es deixa com a exercici.
4. $x \to \pi$: per a aquests valors de x, $1-\cos(x) \approx 2$, $x^2 \approx \pi^2$, $\sqrt[3]{\cos^2(x)} \approx 1$ i $\sqrt{\sin(x)} \approx \sqrt{\pi - x}$. Com que $f \geq 0$, podem aplicar el criteri de comparació de pas al límit. Analitzem el límit:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{(\pi-x)^{\frac{1}{2}}}} = C \neq 0,\infty \implies \int^{\infty} f \ll \infty. \tag{2.4.29}$$

Exercici 2.4.13. *Determineu el resultat de la següent expressió:*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(x-\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right))^{\beta}}. \tag{2.4.30}$$

Resolució. Agafem $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}(x-\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right))^{\beta}}$, $f \in \mathscr{R}_{loc}((1,+\infty))$ i és impròpia quan $x \to 1^+$ i $x \to +\infty$. Com que $f \geq 0$, podem aplicar el criteri de comparació de pas al límit.

1. $x \to 1^+$: tinguem en compte que per aquests valors de x ens queda que $x - \sin\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right) \approx x$. Ara, hem de resoldre el límit:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\beta}} = 1, \tag{2.4.31}$$

que ho hem deduït de:

$$\lim_{x\to 1} = \left(\frac{x-\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}{(x-1)^{\gamma}}\right)^{\beta} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}{\gamma(x-1)^{\gamma-1}} = 1, \tag{2.4.32}$$

on primerament veiem que $\gamma > 0$ i, finalment, $\gamma = 1$. Per tant:

$$\int_1 f \ll \infty \iff \int_1 \frac{dx}{(x-1)^{\beta}} \ll \infty \iff \beta < 1. \tag{2.4.33}$$

2. $x \to +\infty$: resolem directament el límit:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha \cdot x^\beta}} = 1 \implies \int^\infty \frac{dx}{x^{\alpha+\beta}} \ll \infty \iff \alpha+\beta > 1. \tag{2.4.34}$$

■

Exercici 2.4.14. *Resoleu:*

$$\int_0^\infty (1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})x^\alpha dx. \tag{2.4.35}$$

Resolució. Agafem $f(x) = (1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})x^\alpha \in \mathscr{R}_{loc}((0,+\infty))$, per a tot α. És impròpia només si $x \to 0^+$ i $x \to +\infty$. Com que $f \geq 0$, podem aplicar el criteri de comparació de pas al límit.

1. $x \to 0$: tinguem en compte que per aquests valors de x ens queda que $(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) \approx 1$. Aleshores:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{-\alpha}}} = 1 \implies \int_0 f \ll \infty \iff \alpha > -1. \tag{2.4.36}$$

2. $x \to +\infty$: tinguem en compte que per aquests valors de x ens queda que $x^\alpha \approx x^\alpha$ i $1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \approx \frac{1}{\sqrt{x}}$. Finalment:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{-\alpha+\frac{1}{2}}}} = c \implies \int^\infty f \ll \infty \iff -\alpha+\frac{1}{2} > 1. \tag{2.4.37}$$

on aproximem $r = -\frac{1}{2}$ de la següent manera:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x^r} = 1. \tag{2.4.38}$$

■

2.5

Integració impròpia de funcions amb signe

Els criteris de comparació establerts a la secció anterior fan referència només a integrands positius. Quan l'integrand no és positiu, les possibles cancel·lacions degudes a oscil·lacions en el signe de l'integrand podrien facilitar la convergència en alguns casos. En altres paraules, les funcions amb canvis de signe podrien generar integrals impròpies convergents sota criteris més generals. Per aquest motiu, el concepte de convergència absoluta no és trivial.

Observació 2.5.1. Si $f \in \mathscr{R}_{loc}([a,b))$, $b \in \mathbb{R}$, amb $f \geq 0$, aleshores:

$$\int_a^b f \ll \infty \iff \left|\int_a^x f\right| \leq c. \tag{2.5.1}$$

Si $f \ngeq 0$, aleshores f pot oscil·lar de signe.

Definició 2.5.2 (Convergència absoluta). Sigui $f \in \mathscr{R}_{loc}([a,b))$. Es diu que la integral impròpia $\int_a^b f$ és absolutament convergent si la integral impròpia $\int_a^b |f|$ convergeix. Evidentment, si $f \geq 0$ aleshores:

$$\int_a^b f \text{ convergència absoluta} \iff \int_a^b f \text{ convergència.} \tag{2.5.2}$$

Teorema 2.5.3. *La convergència absoluta d'una integral impròpia implica la convergència de la mateixa integral.*

Demostració. Si $f \in \mathscr{R}_{loc}([a,b))$, $\int_a^b f$ convergeix absolutament convergeix si, i només si, el límit:

$$\lim_{x \to b} \int_a^x |f| \tag{2.5.3}$$

existeix i és finit per definició. Segons el Criteri de Cauchy, això passa només quan donat $\varepsilon > 0$ existeix $c \in (a,b)$ tal que:

$$x, y \in (c,b) \implies \int_x^y |f| < \varepsilon. \tag{2.5.4}$$

Però $|\int_x^y f| \leq \int_x^y |f| < \varepsilon$ i, per tant, $\int_a^b$ convergeix (altre cop per Cauchy). ■

Exemple 2.5.4. Hem de mirar la convergència absoluta d'aquesta integral:

$$\int_3^7 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x-3}} dx. \tag{2.5.5}$$

Agafem $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x-3}} \in \mathcal{C}((3,7]) \subset \mathscr{R}_{loc}((3,7])$. La integral és impròpia quan $x \to 3^+$. Ara bé, $f \not\geq 0$ i no podem aplicar el criteri de convergència per desigualtat ni el criteri de comparació per pas al límit. Però, fixem-nos:

$$|f(x)| = \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x-3}} \in \mathscr{R}_{loc}((3,7]),\ |f(x)| \geq 0 \tag{2.5.6}$$

i, a més:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^+} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{\sqrt{x-3}}} = |\sin(3)| \implies \int_3^7 |f| \text{ convergeix} \implies \int_3^7 f \text{ convergeix absolutament} \\ \implies \int_3^7 f \text{ convergeix.} \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Hem usat la definició d'absolutament convergent i el teorema de convergència absoluta. Fixem-nos, a l'interval $(3,\pi]$ teníem $f \geq 0$ (a l'interval $(\pi, 7]$ canvia de signe, però és no impròpia i, per tant, podem ignorar aquest fet) i, òbviament:

$$\int_3^7 = \int_3^\pi + \int_\pi^7. \tag{2.5.8}$$

Teorema 2.5.5 (Teorema de Dirichlet). *Sigui $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i $g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Suposem que:*

1. $\exists K \geq 0$ *tal que* $|\int_a^x f| \leq K$, $\forall x \in [a,b)$.
2. $\lim_{x \to b^-} g(x) = 0$.
3. $\exists K' \geq 0$ *tal que* $\int_a^x |g'| \leq K'$, $\forall x \in [a,b)$.

Aleshores, $\int_a^b f \cdot g$ *convergeix.*

Demostració. Si usem la fórmula d'integració per parts, amb $F(x) = \int_a^x f$ i $G(x) = \int_a^x g$,

$$\int_a^x f \cdot g = [F \cdot g]_a^x - \int_a^x f \cdot g' = F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^x F(t)g'(t)dt. \tag{2.5.9}$$

Quan $x \to b^-$, $F(x) \cdot g(x)$ tendeix a 0, ja que, pel segon apartat, $g(x) \to 0$ i pel primer, $F(x)$ està fitada. El segon terme, $F(a)g(a)$, és constant (i amb això ja ens val). Si provem que:

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x F \cdot g' \tag{2.5.10}$$

existeix, ja haurem acabat. En efecte:

$$\int_a^x |F(t)g'(t)|dt = \int_a^x |F(t)| \cdot |g'(t)|dt \leq K \cdot K' \ll \infty. \tag{2.5.11}$$

Per tant, $|Fg'| \in \mathscr{R}([a,b))$. Això implica que $\int_a^b F \cdot g'$ convergeix absolutament i, pel teorema, $\int_a^b Fg'$ és convergent. ■

Corol·lari 2.5.6 (Test de Dirichlet). *Sigui $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i $g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g \in \mathcal{C}^1$ tals que:*

1. *$\exists K > 0$ tal que $|\int_a^b f| \leq K$, $\forall x \in [a,b)$.*
2. *$\lim_{x \to b^-} g(x) = 0$ i $g'(x) \leq 0$.*

Aleshores, $\int_a^b f \cdot g$ convergeix.

