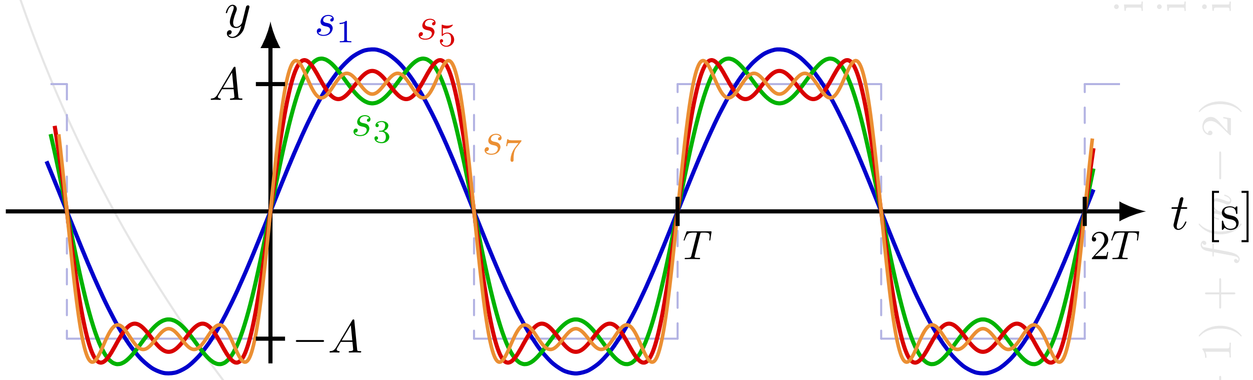
Anàlisi Matemàtica

Exercicis

Mario Vilar

25 de gener de 2024

Universitat de Barcelona



Índex

1

Els nombres reals

Exercici 1.1. *Siguin $A, B \subset \mathbb{R}$ tals que $A \cap B \neq \emptyset$.*

1. *Trobeu un parell de conjunts A, B complint que $A \cap B$ és acotat i A i B no estan acotats ni superior ni inferiorment.*
2. *Demostreu que si A, B estan acotats superiorment, llavors:*
$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\} \tag{1.1}$$
3. *Demostreu que si A, B estan acotats inferiorment, llavors:*
$$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\} \tag{1.2}$$
4. *Demostreu que encara que A i B estiguin acotats, les desigualtats anteriors poden ser estrictes.*

Demostració.

1. Podem prendre, per exemple, $A = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$ i $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. D'aquesta manera, $A \cap B = \sqrt{2}$, que està acotat (tant superiorment com inferiorment) i A, B no estan acotats.
2. Siguin A, B dos conjunts acotats superiorment; és a dir, tals que $x \leq |M|$ per a tot $x \in A$ i $y \leq |N|$ per a tot $y \in B$. Sigui $x \in A \cap B$. Com que $x \in A$, $x \leq \sup A$ i, com $x \in B$, $x \leq \sup B$; en particular, si $\sup A \leq \sup B$ tenim $x \leq \sup A \cap B \leq \sup B$; si $\sup A \geq \sup B$ aleshores es dona $x \leq \sup A \cap B \leq \sup A$. En definitiva, $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ i tenim una cota superior d'$A \cap B$; en particular, obtenim (1.1).
3. Anàlogament, siguin A, B dos conjunts acotats inferiorment; és a dir, tals que $x \geq |M|$ per a tot $x \in A$ i $y \geq |N|$ per a tot $y \in B$. Sigui $x \in A \cap B$. Com que $x \in A$, $x \geq \inf A$ i, com $x \in B$, $x \geq \inf B$; en particular, si $\inf A \leq \inf B$ tenim $x \geq \inf A \cap B \geq \inf B \geq \inf A$; si $\inf A \geq \inf B$ aleshores es dona $x \geq \inf A \cap B \geq \inf A \geq \inf B$. En definitiva, $x \geq \max\{\sup A, \sup B\}$ i tenim una cota inferior d'$A \cap B$; en particular, obtenim (1.2).
4. Ara suposem que existeixen $M, N > 0$ tals que $|x| < M$ i $|y| < N$, $M > N$ sense pèrdua de generalitat, per a tot $x \in A$ i $y \in B$. Prenem, per exemple, $A = \{0, 1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 4\}$: és clar que $\sup A \cap B = \{1\}$, i $1 < \min\{\sup A, \sup B\} = 3$. Podríem trobar un exemple anàleg per al cas de la cota inferior[1]. ■

Observació 1.2 (Observacions de classe). Per exemple, $A = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$ i $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, intersecció no buida i acotada, cap dels dos conjunts acotats. Per l'apartat (b), simplement notem que si $x \in A \cap B$, $x \leq \sup A$ i $x \leq \sup B$. En particular, és més petit o igual que el mínim entre els dos (si està acotat per $\sup A$ i $\sup B$, ens quedem amb la cota *menys restrictiva*).

[1] És un exemple, no pas una demostració, perquè simplement ens demanen l'existència (*poden* ser estrictes).q

Exercici 1.3. *Siguin $A, B \subset \mathbb{R}$ no buits acotats superiorment. Demostreu que $A \cup B$ és acotat superiorment i*

$$\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B)$$

Demostració. Hem de comprovar que $\sup(\sup A, \sup B)$ reuneix totes les condicions per ser el suprem d'$A \cup B$; això és, compleix ser una cota superior del conjunt $A \cup B$ i, en particular, ser la més petita del conjunt de cotes superiors.

1. $\sup(\sup A, \sup B)$ és una cota superior d'$A \cup B$. En efecte, si $x \in A \cup B$, o bé $x \in A$ o bé $x \in B$ (o bé en els dos). Sigui com sigui, $x \in A$ implica que $x \leq \sup A$ (respectivament $x \leq \sup B$). En particular, x és menor igual al suprem d'aquestes dues quantitats: $x \leq \sup(\sup A, \sup B)$.
2. Per a tot β cota superior d'$A \cup B$, $\sup(\sup A, \sup B) \leq \beta$. En efecte, si β és una cota superior d'$A \cup B$, per a tot $x \in A \cup B$ es dona que $x \leq \beta$.
   - Si $x \in A$, $x \leq \beta$ i $x \leq \beta$ dona $\sup A \leq \beta$.
   - Si $x \in B$, $x \leq \beta$ i $x \leq \beta$ dona $\sup B \leq \beta$.