Demostració. Hem de veure que la segona condició del test de Dirichlet equival a demanar la segona i la tercera del teorema anterior. Evidentment, en les dues es demana que $\lim_{x \to b^-} g(x) = 0$. Pel que fa a la tercera:

$$\int_a^x |g'| = \int_a^x -g' = -\int_a^x g' = g(a) - g(x) \leq g(a). \tag{2.5.12}$$

i aquesta es compleix amb $K' = g(a)$. ■

Observació 2.5.7. La condició segona equival a demanar que g s'anul·la a la singularitat de manera monòtona.

Exemple 2.5.8. Analitzar la convergència de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx. \tag{2.5.13}$$

Agafem $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \in \mathscr{R}_{loc}([1, +\infty))$, que serà una integral impròpia quan $x \to +\infty$. Com que $f \not\geq 0$, no podem aplicar cap criteri de convergència habitual. Tenim dues opcions:

1. Convergència absoluta:

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}} dx \tag{2.5.14}$$

   Fixem-nos: $\frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ i, a més:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} |\sin(x)| = \nexists. \tag{2.5.15}$$

   Separant-les amb $f(t) = |\sin(t)|$ i $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, extraiem que, sí, $g \to 0$ si $t \to \infty$, però $f(t) \implies \int_a^x |\sin(t)|dt$ no és fitat.

2. Intentem Dirichlet: $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$ dividint en f i g:

$$\begin{array}{c} f(t) = \sin(t), \text{ existeix primitiva fitada} \\ g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \to 0, \ t \to \infty. \end{array} \tag{2.5.16}$$

Per Dirichlet, $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$ convergeix en el sentit ordinari. Vegem si convergeix absolutament o no. Sense pèrdua de generalitat, considerem la següent integral, on hem variat el punt d'inici:

$$\begin{aligned} &\int_\pi^\infty \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}} = \lim_{N\to\infty} \int_\pi^{N\pi} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}}dx. \\ &\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}}dx \approx \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{k\pi}}dx = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)| \approx \frac{1}{\sqrt{k}}. \\ &\int_\pi^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{N\to\infty} \int_\pi^{N\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \left[2\sqrt{x}\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\ &\qquad = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty. \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Observació 2.5.9. *Als apunts hi ha una altra aproximació a la resolució per Dirichlet. S'adjunta a continuació la resolució.* Podem assegurar que la convergència no és absoluta. En efecte:

$$\begin{aligned} &\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}}dx = \lim_{N\to+\infty} \int_\pi^{N\pi} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}}dx = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}}dx \geq \\ &\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2}{\sqrt{(n+1)\pi}} \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

i el problema es redueix a analitzar el comportament d

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2}{\sqrt{(n+1)\pi}}. \tag{2.5.19}$$

Tècnicament, això és una sèrie numèrica. Aquests objectes els tractarem al proper capítol. A mode d'exemple, però, no és difícil adonar-se que el comportament d'aquesta sèrie és el mateix que el de la integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. En efecte,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \tag{2.5.20}$$

En particular:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{2.5.21}$$

d'on:

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \tag{2.5.22}$$

és a dir:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \int_{\pi}^{N\pi}\frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}. \tag{2.5.23}$$

Però $\int_1^N \frac{dx}{\sqrt{x}} \to \infty$ quan $N \to \infty$. En conseqüència, també:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = +\infty \implies \int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x}}dx = +\infty. \tag{2.5.24}$$

En altres paraules, la integral $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$ és convergent, però no és absolutament convergent.

III

Sèries numèriques

3.1 Preliminars

Definició 3.1.1 (Sèrie). Una sèrie de nombres reals és una parella de successions $(a_n)_n$ i $(S_N)_N$ lligades pel fet que:

$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \sum_{k=1}^{N} a_k, \tag{3.1.1}$$

on a_n és el terme general de la sèrie i S_N la suma parcial de la sèrie.

Definició 3.1.2 (Sèrie convergent). Es diu que una sèrie (a_n, S_N) és convergent si, i només si, la successió $\{S_N\}$ de sumes parcials convergeix, és a dir, si el límit $\ell = \lim_{N\to\infty} S_N$ existeix.

Exemple 3.1.3. Posem $a_n = n$ i la suma parcial S_N serà $S_N = a_1 + \cdots + a_N = 1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}$. Aquesta sèrie no convergeix ja que les sumes parcials no tenen límit.

Definició 3.1.4 (Sèrie divergent). Es diu que una sèrie (a_n, S_N) és divergent si la successió de sumes parcials divergeix, és a dir, quan no convergeix o bé convergeix a ∞.

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{3.1.2}$$

Exemple 3.1.5 (Model de la sèrie geomètrica). El model de la sèrie geomètrica és la següent:

$$S_N = \sum_{k=0}^{\infty} a^k, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \tag{3.1.3}$$

Per analitzar la convergència, necessitem escriure S_N de forma compacta. De fet, aquesta forma ja la coneixem:

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^N = \frac{a - a^N \cdot a}{1 - a}, \quad a \neq 1. \tag{3.1.4}$$

Amb aquesta fórmula:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{a - a^{N+1}}{1 - a} = \begin{cases} \infty, & a > 1, \\ \infty, & a = 1, \\ \frac{a}{1-a}, & |a| < 1, \\ \nexists, & a = -1, \\ \nexists, & a < -1. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

on hem utilitzat que:

$$\lim_{N\to\infty} \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1, \\ 0, & -1 < a < 1 \\ \nexists, & a = -1 \\ \nexists, & a < -1. \end{cases} \tag{3.1.6}$$

En particular, per als casos negatius hem usat que $a = -b, b > 0$, $a^N = (-b)^N = (-1)^N \cdot b^N$.

Exemple 3.1.6 (Sèrie telescòpica). Una sèrie telescòpica és aquella que compleix $a_n = b_n - b_{n-1}$ per alguna successió b_n. Agafem la sèrie de Mengoli:

$$S_N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \ a_n = \frac{1}{n(n+1)}. \tag{3.1.7}$$

Efectivament, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ és telescòpica. Ara, hem d'escriure S_N de forma compacta. De fet, com és la telescòpica hauríem de trobar que la suma parcial S_N és igual a $b_1 - b_{N+1}$. En efecte:

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_N - b_{N+1}) \\ &= b_1 - b_{N+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \to 1, \ N \to \infty. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Observació 3.1.7. Ser sèrie telescòpica no et garanteix ser convergent. Per exemple, $a_k = b_k - b_{k+1}$ i $S_N = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tal que $\lim_{k\to\infty} b_k = \nexists$.

Exemple 3.1.8 (Sèrie telescòpica divergent). Agafem $S_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, definint

$$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log(n+1) - \log(n) = b_{n+1} - b_n. \tag{3.1.9}$$

D'aquesta manera, tenim una sèrie telescòpica divergent, donat que $b_n \to \infty$.

Exemple 3.1.9 (Sèrie harmònica). Donat un nombre real $\alpha \in \mathbb{R}$, volem determinar el caràcter de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}. \tag{3.1.10}$$

Si $\alpha \leq 0$, aleshores $\frac{1}{n^\alpha} \geq 1$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i, per tant:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{N} 1 = N. \tag{3.1.11}$$

En fer $N \to +\infty$, veiem que les sumes parcials divergeixen. Quan $\alpha > 0$, l'anàlisi és una mica més delicat i el farem amb l'ajut de les integrals impròpies. Per a fer-ho, definim $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Com $\alpha > 0$, tenim que f és decreixent a $(0, +\infty)$ i, per tant:

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} f \leq \frac{1}{n^\alpha}. \tag{3.1.12}$$

Si ara sumem per valors de $n = 1 \div N$, obtenim:

$$\sum_{n^1}^{N} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_1^{N+1} f \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}. \tag{3.1.13}$$

Com que els tres membres d'aquesta desigualtat són successions monòtones creixents en la variable N, tots tres tenen límit si fem $N \to +\infty$. En particular,

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \lim_{N\to\infty} \int_1^{N+1} f \leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}. \tag{3.1.14}$$

El terme integral el vam estudiar en l'anterior capítol:

$$\lim_{N\to+\infty}\int_1^{N+1} = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha\le 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1. \end{cases} \tag{3.1.15}$$

Si combinem això amb les desigualtats de l'equació (3.1.14), obtenim que:

1. si $\alpha > 1$, llavors el límit de l'esquerra a (3.1.14) existeix i és finit,
2. si $\alpha \le 1$, llavors el límit de la dreta a (3.1.14) és infinit.

Però els dos límits d'(3.1.14) són, en el fons, els límits de les successions de sumes parcials de dues sèries molt semblants. En efecte:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(N+1)^\alpha} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N+1} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}+\frac{1}{(N+1)^\alpha}-1\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}\right)-1. \tag{3.1.16}$$

Així doncs, l'equació (3.1.14) ens està dient que si $\alpha \le 1$, els tres membres són infinits, mentre que si $\alpha > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}-1 \le \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}. \tag{3.1.17}$$

Per tant, la sèrie harmònica $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ convergeix si, i només si, $\alpha > 1$. En aquest cas, també podem dir que

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} \le 1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}, \tag{3.1.18}$$

és a dir:

$$\frac{1}{\alpha-1} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} \le \frac{\alpha}{\alpha-1}. \tag{3.1.19}$$

El càlcul exacte del valor de la suma és més delicat, i pot calcular-se mitjançant eines de l'anàlisi de Fourier.

3.2 Criteris generals per a sèries

Teorema 3.2.1 (Criteri de Cauchy per a sèries). *Sigui $\sum_{n\ge1} a_n$ una sèrie de nombres reals. Aleshores, $\sum_n a_n$ és convergent si, i només si, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $N_0 \in N$ tal que per a tot parell M, N tal que $N_0 < N < M$ se satisfà que:*

$$|a_{N+1}+\cdots+a_M| = \left|\sum_{n=N+1}^{M} a_n\right| < \varepsilon. \tag{3.2.1}$$

Demostració. Per definició, $\sum_n a_n$ convergeix si, i només si, la successió de sumes parcials $S_N = a_1+\cdots+a_N$ convergeix. Igualment, $\{S_N\}_N$ convergeix si, i només si, és de Cauchy. I això és equivalent a dir que, donat que $\varepsilon > 0$, existeix $N_0 \in N$ tal que $|S_M - S_N| < \varepsilon$ sempre que $M, N > N_0$. Si, per exemple, suposem $M > N > N_0$ aleshores:

$$S_M - S_N = (a_1+\cdots+a_M)-(a_1+\cdots+a_N) = a_{N+1}+\cdots+a_M \tag{3.2.2}$$

i, per tant, S_N convergeix si, i només si, donat $\varepsilon > 0$ es pot trobar N_0 tal que $|a_{N+1}+\cdots+a_M| < \varepsilon$ sempre que $M > N > N_0$ com volíem veure. ∎

Observació 3.2.2. Dit en altres termes, la convergència d'una sèrie és equivalent a dir que donat $\varepsilon > 0$ sempre existeix un lloc n_0 a partir del qual tota suma d'un nombre finit de termes a_n, $n > n_0$ és menor que ε. Això té múltiples conseqüències: la primera, i més immediata, s'obté en el cas particular de sumar un sol terme (és a dir, $N + 1 = M$ a la demostració anterior) i dona lloc a la següent condició necessària de convergència.

Corol·lari 3.2.3. *Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ és una sèrie convergent, aleshores $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.*

Demostració. Només cal aplicar el criteri de Cauchy amb $N + 1 = M$, i obtenim $|a_M| < \varepsilon$ per a tot M prou gran. ■

Exemple 3.2.4.

1. La sèrie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+3}{n^2+2} \tag{3.2.3}$$
no pot ser convergent, ja que el seu terme general no té límit zero.
2. La sèrie harmònica
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} \tag{3.2.4}$$
de moment no podem descartar que convergeixi, donat que el seu terme general tendeix a 0. Tot i això, tampoc podem assegurar que convergeixi.

Lema 3.2.5. *Si $\int_{n=1}^{+\infty} a_n$ és una sèrie convergent i $m > 1$ és un nombre enter qualsevol, aleshores també és convergent la sèrie $\sum_{n=m}^{+\infty} a_n$ obtinguda sumant només a partir de l'm-èsim terme i:*

$$\sum_{n=m}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n. \tag{3.2.5}$$

Demostració. Per veure-ho, considerem la nova successió $\{b_n\}_{n\geq 1}$ definida per $b_n = a_{m+n-1}$ per a $n \geq 1$ i denotem per S_N i T_N, respectivament, a les successions de sumes parcials d'$\{a_n\}_{n\geq 1}$ i $\{b_n\}_{n\geq 1}$. Aleshores:

$$T_N = \sum_{n=1}^{N} b_n = b_1 + \cdots + b_N = a_m + \cdots + a_{m+N-1} - S_{m-1}. \tag{3.2.6}$$

tal i com volíem veure. ■

Donada una sèrie convergent $\sum_{n\geq 1} a_n$, acabem de veure que si $m \in \mathbb{N}$ és un natural qualsevol aleshores la sèrie $\sum_{n\geq m} a_n$ també és convergent. Per descomptat, el valor de la suma $\sum_{n=m}^{+\infty} a_n$ depèn de m. Té sentit, doncs, considerar la successió:

$$\left\{ \sum_{n=m}^{+\infty} a_n \right\}_{m\geq 1}, \tag{3.2.7}$$

que es coneix com a successió de cues de la sèrie $\sum_{n\geq 1} a_n$. Cadascun dels termes d'aquesta nova successió s'anomena cua de $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Corol·lari 3.2.6. *Sigui $\sum_n a_n$ una sèrie de nombres reals. Si la sèrie és convergent, aleshores per a tot $\varepsilon > 0$ existeix N_0 tal que:*

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} a_n\right| < \varepsilon \tag{3.2.8}$$

sempre que $N > N_0$. En altres paraules, la successió de cues té límit 0.

Demostració. Pel criteri de Cauchy per a sèries, donat un $\varepsilon > 0$ podem trobar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $N_0 < N < M$ aleshores:

$$|a_N + \cdots + a_{M-1}| < \varepsilon. \tag{3.2.9}$$

Això també es pot escriure en termes de cues. Efectivament, tenim per una banda:

$$\sum_{n=M}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{M-1} a_n \tag{3.2.10}$$

i, per l'altra:

$$\sum_{n=N}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n. \tag{3.2.11}$$

Per tant, si fem la resta:

$$\sum_{n=N}^{+\infty} a_n - \sum_{n=M}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{M-1} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n = a_N + \cdots + a_{M-1}. \tag{3.2.12}$$

Així:

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} a_n - \sum_{n=M}^{+\infty} a_n\right| = |a_N + \cdots + a_{M-1}| < \varepsilon, \tag{3.2.13}$$

sempre que siguin prou grans. Això demostra que la successió de cues és de Cauchy. Per tant, el límit:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{+\infty} a_n = \ell \tag{3.2.14}$$

existeix, i el seu valor es pot treure fent $N \to \infty$ a l'equació següent,

$$\sum_{n=N}^{+\infty} a_n = \tag{3.2.15}$$

Efectivament, hom obté:

$$\ell = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1} a_n = 0, \tag{3.2.16}$$

tal i com volíem veure. ■

Teorema 3.2.7. *Si $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ són dues sèries convergents, respectivament, a a i b, i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ aleshores $\sum_n(\lambda a_n + \mu b_n)$ també és convergent i la seva suma és $\lambda a + \mu b$.*