   Per tant, $\sup(\sup A, \sup B) \leq \beta$. ■

Observació 1.4. És equivalent si canviem $\sup(\sup A, \sup B)$ per $\max\{\sup A, \sup B\}$.

Exercici 1.5. *Siguin A, B dos conjunts no buits de nombres reals i $C = \{x + y \in \mathbb{R} \mid x \in A, y \in B\}$. Demostreu que:*

1. *Si A, B estan acotats superiorment, llavors C està acotat superiorment i $\sup C = \sup A + \sup B$.*
2. *Si $\lambda > 0$ i $A_\lambda = \{\lambda x \mid x \in A\}$, i A està acotat superiorment, aleshores A_λ està acotat superiorment i que $\sup A_\lambda = \lambda \sup A$.*
3. *Si A està acotat superiorment, demostreu que el conjunt $-A = \{-a \mid a \in A\}$ té ínfim i que $\inf(-A) = -\sup A$.*
4. *Si A, B estan acotats inferiorment, aleshores C està acotat inferiorment i $\inf C = \inf A + \inf B$.*

Demostració.

1. Si $x \in C$, existeixen $a \in A$ i $b \in B$ tals que $c = a + b \leq \sup A + \sup B$. Sigui β una cota superior de C. Fixem $a \in A$; llavors, per a tot $b \in B$, $a + b$ viu a C. Així doncs:

   $$a + b \leq \beta \implies \forall b \in B, b \leq \beta - a \implies \beta - a \text{ cota superior d'} A \implies \sup B \leq \beta - a.$$

   Aleshores, per a tot $a \in A$, $a \leq \beta - \sup B$. $\beta - \sup B$ és una cota superior d'A i $\sup A \leq \beta - \sup B$.
2. Hem de dividir la demostració en dos parts, com a l'exercici anterior.
   - $\lambda \sup A$ és una cota superior de A_λ. En efecte, si $x \in A\lambda$, existeix $y \in A$ tal que $x = \lambda y$. Com que $y \in A$, $y \leq \sup A$,

     $$\lambda y = x \leq \lambda \sup A.$$

- β és una cota superior d'A_λ implica que per a tot $y \in A_\lambda$, $y \leq \beta$. Si $x \in A$, $\lambda x \in A_\lambda$ i, a aquest efecte, $\lambda x \leq \beta$. Com $\lambda > 0$, $x \leq \frac{\beta}{\lambda}$. Per tant, $\frac{\beta}{\lambda}$ és una cota superior d'A i $\sup A \leq \frac{\beta}{\lambda}$; en altres paraules, $\lambda \sup A = \beta$.

3. Anàlogament, $-\sup A$ és cota inferior de $-A$ perquè si $y \in -A$ existeix $x \in A$ tal que $y = -x$; així, $x \leq \sup A \iff -\sup A \leq -x = y$. A més, β és cota inferior de $-A$ perquè per a tot $x \in A$ tenim $\beta \leq -x \iff x \leq -\beta$; és a dir, $-\beta$ és una cota superior d'A i $\sup A \leq -\beta$. Equivalentment, $\beta \leq -\sup A$.
4. Només cal observar que si C està acotat inferiorment, llavors $-C$ està acotat superiorment i donat que $-C = (-A) + (-B)$, la relació a provar és consqüència directa dels apartats primer i tercer. ■

Exercici 1.6. *Sigui $(a_n)_n$ una successió de nombres reals no acotada superiorment. Demostreu que existeix una parcial $(a_{n_k})_k$ d'$(a_n)_n$ tal que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.*

Demostració. Si una successió $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ no està acotada superiorment, per a tot $M > 0$ existeix un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$. Hem de justificar-ho mitjançant un argument de recurrència:

$M = 1$ Existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} > 1$.

$M = 2$ Com que $(x_n)_{n \geq n_1+1}$ no està acotada superiorment, existeix un n_2 tal que $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$, $x_{n_2} > 2$.

- Per recurrència, definim $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ tal que $x_{n_k} > k$ i $(x_n)_{n\geq n_k+1}$ no acotat superiorment implica que $M = k+1$ i
$$\exists n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k \mid x_{n_{k+1}} > k+1,$$
així que tenim una parcial $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $x_{n_k} > k$ i $x_{n_k} \to \infty$ quan $k \to \infty$. ■

Exercici 1.7. *Siguin $(p_n)_n$ i $(q_n)_n$ successions de nombres enters no nuls.*

1. *Si $(p_n)_n$ és una successió de Cauchy de nombres enters, demostreu que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_n = p_{n_0}$ per a qualsevol $n \geq n_0$.*
2. *Suposem ara que es compleix que:*
   - 2.1. *La successió $(q_n)_n$ és aoctada.*
   - 2.2. *La successió $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ convergeix cap a $x \in \mathbb{R}$.*

   Demostreu que x és racional.

Demostració.

1. Si $(p_n)_n$ és de Cauchy, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ es compleix $p_n = p_{n_0}$ (és perquè agafem nombres enters). En aquests casos, també es diu que $(p_n)_n$ és quasi-constant. Per tant, prenent $\varepsilon = 1$ existeix n_0 tal que $\forall n \geq n_0$, $|p_n - p_{n_0}| < 1$ i, com $p_n, p_{n_0} \in \mathbb{Z}$, $p_n = p_{n_0}$.
2. Si $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n \subset \mathbb{Q}$ tal que $(q_n)_n$ acotat i $\frac{p_n}{q_n} \to x$. Com $(q_n)_n \subset \mathbb{Z}$ acotada, la unió numerable de punts de $(q_n)_n$, és a dir, $\bigcup_n \{q_n\}$, està continguda en $[-N, N] \cap \mathbb{Z}$, que és un conjunt finit.

Si $\dfrac{p_n}{q_n}$ convergeix, en particular és acotat. Si, a més, q_n acotat per hipòtesi, p_n és necessàriament acotat (el producte de dos quantitats acotades és acotat). Per l'argument anterior, $\bigcup_m \{p_m\} \subset [-M, M] \cap \mathbb{Z}$ és finit i el conjunt $\bigcup_n \{\dfrac{p_n}{q_n}\}$ té cardinal finit (tindrà tants elements com combinacions d'elements de p, q puguem fer, però com són finites el cardinal resultant també ho serà). En particular, existeix $0 < \varepsilon$ tal que:

$$\varepsilon = \min\left\{\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_m}{q_m}\right|, \frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p_m}{q_m}\right\}.$$

Però com la successió $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_n$ és convergent, compleix la condició de Cauchy i, donat aquest $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n \geq n_0$, $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_m}{q_m}\right| < \varepsilon$. Per tant, si $m \geq n_0$, $\dfrac{p_m}{q_m} = \dfrac{p_{n_0}}{q_{n_0}}$. ■

Exercici 1.8 (E-2, W-2, 2020). *Siguin $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$ complint que per a tot $a \in A, b \in B, a \leq b$. Demostreu que A està acotat superiorment, B està acotat inferiorment i que es compleix* $\sup A \leq \inf B$.