Demostració. Només cal observar que les sumes parcials preserven les combinacions lineals:

$$\sum_{n=1}^{N}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda\sum_{n=1}^{N} a_n + \mu\sum_{n=1}^{N} b_n, \tag{3.2.17}$$

així com també les preserva el límit. ■

3.3

SÈRIE DE TERMES POSITIUS

Teorema 3.3.1. *Sigui $\sum_n a_n$ una sèrie de nombres reals tals que $a_n \geq 0$ per tot n. Aleshores, $\sum_n a_n$ convergeix si, i només si, la seva successió de sumes parcials és fitada.*

Demostració. En tractar-se d'una sèrie de termes positius, la successió de sumes parcials $\{S_N\}_N$ és creixent (o, com a mínim, no decreixent). En conseqüència, $\{S_N\}_N$ convergeix si, i només si, és fitada. ■

Així, les sèries de termes positius o bé convergeixen o bé divergeixen a $+\infty$. Un altre resultat important és el que fa referència a l'ordre de sumació. Clarament, un canvi d'ordre en un nombre finit de termes no afecta al caràcter convergent de les sèries i, per tant, només cal mirar amb detall què passa quan el canvi d'ordre afecta una quantitat no finita de termes.

Teorema 3.3.2 (Reordenació de sèries)**.** *Sigui $\sum_n a_n$ una sèrie i suposem que $a_n \geq 0$, i sigui $i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una bijecció. Aleshores:*

$$\sum_n a_n \ll \infty \iff \sum_n a_{i(n)} \ll \infty \tag{3.3.1}$$

i en cas de convergència es té $\sum_n a_n = \sum_n a_{i(n)}$.

Demostració. Provarem que si $\sum_n a_n$ convergeix, llavors també $\sum_n a_{i(n)}$ convergeix. L'altra implicació es dedueix de la mateixa. Denotem $b_m = a_{i(m)}$ i siguin

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \quad T_M = \sum_{m=1}^{M} b_m. \tag{3.3.2}$$

Per hipòtesi, $\{S_N\}_N$ és una successió fitada. D'altra banda, la successió $\{T_M\}_M$ és monòtona creixent (donat que $b_m \geq 0$) i també és fitada, doncs:

$$0 \leq T_M = \sum_{m=1}^{M} b_m = \sum_{m=1}^{M} a_{i(m)} \leq \sum_{n=1}^{\max\{i(1),\ldots,i(M)\}} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll +\infty, \tag{3.3.3}$$

per la qual cosa $\lim_M T_M$ existeix. En conseqüència, $\sum_m a_{i(m)}$ és també una sèrie convergent. Ara ens falta veure que la seva suma és precisament $\sum_n a_n$. Donat $\varepsilon > 0$, sigui N_0 tal que si $N > N_0$, llavors:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3.4}$$

Sigui ara $M_1 \in \mathbb{N}$ el mínim natural tal que $\{1\} \subset \{i(1), \ldots, i(M_1)\}$. Sigui ara M_2 el mínim natural major o igual que M_1 tal que $\{1, 2\} \subset \{i(1), \ldots, M_2\}$. En general, sigui M_N el mínim natural major o igual que tots els $M_1, \ldots, M_{N-1}$ tal que:

$$\{1, 2, \ldots, N\} \subset \{i(1), \ldots, i(M_2), \ldots, i(M_N)\}. \tag{3.3.5}$$

Per construcció, M_N és una successió no decreixent en N, i tampoc és fitada (si fos fitada, llavors i seria fitada i no podria ser una bijecció). Per tant, $M_N \to \infty$ quan $N \to \infty$. Sigui ara $N > N_0$. Per construcció de M_N,

$$T_{M_N} - S_N = \sum_{m=1}^{M_N} b_m - \sum_{n=1}^{N} a_n \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3.6}$$

Per tant, si $m > M_N$:

$$T_m - S_N \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} a_i \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.3.7}$$

de manera que si $m > M_N$:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - T_m\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_N\right| + |S_N - T_m| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| + |S_N - T_m| \leq 2\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon. \tag{3.3.8}$$

cosa que vol dir que $\lim_m \{T_m\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com volíem veure. ■

Teorema 3.3.3 (Criteri de comparació per a sèries). *Siguin $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ dues sèries, i suposem que $a_n, b_n \geq 0$. Suposem que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ i $k \geq 0$ tals que $a_n \leq k \cdot b_n$, per a tot $n \geq n_0$. Aleshores:*

$$\sum_n b_n \ll \infty \implies \sum_n a_n \ll \infty. \tag{3.3.9}$$

Demostració. Com que el caràcter convergent de les sèries no varia si canviem un nombre finit de termes, podem suposar que $n_0 = 1$. Ara, si $\sum_n b_n$ convergeix, llavors la successió de sumes parcials $T_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ és fitada. Però, llavors:

$$0 \leq S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \leq k \cdot T_N \tag{3.3.10}$$

i, per tant, S_N també és fitada. En tractar-se d'una sèrie de positius, 3.3.1 ens diu que $\sum_n a_n$ també ha de ser convergent. ■

Teorema 3.3.4 (Criteri de comparació per pas al límit per a sèries). *Siguin $\sum_n a_n$ i $\sum_n b_n$ dues sèries, i suposem que $a_n, b_n \geq 0$. Suposem que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in [0, +\infty]. \tag{3.3.11}$$

Aleshores:

1. *Si $\lambda = 0$, aleshores:*
$$\sum_n b_n \ll \infty \implies \sum_n a_n \ll \infty. \tag{3.3.12}$$
2. *Si $\lambda = +\infty$, aleshores:*
$$\sum_n a_n \ll \infty \implies \sum_n b_n \ll \infty. \tag{3.3.13}$$
3. *Si $\lambda \in (0, +\infty)$, aleshores:*
$$\sum_n a_n \ll \infty \iff \sum_n b_n \ll \infty. \tag{3.3.14}$$

Demostració. Comencem provant el primer punt. Per hipòtesi, donat $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que $0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \varepsilon$ i, per tant:

$$0 \leq a_n \leq \varepsilon b_n, \tag{3.3.15}$$

per la qual cosa, podem aplicar 3.3.3. Per provar el segon punt, només hem d'intercanviar els papers d'a_n i b_n. Finalment, per provar el tercer punt, donem $\varepsilon > 0$ i es pot trobar un natural n_0 tal que $\lambda - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \lambda + \varepsilon$ si $n > n_0$. En particular, si escollim $0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{2}$. Aleshores:

$$\frac{\lambda}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3\lambda}{2}, \ \forall n > n_0. \tag{3.3.16}$$

Per tant, el resultat s'obté aplicant 3.3.3. ■

Exemple 3.3.5.

1. Considerem la sèrie $\sum_n \frac{n^2+7}{n^3+5}$. Aleshores, ens adonem que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+7}{n^3+5}}{\frac{1}{n}} = 1 \tag{3.3.17}$$

   i, per tant, $\sum_n \frac{n^2+7}{n^3+5}$ i $\sum_n \frac{1}{n}$ tenen el mateix caràcter. Però és sabut que $\sum_n \frac{1}{n}$ divergeix. Per tant, també $\sum_n \frac{n^2+7}{n^3+5}$ és divergent.
2. Considerem la sèrie $\sum_n \frac{n^2+2}{n^5+3}$. Aleshores, ens adonem que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+2}{n^5+3}}{\frac{1}{n^3}} = 1 \tag{3.3.18}$$

   i, per tant, $\sum_n \frac{n^2+2}{n^5+3}$ i $\sum_n \frac{1}{n^3}$ tenen el mateix caràcter. Però és sabut que $\sum_n \frac{1}{n^3}$ divergeix. Per tant, també $\sum_n \frac{n^2+2}{n^5+3}$ és divergent.

Teorema 3.3.6 (Criteri de Cauchy, o de l'arrel)**.** *Sigui $\sum_n a_n$ una sèrie, amb $a_n \geq 0$. Sigui:*

$$\Lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}. \tag{3.3.19}$$

Aleshores:

1. *Si $\Lambda < 1$, aleshores $\sum_n a_n$ convergeix.*
2. *Si $\Lambda > 1$, aleshores $\sum_n a_n$ divergeix.*

Demostració. Usarem la definició de límit superior s'una successió $\{b_n\}_{n\geq m}$, que és decreixent en m (com és gran m més petit és el conjunt i menys potencial de creixement),

$$\limsup_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{n\geq m}\{b_n\} = \inf_m\{\sup_{n\geq m} \sqrt[n]{a_n}\}. \tag{3.3.20}$$

Per hipòtesi, $\Lambda < 1$ (ja que és una successió monòtona i fitada: tot i que $\lim_n b_n$ podria no existir, el $\limsup b_n$ sempre existeix). Per tant, $\exists r \in (\Lambda, 1)$ tal que

$$\Lambda = \inf_{m\in\mathbb{N}}\{\sup_{n\geq m} b_n\} < r < 1. \tag{3.3.21}$$

Per tant, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sup_{n\geq m} \sqrt[n]{a_n} < r. \tag{3.3.22}$$

En particular, $\forall n \geq m$, $\sqrt[n]{a_n} < r$ (tota la cua ha de quedar estrictament per sota de r). De fet, $a_n < r^n$ i a_n està dominat per la sèrie geomètrica de raó $r < 1$. Per tant, la nostra successió convergeix $\sum a_n \ll \infty$.

Suposem ara que $\Lambda > 1$. Per definició:

$$\Lambda = \inf_m \{\sup_{n\geq m} \sqrt[n]{a_n}\} > 1. \tag{3.3.23}$$

En particular, per a tot $m \in \mathbb{N}$ s'haurà de complir que:

$$\sup_{n\geq m} \sqrt[n]{a_n} > 1, \ \forall m. \tag{3.3.24}$$

Si $m = 1$, llavors $\sup_{n\geq 1} \sqrt[n]{a_n} > 1$ i existeix $n_1 \geq 1$ tal que $(a_{n_1})^{\frac{1}{n_1}} > 1$ i $a_{n_1} > 1$. Anàlogament, si $m = n_1 + 1$:

$$\sup_{n\geq n_1+1} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \exists n_2 > n_1 + 1 \mid (a_{n_2})^{\frac{1}{n_2}} > 1 \implies a_{n_2} > 1. \tag{3.3.25}$$

Podem aplicar aquest procediment inductivament de manera que estem construint una successió creixent $n_k < n_{k+1}$ tal que $(a_{n_k}) \subset (a_n)_n$ amb la propietat que $a_{n_k} = a_{n_k}^{\frac{1}{n_k}} > 1$ per a tot k. Això implica que $\limsup_n a_n \geq 1$ i, per tant, $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. En definitiva, $\sum_n a_n$ no convergeix. ■

Exemple 3.3.7.

1. Agafem la sèrie geomètrica $a_n = a^n$. Aplicant el criteri de l'arrel, $\sqrt[n]{a_n} = a \xrightarrow{n\to\infty} a$.
2. Prenem ara la sèrie harmònica $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right)^\alpha \xrightarrow{n\to\infty} 1 \implies n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1. \tag{3.3.26}$$

   En el cas de la sèrie harmònica, doncs, el criteri de l'arrel no ens diu res.
3. Sigui $a_n = (\frac{\log n}{\sqrt{n}})^n \geq 0$ tal que escrivim la sèrie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right)^n. \tag{3.3.27}$$

   Com que $a_n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\sqrt{n}} = 0. \\ \implies \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 \implies \sum_n a_n \ll \infty. \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Exercici 3.3.8. *Determineu la convergència o la divergència de la següent sèrie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 5}\right)^2. \tag{3.3.29}$$

Demostració. Apliquem el criteri de l'arrel:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k \implies \begin{cases} \text{convergeix, si } k < 1 \\ \text{divergeix, si } k > 1 \end{cases} \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2-2n}{n^2+5}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-n}{n^2+5}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2-5n}{n^2+5}} = \frac{1}{e^2} < 1, \tag{3.3.30}$$

on hem usat que

$$\left(\frac{n^2-2n}{n^2+5}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+5}{-2n-5}}\right)^{\frac{n^2+5}{-2n-5}}\right]^{\frac{-2n-5}{n^2+5}n}. \tag{3.3.31}$$

Per tant, $\sum_n a_n$ convergeix. ■

Teorema 3.3.9 (Criteri del quocient)**.** *Sigui* $\sum_n a_n$ *i* $a_n \geq 0$. *Siguin* $\Lambda = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *i* $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Aleshores:*

1. $\Lambda < 1 \implies \sum_n a_n \ll \infty$,
2. $\lambda > 1 \implies \sum_n a_n = \infty$.

Observació 3.3.10. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existeix, llavors $\Lambda = \lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Demostració. Per hipòtesi,

$$\Lambda = \inf_m \left\{ \sup_{n\geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} < 1. \tag{3.3.32}$$

Ha d'existir algun $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sup_{n\geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1 \text{ per algun } r \in (\Lambda, 1) \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} < r, \quad \forall n \geq m. \tag{3.3.33}$$

Però llavors tota la cua $\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\}_{n\geq m}$ ha de quedar estrictament per sota de r. De fet, $a_{n+2} < ra_{n+1} < r^2 a_n$ i així successivament. En conseqüència, si resulta que $n = m$ i prenem $k \in \mathbb{N}$ qualsevol:

$$0 < a_{n+k} \leq r^k \cdot a_n \xrightarrow{r\in(0,1)} \sum_k r^k \ll \infty \implies \sum_k a_{n+k} \ll \infty \implies \sum_n a_n \ll \infty. \tag{3.3.34}$$

Pel que fa al segon apartat, per hipòtesi tenim que:

$$\lambda = \sup_m \left\{ \inf_{n\geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} > 1. \tag{3.3.35}$$

Ha d'existir algun m tal que es produeixi el següent:

$$\inf_{n\geq m} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1. \tag{3.3.36}$$

I, per tant, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ per a tot $n \geq m$. En particular, $a_{n+1} > a_n$ (ambdós termes són positius) i com que $a_n \geq 0$ és impossible que $\lim_n a_n = 0$. En conseqüència, $\sum_n a_n$ no pot ser convergent. ■

Exercici 3.3.11. *Analitzeu la convergència de la següent sèrie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{(n+3)^n}. \tag{3.3.37}$$

Demostració. Fem un quocient de termes consecutius:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+4)^{n+1}} \cdot \frac{(n+3)^n}{4^n \cdot n!} = \frac{4(n+1)}{n+4} \cdot \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n = \frac{4}{e} > 1 \implies \sum_n a_n \ll \infty.$$

$$\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\right]^n \xrightarrow{n\to\infty} e \tag{3.3.38}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)}{n+4} = 4.$$

■

Exercici 3.3.12. *Determineu la convergència de la sèrie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(n!)^6}{(n^3+4)^{2n}}. \tag{3.3.39}$$

Demostració. Agafant $a_n = \frac{3^{2n}(n!)^6}{(n^3+4)^{2n}}$ i $a_{n+1} = \frac{3^{2n+2}((n+1)!)^6}{((n+1)^3+4)^{2n+2}}$, apliquem el criteri del quocient, fem la divisió i mirem què passa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{2n+2}((n+1)!)^6}{((n+1)^3+4)^{2n+2}}}{\frac{3^{2n}(n!)^6}{(n^3+4)^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^2 \cdot (n+1)^6}{((n+1)^3+4)^2 \left(1+\frac{4}{n^3+4}\right)^{2n}} = 3^2 > 1 \implies \sum_n a_n \text{ divergeix.} \tag{3.3.40}$$