Demostració. A està clarament acotat superiorment, perquè per a tot valor a d'A podrem trobar un valor més gran b de B, en virtut de la desigualtat de l'enunciat; en particular, $a \leq b$ i b és una cota superior d'A, és a dir, $\sup A \leq b$. Anàlogament podríem raonar que B està acotat inferiorment i $a \leq \inf B$ per a tot $A \in A$. Més en concret, $\sup A$ és una cota inferior de B i $\sup A \leq \inf B$. ■

Exercici 1.9.

1. *Comproveu que la successió de terme general $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ compleix que, donat $\varepsilon > 0$, existeix n_0 tal que per a tot $n \geq n_0$ tenim $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.*
2. *Proveu que per a tot $n \geq 1$, es compleix $|x_{2n} - x_n| \geq \frac{1}{2}$.*
3. *Demostreu que la successió $(x_n)_n$ no és de Cauchy i, per tant, no és convergent.*
4. *Sigui (y_n) una successió de nombres reals tal que per a tot $n \geq 0$, $|y_{n+1} - y_n| < \frac{1}{2^{n+1}}$. Demostreu que la successió $(y_n)_n$ és convergent.*

Demostració.

1. Notem que no ens estan demanant exactament demostrar que la successió sigui de Cauchy. Hi ha un lleuger matís; una successió és de Cauchy si, i només si, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un N tal que *per a qualssevol $m, n > N$*, es doni que $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Escrivim: $x_{n+1} = 1 + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$. És clar que $x_{n+1} > x_n$, i
$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1}.$$
A mesura que $n \to +\infty$, $|x_{n+1} - x_n| \to 0$; per tant, ja queda demostrat.
2. Ara tenim:
$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

3. No és de Cauchy perquè sí es dona $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, però acabem de veure que per a $2n \geq n+1$ succeeix $|x_{2n} - x_n| \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$. Dit planerament, els punts consecutius «disten poc entre ells», però a la llarga la diferència es «va fent gran». Com que tenim una successió en $\mathbb{R}$ que no és de Cauchy, no serà convergent. ■

Exercici 1.10. *Sigui $(x_n)_n$ una successió acotada de nombres reals. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ definim $y_n = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ i $z_n = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Demostreu $(y_n)_n$ i $(z_n)_n$ són successions convergent i que $\lim_n y_n \leq \lim_n z_n$.*

Demostració. A priori no podem dir que $(y_n)_n$ i $(z_n)_n$ siguin convergents, ja que necessitem d'una hipòtesi molt important: $(x_n)_n$ és acotada, és a dir, existeix un $M \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \in \mathbb{N}$ tenim $|x_n| \leq M$.

$$\begin{aligned} y_n &= \min\{x_1, \dots, x_n\} \leq \min\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq M \\ z_n &= \max\{x_1, \dots, x_n\} \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq M \end{aligned} \tag{1.3}$$

De fet, $y_n \leq x_k, \forall k \mid 1 \div n$, i $y_{n+1} \leq y_n$ és una cota inferior de $\{y_k \mid k \leq n\}$. Per tant, tenim una successió decreixent (no estrictament, però). Anàlogament, $(z_n)_n$ és una successió estrictament creixent on z_{n+1} és una cota superior de $\{z_k \mid k \leq n\}$. Com per (1.3) totes dues estan acotades, $(y_n)_n$ i $(z_n)_n$ són convergents. ■

Exercici 1.11. *Siguin $(a_k)_k, (b_k)_k, (x_k)_k$ tres successions de nombres reals complint les següents propietats:*

1. *Per a tot $k \geq 1$, $a_k < b_k$.*
2. $\lim_k (b_k - a_k) = 0$.
3. *Per a tot $k \geq 1$, el conjunt $\{n \mid x_n \notin (a_k, b_k)\}$ és finit.*

Demostreu:

1. *La successió $(x_n)_n$ és convergent.*
2. *Si x és el límit de $(x_n)_n$, llavors $a_k \leq x \leq b_k$ per a tot $k \geq 1$.*
3. $\lim_k a_k = \lim_k b_k = x$.

Demostració.

1. Per hipòtesi tenim que la resta $b_k - a_k$ convergeix. Donat $\varepsilon > 0$, existeix k_0 tal que $|b_{k_0} - a_{k_0}| < \varepsilon$. La hipòtesi ens dona que el conjunt $\{n \mid x_n \in (a_{k_0}, b_{k_0})\}$ és finit[2]; sigui, doncs, una parcial $x_{n_k} \subset (a_{k_0}, b_{k_0})$. Si prenem dos valors de la parcial $x_{n_\lambda}, x_{n_\ell}$, $\lambda, \ell \geq n_0$,

$$|x_{n_\ell} - x_{n_\lambda}| \leq |b_{k_0} - a_{k_0}| < \varepsilon \implies (x_{n_k})_k \text{ és una parcial convergent.}$$

2. Ja hem vist que existeix una parcial convergent, $(x_{n_k})_k$, formada per aquells x_n tals que n no forma part del conjunt $\{n \mid x_n \in (a_{k_0}, b_{k_0})\}$. **Notem que l'existència d'una parcial convergent no implica que la successió sigui convergent**[3]. Hem de veure si el límit d'$(x_n)_n$ existeix, i l'anomenarem x. Tenim $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ i, prenent límits quan $n_k \to \infty$, $a_k \leq x \leq b_k$.

[2] Això vol dir que podrem trobar un valor de n que no compleixi la condició, això és, que existirà un valor de la successió $(x_n)_n$ dins l'interval (a_{k_0}, b_{k_0}).

[3] El que sí sabem, però, és que si existeix una parcial que divergeix, *aleshores* la successió general no convergeix tampoc.