■

Proposició 3.3.13. *Sigui $\{a_n\}_n$ una successió de nombres reals, amb $a_n \geq 0$ per tot n. Si $\ell = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$, aleshores també $\ell = \lim_n \sqrt[n]{a_n}$. En altres paraules, hi ha una forta correspondència entre el criteri del quocient i el criteri i de l'arrel.*

Teorema 3.3.14 (Criteri integral). *Sigui $f : [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ una funció decreixent tal que $f \in \mathscr{R}_{loc}([1,+\infty))$. Aleshores:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \ll \infty \iff \int_1^{\infty} f(x)dx \ll \infty. \tag{3.3.41}$$

Demostració. En ser f decreixent, tenim que:

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n). \tag{3.3.42}$$

Per tant:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n+1) \leq \int_1^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n), \tag{3.3.43}$$

de manera que les sumes parcials $\sum_{n=1}^N f(n)$ són fitades, com a successió en la variable N si, i només si, la successió d'integrals $\int_1^{N+1} f(x)dx$ és fitada en N. ■

Exemple 3.3.15. El criteri integral permet comprovar fàcilment que la sèrie $\sum_n \frac{1}{n\log^3(n)}$ convergeix. En efecte, donat que la funció $f(x) = \frac{1}{x\log^3(x)}$ decreix quan x és prou gran:

$$\int^{\infty} \frac{dx}{x\log^3(x)} = \left[\frac{1}{-2\log^2(x)}\right]^{\infty} \ll \infty. \tag{3.3.44}$$

Observació 3.3.16.

- *Quin criteri és millor? El del quocient o el de l'arrel?* Com hem comentat a la proposició anterior, si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, aleshores $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. A l'inrevés, si $a_n = r^{n+(-1)\sqrt[n]{n}}$ prova que $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = r$ i que $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \nexists$.
- *Què podem fer si la raó és 1?* Podem aplicar el criteri de Raabe.

Teorema 3.3.17 (Criteri de Raabe)**.** *Sigui $\sum_n a_n$ tal que $a_n \geq 0$.*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \implies \begin{cases} \ell > 1 \implies \sum_n a_n \ll \infty. \\ \ell < 1 \implies \sum_n a_n = \infty. \end{cases} \tag{3.3.45}$$

Exercici 3.3.18. *Comproveu si la següent sèrie és convergent o no ho és:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!)^3}{2^{6n}\cdot(n!)^6}. \tag{3.3.46}$$

Demostració. Evidentment, $a_n \geq 0$. Fem el quocient de termes consecutius:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((2n+2)(2n+1)(2n)!)^3}{2^{6n}2^6((n+1)n!)^6} \cdot \frac{2^{6n}(n!)^6}{((2n)!)^3} = \frac{(2n+2)^3(2n+1)^3}{2^6(n+1)^6} \xrightarrow{n\to\infty} 1. \tag{3.3.47}$$

Ara el volem posar en la forma de Raabe per poder aplicar el criteri. Com que fem límit a l'infinit, comptarem les contribucions dels termes de grau més alt i seran els que tindrem en consideració.

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\frac{2^6(n+1)^6 - (2n+2)^3(2n+1)^3}{2^6(n+1)^6} = n\frac{(2^6\cdot 6 - 2^5\cdot 3^2)n^5 + \text{ grau inferior}}{2^6(n+1)^6}. \tag{3.3.48}$$

Per tant,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{2^6\cdot 6 - 2^5\cdot 3^2}{2^6} = 6 - \frac{3^2}{2} = \frac{3}{2} > 1. \tag{3.3.49}$$

■

Teorema 3.3.19 (Criteri logarítmic)**.** *Sigui $\sum_n a_n$ tal que $a_n > 0$. Sigui*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)}. \tag{3.3.50}$$

1. *Si $L > 1$, $\sum_n a_n \ll \infty$.*
2. *Si $L < 1$, $\sum_n a_n = \infty$.*

Demostració. Per definició, donat $\varepsilon > 0$ $\exists n_0$ tal que:

$$n > n_0 \implies \left| \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} - L \right| < \varepsilon \iff (L-\varepsilon)\log(n) < \log\left(\frac{1}{a_n}\right) < (L+\varepsilon)\log(n). \quad (3.3.51)$$

Agafarem la funció $\frac{1}{\blacksquare}$ en l'últim pas, que és decreixent en els positius i ens serveix per revertir les desigualtats:

$$\begin{aligned} \log(n^{L-\varepsilon}) < \log\left(\frac{1}{a_n}\right) < \log(n^{L+\varepsilon}) \iff n^{L-\varepsilon} < \frac{1}{a_n} < n^{L+\varepsilon} \\ \frac{1}{n^{L+\varepsilon}} < a_n < \frac{1}{n^{L-\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (3.3.52)$$

■

Exemple 3.3.20. Sigui $a_n = \log(n)$. Apliquem el criteri logarítmic en funció d'aquesta a_n que hem triat.

$$\sum_n \left(\frac{1}{\log(n+1)}\right)^{\log(n)}. \quad (3.3.53)$$

Aleshores:

$$\frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} = \frac{\log(\log(n+1)^{\log(n)})}{\log(n)} = \frac{\log(n)(\log(\log(n+1)))}{\log(n)} = \log(\log(n+1)) \to \infty. \quad (3.3.54)$$

Teorema 3.3.21 (Criteri de condensació). *Sigui $\{a_n\}_n$ decreixent, amb $a_n \geq 0$. Aleshores:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} \ll \infty. \quad (3.3.55)$$

Demostració. Per un costat, $\{a_n\}$ és decreixent i tenim que $a_n \leq a_m$ si $n \geq m$ i, per tant, $a_2 + a_3 \leq 2a_2$ i $a_4 + \cdots + a_7 \leq 4a_4$ i $a_8 + \cdots + a_{15} \leq 8a_8$. Generalitzant a un nombre arbitrari:

$$a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1} \leq 2^k \cdot a_{2^k}. \quad (3.3.56)$$

En conseqüència, tenim el següent. Donem dues maneres de fer-ho:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2^{k+1}-1} a_n &= a_1 + \cdots + a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1} = \sum_{j=0}^{k} a_{2^j} + \cdots + a_{2^{j+1}-1} \leq \sum_{j=0}^{k} 2^j \cdot a_{2^j}. \\ \sum_{n=1}^{2^{k+1}-1} a_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k \cdot a_{2^k} = \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}. \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

Això demostra que les sumes parcials de $\sum_k 2^k a_{2^k}$ controlen les de $\sum_n a_n$, i provem així la suficiència. Per veure el recíproc, observem d'altra banda que la monotonia també prova que:

$$\begin{aligned} a_2 &\geq a_2 \\ a_3 + a_4 &\geq 2a_4 \\ a_5 + \cdots + a_8 &\geq 4a_8 \\ &\vdots \\ a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}} &\geq 2^k \cdot a_{2^{k+1}}. \end{aligned} \quad (3.3.58)$$

En conseqüència:

$$\sum_{n=2}^{2^{k+1}} a_n = a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}) \geq \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^{j+1}} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k} 2^{j+1} a_{2^{j+1}}, \quad (3.3.59)$$

cosa que prova que les sumes parcials d'$\sum_n a_n$ controlen les de $\sum_k 2^k a_{2^k}$. Així doncs, les dues sèries tenen sumes parcials fitades simultàniament i, per tant, convergeixen també simultàniament, com volíem veure. ■

Exemple 3.3.22. Prenem $a_n = \frac{1}{n(\log(n))^\beta}$ i construïm la sèrie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^\beta} \ll \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\log(2^k))^\beta} \ll \infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\cdot\log(2))^\beta} = \left(\frac{1}{\log(2)}\right)^\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta}. \quad (3.3.60)$$

Hem usat que $f(x) = x(\log(x))^\beta$ de manera que $f' > 0 \forall\beta$. Així doncs, convergeix si, i només si, $\beta > 1$. Als apunts [Pra22], hi ha un exemple en què s'aplica el cas particular $\beta = 3$ (i ja hem vist, amb aquesta generalització, que convergeix).