3. Finalment, a partir de la desigualtat $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$, prenem els límits ara quan $k \to \infty$. Acabem obtenint:

$$\lim_k a_k \leq x \leq \lim_k b_k$$

Restant $\lim_k a_k$ a tot arreu, veiem que, en efecte, $\lim_k a_k = \lim_k b_k = x$. ■

Observació 1.12 (Possibles dubtes sobre aquest exercici).

1. Si la resta $b_k - a_k$ convergeix, podríem definir $z_k = b_k - a_k$ convergent (en $\mathbb{R}$, també de Cauchy) tal que $\forall \varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ amb què per a tot $\alpha \geq n_0$ es compleix $|b_\alpha - a_\alpha| < \varepsilon$?
2. No es podria utilitzar el **lema del Sandvitx**, de manera que si $k, n \to \infty$ es dona que $a_k = b_k = x_n$? És dubtós, donat que hauríem de demostrar que b_k (amb $k \to \infty$) no està acotat, ja que en cas contrari no es podria utilitzar tal lema.

Exercici 1.13 (E-3, W-2, 2020). *Sigui $A \subset \mathbb{R}$. Demostreu que A és obert si, i només si, per a tota successió $(a_n) \subset \mathbb{R}$ convergent a $a \in A$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$, $a_n \in A$.*

Demostració. Exercici típic d'una assignatura de Topologia.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si A és obert, tot punt d'A és interior; per a tot $x \in A$ existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$[4]. En efecte, com $(a_n)_n \to a \in A$, existeix n_0 tal que per a tot $n \geq n_0$ i $\delta > 0$, $|x_n - a| < \delta$. Agafant $\delta = \varepsilon$ ja hem acabat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Per contrarrecíproc, suposarem que A no és obert, i acabarem demostrant que existeix $(a_n)_n \to a$ tal que $a_n \notin A$. Si A no és obert, hi ha com a mínim un punt d'A que no és interior, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathring{A}$, i $B_\varepsilon(a) \not\subset A$ per a tot $\varepsilon > 0$. Ara prenem $(a_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $a_n \to a$. En particular, per a cada $n \geq 1$ existeix $a_n \in B\left(a, \frac{1}{n}\right) \setminus A$ (ja que, per exemple, $B_\varepsilon(a) \not\subset A$). Es compleix doncs per una banda que $|a_n - a| < \frac{1}{n}$; per l'altra, que per a tot $n \geq 1$, $a_n \notin A$. ■

2 Continuïtat en espais mètrics

Exercici 2.1. *Sigui $(x_n)_n$ una successió en un espai mètric (X, d).*

1. *Demostreu que si $(x_n)_n$ és convergent cap a $x \in X$, llavors les successions $(x_{2n})_n$ i $(x_{2n+1})_n$ són convergents cap a x.*
2. *Si $(x_{2n})_n$ i $(x_{2n+1})_n$ són convergents, és pot assegurar que la successió $(x_n)_n$ és convergent?*
3. *Si les successions $(x_{2n})_n$ i $(x_{2n+1})_n$ són convergents cap a $x \in X$, demostreu que la successió $(x_n)_n$ és convergent cap a x.*

[4] On $B_\varepsilon(x)$ són aquells y tals que $|x - y| < \varepsilon$. El nostre argument ara serà aplicar la definició de convergència.

4. *Demostreu que si existeixen dues successions parcials $(x_{\sigma(n)})_n$ i $(x_{s(n)})_n$ que convergeixen a $x \in \mathbb{R}$ i tals que $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, llavors $(x_n)_n$ convergeix a x.*

Demostració.

1. Per definició de convergència, quan $n \to \infty$ aleshores $x_n \to x$. És clar que quan $n \to \infty$, es dona que $2n \to \infty$ i $2n+1 \to \infty$, també. Per tant, totes dues parcials convergeixen al mateix límit x.
2. Rarament les implicacions contràries són certes, i aquest cas no és una excepció. Hem de trobar una successió $(x_n)_n$ no convergent amb parcials convergents, no necessàriament amb mateix límit. És conegut que $((-1)^n)_n$ no convergeix; en canvi, $((-1)^n)_{2n}$ i $((-1)^n)_{2n+1}$ sí ho són perquè ambdues prenen valor constant 1 i -1, respectivament.
3. La diferència amb l'apartat anterior és que prenem com a hipòtesi que ambdues parcials convergeixen cap al *mateix límit*. L'enunciat, doncs, és cert, ja que $2n$ i $2n+1$ creen una *partició dels naturals*; això és, cada n és combinació lineal de $2n$ i $2n+1$. En definitiva, $(x_n)_n$ és convergent i quan $n \to \infty$, $(x_n)_n \to x$.

† Siguin $(x_n)_{2n}$ i $(x_n)_{2n+1}$ les corresponents parcials. Si $(x_n)_{2n} \to x$ quan $2n \to \infty$, existeix un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_1$ tenim $|x_{2n} - x| < \varepsilon$. Anàlogament, podem trobar $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_2$ es doni $|x_{2n+1} - x| < \varepsilon$. Ara, sigui $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$ (quin és el valor més *avançat* de la successió) i prenem:

$n = 2k$ Tenim $n = 2k \geq 2n_1 \geq n_1$, de manera que, no solament $n \geq n_1$, sinó que $k \geq n_1$, i $|x_n - x| = |x_{2k} - x| < \varepsilon$.

$n = 2k+1$ Tenim $n = 2k+1 \geq 2n_2 + 1 \geq n_2$, de manera que, no solament $n \geq n_2$, sinó que $k \geq n_2$, i $|x_n - x| = |x_{2k+1} - x| < \varepsilon$.

Com es compleix per ambdós $n = 2k$ i $n = 2k+1$, es compleix per a tot n, i ja hem acabat.

4. Ve a ser la generalització de l'apartat anterior, que ja era cert. ■

Feta a classe.

1. Si $(x_n)_n \to x$, aleshores per a tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que per a tot $n \geq n_0$ tenim $d(x_n, x) < \varepsilon$. Per al cas $(x_{2n})_n$, tenim $2n \geq 2n_0 \geq n_0$ i, per tant, $d(x_{2n}, x) < \varepsilon$ i $x_{2n} \to x$. Anàlogament, $x_{2n+1} \to x$.
2. El contraexemple $(x_n)_n = (-1)^n$.
3. Per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_1$, la distància $d(x_{2n}, x) < \varepsilon$. Anàlogament, existeix $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_2$, la distància $d(x_{2n+1}, x) < \varepsilon$. Prenem $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Aleshores, per a tot $n \geq n_0$ tenim el que volem.
4. El raonament és el mateix. Hem de veure que si existeixen $(x_{\sigma(n)})_n$ i $(x_{\rho(n)})_n$ parcials de $(x_n)_n$ tal que $x_{\sigma(n)} \to x$ i $x_{\rho(n)} \to x$ aleshores $x_n \to x$. En efecte, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ (n_2) tal que per a tot $n \geq n_1$ $(n \geq n_2)$, la distància $d(x_{\sigma(n)}, x) < \varepsilon$ $(d(x_{\rho(n)}, x) < \varepsilon)$. Ara, prenem $n_0 = \max\{\sigma(n_1), \rho(n_2)\}$.

Aleshores:

$$n \geq n_0 \begin{cases} n = \sigma(k), & \text{on } \sigma(k) = n \geq n_0 \geq \sigma(n_1) \implies k \geq n_1 \implies d(x_{\sigma(k)}, x) = d(x_n, x) < \varepsilon. \\ n = \rho(k), & \text{on } \rho(k) = n \geq n_0 \geq \rho(n_2) \implies k \geq n_2 \implies d(x_{\rho(k)}, x) = d(x_n, x) < \varepsilon. \end{cases}$$

Per tant, ja hem acabat. ■

Exercici 2.2. *Sigui $(x_n)_n$ una successió en un espai mètric (X, d) de manera que les parcials $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$ i $(x_{3n})_n$ convergeixen. Demostreu que (x_n) convergeix.*

Demostració. A la hipòtesi de 2.1, apartat 2., li sumem que $(x_{3n})_n$ també és convergent. Totes elles són convergents a uns límits que anomenarem ℓ (per a $(x_{2n})_n$), ℓ' (per a $(x_{2n+1})_n$) i ℓ'' (per a $(x_{3n})_n$). Hem de veure que $\ell = \ell' = \ell''$ i podrem aplicar 2.1, apartat 3.. En efecte, agafem una parcial d'ambdues $(x_{2n})_n$ i (x_{3n}), per exemple, $(x_{6n})_n$. Aquesta parcial, quan $n \to \infty$ tendeix a la vegada cap a ℓ i ℓ'' per ser parcial de totes dues. Per la unicitat del límit, $\ell = \ell''$. Anàlogament trobem $\ell' = \ell''$ i ja tenim la triple igualtat desitjada. ■

Exercici 2.3. *Siguin*

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|).$$

Demostreu que d_1, d_2 són distàncies en $\mathbb{R}^2$. Representeu les boles

$$B_i((0,0),1) = \{(x,y) \mid d_i((x,y),(0,0)) < 1\}, \quad i = 1, 2$$

Demostració.

1. És la coneguda *distància de Manhattan*. La bola correspon a $B_1((0,0),1) = \{(x,y) \mid |x| + |y| < 1\}$, que si la dibuixem correspondria a la regió delimitada per $x + y = 1$, $x + y = -1$, $x - y = 1$ i $x - y = -1$ (seria un rombe).
2. Hem de provar rutinàriament les condicions de distància:
   - $d_2(p,q) = 0 \iff |p_1 - q_1| = |p_2 - q_2| = 0$ i $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$ de manera que $p = q$.
   - $d_2(p,q) = d_2(q,p)$, és evident.
   - $d_2(p,q) \leq d_2(p,r) + d_2(r,q)$:

   $$\begin{aligned} \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\} &\leq \max\{|p_1 - r_1| + |r_1 - q_1|, |p_2 - r_2| + |r_2 - q_2|\} \\ &\leq \max\{|p_1 - r_1|, |p_2 - r_2|\} + \max\{|r_1 - q_1|, |r_2 - q_2|\}. \end{aligned}$$

   La bola correspon a $B_2((0,0),1) = \{(x,y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$, que dibuixada seria un quadrat. ■

Exercici 2.4. *Proveu que*

$$d_1(f,g) = \|f,g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \quad i \quad d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

defineixen dues distàncies en l'espai $C([0,1]) = \{f \mid [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua$\}$.

Demostració.

1. Hem de provar que és una distància. És «reflexiva», ja que si $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = 0$, vol dir que per a tot x es dona $f(x) - g(x) = 0 \iff f(x) = g(x)$. És simètrica, ja que $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$. I, per últim, compleix la desigualtat triangular.

$$\begin{aligned} d_1(f,g) &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - k(x) + k(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - k(x) + \sup_{x\in[0,1]} |k(x) - g(x)| = d_1(f,k) + d_1(k,g). \end{aligned}$$

2. Comencem provant $d_2(f,g) = 0 \iff f = g$. En efecte, si $\varphi \geq 0$ i definida en $[0,1]$, $\int_0^1 \varphi = 0$ i $\int_0^1 \varphi = 0$ implica que $\varphi \equiv 0$ (resultat de *Càlcul*). Ara bé, si $\varphi \not\equiv 0$ existeix $x_0 \in [0,1]$ tal que $\varphi(x_0) > 0$ i φ contínua implica que existeix $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi(x) \geq M$ en $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$:

$$\int_0^1 \varphi \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x)\,dx \geq 2M\varepsilon > 0.$$

Hem trobat que $\varphi \equiv 0$ si i només si $\int_0^1 \varphi\,dx = 0$. Les altres dues propietats de distància surten de les propietats de les integrals. ■

Exercici 2.5. *Sigui (X,d) un espai mètric. Definim en $\tilde{d} : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ donada per:*

$$\tilde{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \textit{si } d(x,y) \leq 1 \\ 1 & \textit{si } d(x,y) > 1 \end{cases}$$

1. *Demostreu que $\tilde{d}$ és una distància.*
2. *Demostreu que si $(x_n)_n \subset X$ llavors $(x_n)_n \to x$ en (X,d) si, i només si, $(x_n)_n \to x$ en $(X,\tilde{d})$.*

Demostració.