Exercici 3.3.23. *Determineu la convergència de la sèrie:*

$$\sum_n \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^\alpha}. \quad (3.3.61)$$

Demostració. Observem que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)^{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{n}}\right)^{n^\alpha} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{n}}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\right)^{\frac{n}{n^2+1}n^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1 \\ e, & \alpha = 1 \\ 0, & \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.62)$$

Per tant, la condició necessària de convergència només se satisfà quan $\alpha > 1$. De fet, pot veure's que convergeix només si $\alpha > 1$, donat que::

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\frac{1}{a_n})}{\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{n}{n^2+1})^{n^\alpha}}{\log(n)} = \begin{cases} 0, & \alpha \leq 1 \\ +\infty, & \alpha > 1 \end{cases} \quad (3.3.63)$$

■

3.4 Sèries de termes no positius

Definició 3.4.1 (Convergència absoluta de sèries). Sigui $\sum_n a_n$, $a \in \mathbb{R}$, es diu que una sèrie convergeix absolutament si la sèrie $\sum_n |a_n|$ convergeix.

Teorema 3.4.2. *Si $\sum_n a_n$ convergeix absolutament, aleshores $\sum_n a_n$ convergeix.*

Demostració. Si $\sum_n a_n$ convergeix absolutament, aleshores $\sum_n |a_n|$ convergeix per definició. Per Cauchy, $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \mid M > N > N_0 \implies \sum_{n=N+1}^{M} |a_n| < \varepsilon$. Ara bé:

$$\left| \sum_{k=N+1}^{M} a_n \right| \leq \sum_{k=N+1}^{M} |a_n| < \varepsilon \iff \sum_n a_n \ll \infty. \tag{3.4.1}$$

És a dir, que pel criteri de Cauchy $\sum_n a_n$ és, un altre cop, convergent. ■

Notació 3.4.3 (Convergència ordinària i convergència absoluta)**.** Direm que una successió convergeix quan ho fa ordinàriament. Ho especificarem quan ho fa de manera absoluta.

Teorema 3.4.4 (Fórmula de sumació d'Abel)**.** *Siguin $\{a_n\}, \{b_n\}$ dues successions reals i $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ i entenem $A_0 = 0$. Aleshores:*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = A_q B_q - A_{p-1} b_p + \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}). \tag{3.4.2}$$

Demostració. Prenem $a_n = A_n - A_{n-1}$ i operem $\sum_{n=p}^{q} a_n b_n$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} \\ = A_q B_q - A_{p-1} b_p + \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}), \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

tal com volíem veure. ■

Teorema 3.4.5 (Test de Dirchlet per a sèries)**.** *Siguin $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ tals que:*

1. *$\{a_n\}$ té sumes parcials fitades,*
2. *$\{b_n\}$ convergeix monòtonament cao a 0.*

Aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ convergeix.

Observació 3.4.6. Una remarca sobre la notació utilitzada en la convergència de sèries. No és completament vàlid utilitzar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \ll \infty$. Aquesta notació queda reservada únicament a quan les sèries són positives.

Demostració. Sigui $A_n = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Aleshores, pel primer apartat existeix $k \geq 0$ tal que $|A_n| \leq k$ per a tot N. Pel segon apartat podem suposar que $b_n \geq b_{n+1} \geq 0$ amb $\lim_n b_n = 0$. Per la fórmula de sumació d'Abel, tenim el següent:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p}^{q} a_n b_n \right| = \left| A_q B_q - A_{p-1} b_p + \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \right| \leq |A_q b_q| + |A_{p-1} b_p| + \left| \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) \right| \\ \leq |A_q| b_q + |A_{p-1}| b_p + \sum_{n=p}^{q-1} |A_n| (b_n - b_{n-1}) \leq k b_q + k b_p + k \cdot \sum_{n=p}^{k-1} (b_n - b_{n-1}). \\ = k(b_q + b_p) + k((b_p - b_{p-1}) + (b_{p-1} - b_{p-2}) \cdots + (b_{q-1} - b_q)) = k b_q + k b_p + k(b_p - b_q) = 2 k b_p. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

on hem aplicat la desigualtat triangular en la primera, en la segona el segon apartat i, en la última, el primer. Com $(b_p)_p \xrightarrow{p\to\infty} 0$, $\forall \varepsilon > 0 \exists p_0$ tal que si $p > p_0$, aleshores $b_p = |b_p| < \frac{\varepsilon}{2k}$. Si ara prenem $q > p > p_0$, obtenim:

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| \leq 2kb_p < 2k\frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon. \tag{3.4.5}$$

Per tant, per Cauchy la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ convergeix. ■

Exemple 3.4.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. No convergeix absolutament (que no vol dir que no pugui convergir), ja que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \tag{3.4.6}$$

Per determinar la convergència, prenem $a_n = (-1)^n$ i $b_n = \frac{1}{n}$ de manera que $a_n b_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Fixem-nos:

$$\begin{aligned} a_n = (-1)^n &\implies A_n = \{A_1, \dots,\} = \{-1, 0, -1, 0 \dots,\} \text{ (podríem començar des d'}A_0\text{).)} \\ b_n = \tfrac{1}{n^\alpha} &\implies b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies \text{ Dirichlet} \\ a_n b_n = \tfrac{(-1)^n}{n^\alpha} &\implies \textstyle\sum_n a_n b_n \text{ convergeix.} \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Definició 3.4.8. Una sèrie alternada és una sèrie que té un terme general de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n, \tag{3.4.8}$$

on C_n és una successió de reals que no canvia de signe.

Teorema 3.4.9 (Criteri d'Abel per sèries alternades). *Sigui $(C_n)_n \subset \mathbb{R}$ una successió de nombres reals tal que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n$ és una sèrie alternada i $(C_n)_n$ convergeix monòtonament a 0, aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n$ convergeix.*

Demostració. Apliquem el test de Dirichlet amb $a_n = (-1)^n$ i $b_n = C_n$: la successió $a_n = (-1)^n$ té sumes parcials fitades. D'altra banda, i per hipòtesi, la successió $b_n = c_n$ és decreixent amb límit 0. En conseqüència, podem aplicar el criteri de Dirichlet per decidir que $\sum_n a_n b_n$ convergeix. ■

Exemple 3.4.10. $\sin(\pi n) = 0$ i $\sin\left(\frac{\pi}{2} n\right) = \{1, 0, 1, 0, \dots\} = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}(-1)^n$. D'altra banda, $(-1)^n = \sin((2n+1)\frac{\pi}{2})$.

Proposició 3.4.11. *Si $\theta \in (0, \pi)$ aleshores la successió $\{\sin(n\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ té sumes parcials fitades.*

Demostració. Agafem $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tal que $z = e^{i\theta}$ (en altres paraules, escrivim un complex en forma polar i estàndard). $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \sum_{j=0}^{N} z^j = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Prenem la fórmula de Moiure $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$. Aleshores:

$$\begin{aligned} \sin(0) + \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \dots + \sin(N\theta) &= \Im(1) + \Im(e^{i\theta}) + \Im(e^{2i\theta}) + \dots + \Im(e^{iN\theta}) \\ \Im(1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{Ni\theta}) &= \Im(z^0 + \dots + z^1 + \dots + z^N) = \Im(\frac{1-z^{n+1}}{1-z}) \\ = \Im\left(\frac{1-e^{i(N+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{N\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{N+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} &\implies \left|\sum_{j=0}^{N} \sin(j\theta)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{N\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{N+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| \\ &\leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Arribem a la conclusió que $\{\sin(n\theta)\}_n$ té sumes parcials fitades. ■

Exercici 3.4.12. *Analitzeu la convergència de la sèrie:*

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\log(\log(n))}. \tag{3.4.10}$$

Demostració. Fixem-nos que $\cos(n\pi) = \{-1, 1, -1, \dots\} = (-1)^n$. Tenim dues maneres de procedir: tractant $(-1)^n$ com sèrie alternada amb el criteri d'Abel o, com a segona opció, Dirichlet, veient així que té sumes parcials fitades. Fem $b_n = \frac{1}{\log(\log(n))}$, que ha de ser monòtonament convergent a 0. $f(x) = \log(\log(x)) \implies f'(x) = \frac{1}{x(\log(x))} \geq 0$. ■

Exemple 3.4.13. Se'ns dona la sèrie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}. \tag{3.4.11}$$

Hem de tenir en compte una sèrie de casuístiques:

- $(-1)^n$ té sumes parcials fitades.
- $C_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
- C_n és no monòtona, i convergeix d'una manera molt determinada.