1. Si $\tilde{d}(x,y) = 0$ aleshores $d(x,y) \leq 1$, $0 = \tilde{d}(x,y) = d(x,y)$ i $x = y$. La simetria $\tilde{d}(x,y) = d(x,y)$ és evident, per la mateixa definició de $\tilde{d}$. La desigualtat triangular se segueix d'aquí:

$$\tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z) = \begin{cases} 2, & \text{si } d(x,y), d(y,z) > 1, \\ d(x,y) + 1, & \text{si } d(x,y) \leq 1 \text{ i } d(y,z) > 1, \\ 1 + d(y,z), & \text{si } d(x,y) > 1 \text{ i } d(y,z) \leq 1, \\ d(x,y) + d(y,z), & \text{si } d(x,y), d(y,z) \leq 1, \end{cases}$$

Considerem $\tilde{d}(x,z)$. Si $\tilde{d}(x,z) \leq 1$, aleshores $\tilde{d}(x,z) = d(x,z) \leq 1$ i, utilitzant les fórmules anteriors, deduïm que en tots els casos possibles $\tilde{d}(x,z) \leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)$. Si $d(x,z) > 1$, llavors $\tilde{d}(x,z) = 1 < d(x,z)$ i, tornant a les fórmules anteriors, $\tilde{d}(x,z) \leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)$.

2. Prenem la següent distància acotada per 1: $d^*(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Efectivament, $d^*(x,y)$ és un distància: $d^*(x,y) = 0$ si, i només si, $d(x,y) = 0$, i $d(x,y) = 0$ si, i només si $x = y$. Clarament, a més, es compleix la simetria. Pel que fa a la desigualtat triangular:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [0,+\infty) & \longrightarrow & [0,1) \\ & t & \longmapsto & \varphi(t) = \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t} \end{array} \quad \varphi \text{ és monòtonament creixent.}$$

La inversa ve definida per $\varphi^{-1}(t) = \dfrac{1}{1-t}$. Amb això, $d^*(x,y) = \varphi(d(x,y))$ i:

$$\begin{aligned} d^*(x,z) &= \varphi(d(x,z)) \leq \varphi(d(x,y)+d(y,z)) \\ &= \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d^*(x,y)+d^*(y,z). \end{aligned}$$

Com d^* és una distància, (X,d^*) és un espai mètric. Si $x_n \to x$ en (X,d), tenim que:

$$0 \leq d^*(x_n,x) \leq \frac{d(x_n,x)}{1+d(x_n,x)} \leq d(x_n,x) \to 0 \implies d^*(x_n,x) = 0.$$

Si fos $x_n \to x$ per a (X,d^*), $d^*(x_n,x) \to 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d^*(x_n,x) < \varepsilon = \frac{1}{2}$. Per tant, per a tot $n \geq n_0$:

$$0 \leq d(x_n,x) \overset{5}{=} \varphi^{-1}(d^*(x_n,x)) = \frac{d^*(x_n,x)}{1-d^*(x_n,x)} \leq \frac{d^*(x_n,x)}{2} = 2 \cdot d^*(x_n,x) \to 0.$$

Per tant, $d(x_n,x) \to 0$. Com que tant d^* com $\tilde{d}$ viuen en $[0,1]$, havent demostrat el resultat per d^* ens val per $\tilde{d}$. ∎

Exercici 2.6. *Sigui $B \subset \mathbb{R}$ tancat i $K \subset \mathbb{R}$ compacte. Proveu que el conjunt $B+K = \{x+y \mid x \in B, y \in K\}$ és tancat.*

Demostració. Sigui $(z_n)_n \subset B+K$ tal que $z_n \to z \in \mathbb{R}$. Com podem veure que $z \in B+K$? Per a tot $z_n \in B+K$, existeix $b_n \in B$ i $k_n \in K$ tal que $z_n = b_n + k_n$. Prenent aquesta successió $(k_n)_n \subset K$, K compacte, existeix una parcial $(k_{n_j})_j$ de $(k_n)_n$ i $k \in K$ tal que $k_{n_j} \to k$[6]. Pel que fa a $(b_{n_j})_j$ de B tancat, $x_{n_j} = b_{n_j} + k_{n_j} \iff b_{n_j} = z_{n_j} - k_{n_j}$ i, per tant, $b_{n_j} \to z - k$. Posem $b_{n_j} \to z - k = b$ i d'aquí traiem que $z = k + b \in B+K$. ∎

Exercici 2.7. *Sigui (E,d) un espai mètric. Demostreu que si $(x_n)_n \subset E$ convergeix cap a x, llavors $K = \bigcup_n \{x_n\} \cup \{x\}$ és compacte. És $K' = \bigcup_n \{x_n\}$ un compacte?*

[5] Fixem-nos, $d^*(x_n,x) = \varphi(d(x_n,x))$ i d'aquí té sentit $\varphi^{-1}(d^*(x_n,x))$.
[6] Recordem que si K és un compacte, aleshores tota successió en K admet una parcial convergent.

Demostració. Si $(x_n)_n \to x$ quan $n \to \infty$, existeix un n_0 tal que per a tot $\varepsilon > 0$ i per a tot $\forall n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$. Sigui $K \subset \bigcup_k A_k$ un recobriment no necessàriament finit de K, on cada A_k és un obert. Com que $x \in K$, existeix k_0 tal que $x \in A_{k_0}$. Es dona que $x_n \in A_{k_0}$ per a tot $n \geq n_0$. Així doncs, per a cada $i = 1 \div n_0$ tindrem un nombre finit d'oberts A_i tal que $x_i \in A_i$. Per tant,

$$K \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n_0} A_i \right) \cup A_{k_0}$$

és un subrecobriment finit de K i K és un compacte. Per la segona part, prenem $(x_n)_n = (1 - \frac{1}{n})_n$: en efecte, $x_n \to 1$ però $1 \notin K'$, amb el que K' no és tancat i, per tant, tampoc és compacte. ■

Exercici 2.8. *Sigui (X, d) un espai mètric i $D \subset X$ un subconjunt complint les següents propietats:*

1. *Per a cada $x \in X$ i $\varepsilon > 0$, existeix $y \in D$ amb $d(x, y) < \varepsilon$.*
2. *Per a cada successió de Cauchy en D, $(x_n)_n \subset D$, existeix $x \in X$ tal que $\lim_n x_n = x$.*

Demostreu:

1. *Si $(x_n)_n \subset X$ és una successió de Cauchy en X, existeix una successió $(y_n)_n \subset D$ de Cauchy en D tal que $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$.*
2. *X és un espai mètric complet.*

Observació 2.9. Primer de tot notem que si per a tot $x \in X$ i $\varepsilon > 0$, existeix $y \in D$ amb $d(x, y) < \varepsilon$, sempre podem construir una bola centrada en x i de radi $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset$. En altres paraules, una de les condicions que demanem és que D sigui dens en X.

Demostració.

1. Si $(x_n)_n \subset X$ és una successió de Cauchy en X, existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a qualssevol $a, b \geq n_0$, $|x_a - x_b| < \varepsilon$. Prenent *1.*, per a cada x_n existeix un y_n tal que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. De fet, $(y_n)_n$ és també una successió, però falta veure que sigui de Cauchy:

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) < \frac{1}{n} + d(x_n, x_m) + \frac{1}{m} \overset{7}{<} \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

   És equivalent trobar $d(y_n, y_m) < 3\varepsilon$ que $|y_n - y_m| < 3\varepsilon$, de manera que ja hem acabat.

2. Per demostrar que X és complet, hem de veure que tota successió de Cauchy continguda en X convergeix a un element d'X. Aplicant *1.* un altre cop, existeix una $(y_n)_n \subset D$ tal que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Ara doncs, per *2.*, $(y_n)_n \to y \in X$. Volem veure que també $(x_n)_n \to y$. En efecte,

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, y) < \frac{1}{n} + d(y_n, y)$$

[7] Hem de ser bastant rigorosos, ja que $n \neq m$. Triem un $n_1 \geq 1$ tal que per a tot $n \geq n_1$ tenim $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Anàlogament, n_2 tal que $n \geq n_2$ impliqui $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Al seu torn, usem que $(x_n)_n$ és de Cauchy per acotar $d(x_n, x_m)$: un $n_3 \geq 1$ tal que per a tot $n, m \geq n_3$ es compleix $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Ara ens quedem amb $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$.

I això últim tendeix a 0, ja que $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ i $\lim_n y_n = y$ (0, equivalentment, $d(y_n, y) \longrightarrow 0$ quan $n \longrightarrow \infty$), com volíem. ■

Exercici 2.10. *Demostreu que en un espai normat X, si $a \in X$ i $r > 0$, l'adherència de la bola oberta $B(a,r) = \{x \in X \mid \|x-a\| < r\}$ és la bola tancada $B'(a,r) = \{x \in X \mid \|x-a\| \leq r\}$.*

Demostració. Prenem la bola $B'(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$, on $S(a,r) = \{x \mid \|x-a\| = r\}$. Hem de provar les dues inclusions:

- $\subset$ $B(a,r) \subset B'(a,r)$ és per definició, i $\overline{B(a,r)} \subset B'(a,r)$ és molt clar.
- $\supset$ Volem $B'(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$. Només ens cal veure que $S(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$. En efecte, si $b \in S(a,r)$ triem $(\lambda_n)_n \subset (0,1)$ tal que $\lim_n \lambda_n = 1$; llavors, poem escriure $b = \lim_n b_n$, on $b_n = a + \lambda_n(b-a)$ i es compleix que $b_n \in B(a,r)$; doncs:

$$\|b_n - a\| = \lambda_n \|b-a\| = \lambda_n r < r.$$

En definitiva, $b \in \overline{B(a,r)}$. ■

Exercici 2.11. *Sigui $(X, \|\cdot\|)$ un espai normat. Demostreu que per a cada $r > 0$, X és homeomorf a la bola $B(0,r)$.*

Demostració. Fixem $r > 0$ i prenem $\varphi : X \longrightarrow B(0,r)$ definida per $x \longmapsto \frac{rx}{1+\|x\|}$ (no posem $\frac{rx}{\|x\|}$ per estalviar-nos problemes en el 0). Efectivament, $\varphi \in C(X)$ per ser composició de funcions contínues i

$$\|\varphi(x)\| = \frac{r\|x\|}{1+\|x\|} < r \xrightarrow{\varphi(x)=y} \|x\| = \frac{\|y\|}{r-\|y\|} \implies \varphi^{-1}(y) = \frac{1+\frac{\|y\|}{r-\|y\|}}{r}. \tag{2.1}$$

Definim, a partir de (2.1), $\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{r-\|y\|}$ per a $y \in B(0,r)$, que és contínua, i

$$\varphi(\varphi^{-1}(y)) = \frac{r \cdot \frac{y}{r-\|y\|}}{1+\frac{\|y\|}{r-\|y\|}} = y \implies \varphi \text{ contínua i bijectiva} \implies \varphi \text{ homeomorfisme.}$$ ■

Exercici 2.12. *Sigui:*

$$\ell^1 = \left\{ (a_n)_n \subset \mathbb{R} \;\middle|\; \|(a_n)_n\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}.$$

1. *Comproveu que ℓ^1 és un espai normat.*
2. *Comproveu que la bola $B = \{(a_n)_n \in \ell^1 \mid \|a_n\|_n < 1\}$ és un obert de ℓ^1.*
3. *Sigui $N \geq 1$ i:*

$$A_N = \{(a_n)_n \in \ell^1 \mid a_n > 0, n = 1 \div N, a_n = 0 \forall n > N\}.$$

Demostreu que A_N no és un subconjunt obert de ℓ^1. És $A_+ = \{(a_n)_n \in \ell^1 \mid a_n \geq 0, n \geq 1\}$ un subconjunt obert de ℓ^1?

4. *Per a tot $N \geq 1$ considerem $e^N = (e^N_n)_n \in \ell^1$ la successió definida per $e^N_N = 1$ i $e^N_n = 0$ si $n \neq N$ i definim $A = \bigcup_N \{e^N\}$. Si denotem per $[A]$ l'espai de combinacions lineals finites d'A, demostreu que $[A]$ és dens en ℓ^1.*

Demostració.

1. Rutinari.
2. Prenem $a = (a_n)_n \in B$, $r = 1 - \|a\|_1 > 0$. Si $b = (b_n)_n \in B(a, r)$, $\|b\|_1 < \|b - a\|_1 + \|a\|_1 < r + \|a\|_1 = 1$; d'aquesta manera, $B(a, r) \subset B$, com volíem veure.
3. Hi ha prou amb provar que si $a = (a_n)_n \in A_N$, existeixen punts de A^c_N tant a prop com vulguem d'a; en altres paraules, donats $a \in A_n$ i $\varepsilon > 0$, $A^c_N \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset$. Notem que ara mateix tenim $a = (a_1, \ldots, a_N, 0, \ldots, 0)$. Prendrem $b = (a_1, \ldots, a_N, \frac{\varepsilon}{2}, 0, \ldots, 0)$ de manera que:

$$b = (b_n)_n = \begin{cases} a_k & \text{si } k = 1 \div N, \\ \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } k = N + 1, \\ 0 & \text{si } k > N + 1. \end{cases}$$

Així, si restem coordenada a coordenada tenim $\|b - a\|_1 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

L'argument és similar. La sèrie $\sum |a_n| < \infty$ si, i només si, $a_n \longrightarrow 0$ i existeix un n_ε tal que $|a_{n_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Siguin, doncs, $(a_n)_n = (a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varepsilon}, a_{n_\varepsilon + 1}, \ldots)$ i $(b_n)_n = (a_1, a_2, \ldots, -\frac{\varepsilon}{2}, a_{n_\varepsilon+1}, \ldots)$, és a dir:

$$b = (b_n)_n = \begin{cases} a_k & \text{si } k \neq n_\varepsilon, \\ -\frac{\varepsilon}{2} & \text{si } k = n_\varepsilon. \end{cases}$$

Així, $\|a - b\|_1 = |a_{n_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, tal com volíem.