Pensarem la sèrie agafant-la per parelles: $\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} + a_{2n-1}$. Per tant, tenim el següent:

$$\begin{aligned} C_{2n} + C_{2n-1} &= \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{2n} + (-1)^{2n}} + \frac{(-1)^{2n-1}}{\sqrt{2n-1} + (-1)^{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2n}+1} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}-1} \\ &= \frac{\sqrt{2n-1} - 1 - \sqrt{2n} - 1}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n-1}-1)} = \frac{(\sqrt{2n-1}-1)^2 - (\sqrt{2n}-1)^2}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n-1}-1)\left(\sqrt{2n-1}-1+\sqrt{2n}+1\right)} \\ &\simeq \frac{-1-\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}} \simeq \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Per tant, no convergeix.

Definició 3.4.14 (Convergència incondicional)**.** Sigui $\sum_n a_n$ una sèrie de nombres reals. Es diu que $\sum_n a_n$ convergeix incondicionalment si per tot bijecció $i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la sèrie reordenada $\sum_n a_{i(n)}$ convergeix a un valor que no depèn de la reordenació i.

Teorema 3.4.15. *En aquest sentit, sigui $\sum_n a_n$ una sèrie absolutament convergent de nombres $a_n \in \mathbb{R}$. Sigui $i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una bijecció. Aleshores, la sèrie $\sum_n a_{i(n)}$ també és absolutament convergent, i $\sum_n |a_n| = \sum_n |a_{i(n)}|$.*

Observació 3.4.16. El teorema anterior ens diu, doncs, que la convergència absoluta implica la convergència incondicional. En el fons, es tracta de nocions equivalents, tal com diu el següent resultat.

Teorema 3.4.17 (Riemann)**.** *Sigui $\sum_n a_n$ una sèrie de nombres reals. Aleshores, $\sum_n a_n$ convergeix absolutament si, i només si, $\sum_n a_n$ convergeix incondicionalment.*

Demostració.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\sum_n a_n$ convergeix absolutament, aleshores $\sum_n |a_n|$ convergeix i $\sum_n |a_{i(n)}|$ convergeix per tota bijecció $i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ i el valor de la suma numèrica no depèn de i.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Queda fora de l'abast de l'assignatura.

■

Exercici 3.4.18. *Resoleu el següent límit:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1) + \log(2) + \cdots + \log(n)}{n\log(n)} \tag{3.4.13}$$

Demostració. Resolem el límit:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1) + \log(2) + \cdots + \log(n)}{n\log(n)} &\xrightarrow{\text{Stolz}} \frac{\log(n+1)}{(n+1)\log(n+1) - n\log(n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \log(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log(n+1)} + 1} = 1.\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

■

Exercici 3.4.19. *Determineu la convergència de la següent sèrie:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)} \tag{3.4.15}$$

Demostració. Utilitzant l'exercici anterior, agafem $a_n = \frac{1}{\log(n!)}$ i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n\log(n)}} = 1 \implies \sum_n a_n \text{ divergeix.} \tag{3.4.16}$$

■

Exercici 3.4.20. *Determineu la convergència de la sèrie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n \tag{3.4.17}$$

Demostració. Apliquem el criteri de l'arrel amb $a_n = \left(n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n$. Aleshores:

$$\sqrt[n]{a_n} = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1. \tag{3.4.18}$$

Per tant, no podem extreure conclusions amb el criteri de l'arrel. Provem amb el criteri del logaritme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)}. \tag{3.4.19}$$

Trobem que $\log(\frac{1}{a_n}) = -n(\log(n) + \log(\log(1+\frac{1}{n})))$. Ara, operem:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} &= \lim_{n\to\infty} -n - \frac{n\log(\log(1+\frac{1}{n}))}{\log(n)} = \lim_{n\to\infty} -n - \frac{n\log\left(\frac{1}{n}\right)}{\log(n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} -n - \frac{n(-1)\log(n)}{\log(n)} = 0 < 1 \implies \text{divergència,}\end{aligned} \tag{3.4.20}$$

on hem aplicat que $\log(1+\frac{1}{n}) \approx \frac{1}{n}$ quan $n \to \infty$. ■

Exercici 3.4.21. *Determineu la convergència de la sèrie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\alpha n}}{n^{\beta n+2}}. \tag{3.4.21}$$

Demostració. Busquem primerament aplicar el criteri de l'arrel: agafem $a_n = \frac{(n+1)^\alpha}{n^{\beta+\frac{2}{n}}}$. Aleshores:

$$\begin{gathered} \sqrt[n]{a_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^{\beta+\frac{2}{n}}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha n^{\alpha-\beta-\frac{2}{n}} \\ \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} e^{-2}, & \text{si } \alpha=\beta \implies \text{convergència} \\ \infty, & \text{si } \alpha>\beta>1 \implies \text{divergència} \\ 0, & \text{si } \alpha<\beta<1 \implies \text{convergència} \end{cases}. \end{gathered} \tag{3.4.22}$$

I amb això ja hem acabat. ■

Exercici 3.4.22. *Determineu la convergència de la sèrie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n^2} \tag{3.4.23}$$

Demostració. Prenem $a_n = a^n(\frac{n-1}{n+1})^{2n^2}$. Farem servir, un altre cop, el criteri de l'arrel.

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} a\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} a\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{-4n}{n+1}} = \frac{a}{e^4} \\ \implies \begin{cases} 1, \ a=e^4 \\ \text{div}, \ a>e^4 \\ \text{conv}, \ a<e^4 \end{cases} \end{gathered} \tag{3.4.24}$$

Ara apliquem el criteri del logaritme per al cas $a = e^4$, ja que no podem determinar-ho amb Cauchy. Fent una sèrie de càlculs trobem que $\log(\frac{1}{a_n}) = \log(a^{-n}(\frac{n-1}{n+1})^{-2n^2}) = -n\log(a) + 2n^2\log(1+\frac{2}{n-1})$. Ara:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\frac{1}{a_n})}{\log(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{-n\log(a)+2n^2\log(1+\frac{2}{n-1})}{\log(n)} \xrightarrow{a=e^4} \lim_{n\to\infty} \frac{-4n+2n^2\frac{2}{n-1}}{\log(n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{(n-1)\log(n)} = 0 \implies \text{divergència.} \end{aligned} \tag{3.4.25}$$

■

Teorema 3.4.23. *Si $\sum_n a_n$ convergeix condicionalment i no convergeix absolutament, la sèrie $\sum_n a_{i(n)}$ pot convergir i divergir per diferents ordenacions $i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Aleshores:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \implies \begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} \implies \exists i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ \lambda = \infty \implies \exists j : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \end{cases} \left| \begin{array}{l} \sum a_{i(n)} = \lambda \\ \sum a_{j(n)} = \infty \end{array} \right. \tag{3.4.26}$$

Bibliografia

[Ort93] Joaquín M. Ortega Aramburu. *Introducción al análisis matemático*. spa. Labor universitaria. Manuales. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona, 1993. isbn: 843353047X.

[Ste20] James Stewart. *Single variable calculus: early transcendentals*. eng. Ninth edition, Metric version. Boston, MA: Cengage, 2020. isbn: 9780357113523.

[Pra22] Martí Prats. *Introducció al Càlcul Integral*. Universitat de Barcelona, 2022.