4. Volem veure que $[A] := \{\sum_i a_i e^{N_i}\}$ compleix $\overline{[A]} = \ell^1$. Si $a = (a_n)_n \in \ell^1$, aleshores la sèrie $\sum_n |a_n|$ està acotada i, per tant, existeix N_ε tal que $\sum_{n > N_\varepsilon} |a_n| < \varepsilon$ (és convergent si la cua de la successió tendeix a 0). Al seu torn, volem veure que existeix $b \in [A]$ tal que $\|b - a\|_1 < \varepsilon$. Definim:

$$b = (b_n)_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n < N_\varepsilon, \\ 0 & \text{si } n \geq N_\varepsilon. \end{cases} \qquad \|b - a\|_1 = \sum_{n > N_\varepsilon} |a_n| < \varepsilon.$$

Tal com volíem. ■

Exercici 2.13. *Si $F \subset \mathbb{R}^n$ i $x \in \mathbb{R}^n$, es defineix al distància d'x al conjunt F per $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.*

1. *Demostreu que si $F \subsetneq \mathbb{R}^n$ i $x \in \mathbb{R}^n$, $d(x, F) = 0$ si, i només si, $x \in \overline{F}$.*
2. *Demostreu que $F \subsetneq \mathbb{R}^n$ és tancat si, i només si, per a tot $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ existeix $\delta > 0$ tal que $d(x, F) > \delta$.*

3. *Si $\rho > 0$, definim $B(F, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, F) < \rho\}$. Demostreu que:*

$$B(F,\rho) = \bigcup_{x \in F} B(x,\rho), \quad \overline{F} = \bigcap_{\rho > 0} B(F,\rho).$$

Demostració.

1. Hem de provar ambdues inclusions.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Si $d(x, F) = 0$, en particular existeix algun $y \in F$ tal que $\|x - y\| = 0$. Per definició de distància, $\|x - y\| = 0$ si, i només si, $x - y = 0 \iff x = y$. Com $y \in F$, $x \in F \subset \overline{F}$, com volíem.

   † *La solució proposada és diferent*. Si $d(x, F) = 0$, per a tot $n \in \mathbb{N}$ es compleix $d(x, F)\frac{1}{n}$ i podem crear una successió $(x_n)_n$ tal que existeix $x_n \in F$ complint $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$, de manera que $(x_n)_n \longrightarrow x$ i $x \in \overline{F}$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Si $x \in \overline{F}$, vol dir que per a tot $\varepsilon > 0$ podem prendre $B_\varepsilon(x)$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap F \neq \emptyset$; en altres paraules, per a tot $\varepsilon > 0$ i $y \in B_\varepsilon \cap F$ tenim $\|x - y\| < \varepsilon$, com volíem.

   † *La solució proposada és diferent*. Si $x \in \overline{F}$ existeix $(x_n)_n \subset F$ complint que $(x_n)_n \longrightarrow x$. En particular, $0 \leq d(x, F) \leq \|x - x_n\|$ i obtenim que $d(x, F) = 0$.

2. Un altre cop, demostrem les dues implicacions.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Si F és tancat, $\mathbb{R}^n \setminus F$ és un obert. Per tant, existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n \setminus F$; en altres paraules, si $x \in B_\varepsilon$ aleshores $x \notin F$. A més a més, per a tot $y \in F$ tenim que $d(y, \mathbb{R}^n \setminus F) \geq \varepsilon$ (en el seu defecte, per a tot $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ es compleix que $d(x, y) \geq \varepsilon$). Equivalentment, $d(x, F) \geq \varepsilon$. Triant $\delta < \varepsilon$, obtenim la desigualtat desitjada).

   $\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocament, suposem que F no és tancat. Volem veure que no existeix $\delta > 0$ tal que $d(x, F) > \delta$; això és, per a tot $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$ es dona $d(x, F) = 0$. Si F no és tancat, $F \neq \overline{F}$ i existeix $x \in \overline{F} \setminus F$. Aplicant l'apartat anterior, $d(x, F) = 0$.

3. Tenim que $\overline{F} \subset B(F, \rho)$ per a tot $\rho > 0$, gràcies al primer apartat. En particular, prenent $x \in F$ podem posar $B(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \rho\}$.

   $\boxed{\supset}$ Prenent $x \in F$ tenim $B(x, \rho)$. Per a tot $y \in B(x, \rho)$ es compleix que $0 \leq d(x, y) < \rho$ i $y \in B(F, \rho)$ ja que $d(y, F) \leq d(x, y) < \rho$.

   $\boxed{\subset}$ Sigui $y \in B(F, \rho)$. Aleshores, $\inf_{x \in F} \|x - y\| = d(y, F) < \rho$ i per a cert x tenim $d(x, y) < \rho$ de manera que $y \in B(x, \rho) \subset \bigcup_{x \in F} B(x, p)$.

   Seguint amb $\overline{F}$, ja hem vist que la inclusió $\overline{F} \subset \bigcap_{\rho > 0} B(F, \rho)$ és força evident. L'altra, en canvi, rau en el fet que l'únic conjunt que pot viure a la intersecció és aquell tal que $d(x, F) = 0$ (volem que es compleixi una desigualtat estricta per a tot $\rho > 0$) i, per tant, $\overline{F} \subset \bigcap_{\rho > 0} B(F, \rho)$. ■

Exercici 2.14.

1. *Demostreu que si* $F \subset \mathbb{R}^n$,

$$|d(x, F) - d(y, F)| \leq \|x - y\|, \; x, y \in \mathbb{R}^n.$$

2. *Sigui* $A \subsetneq \mathbb{R}^n$ *un subconjunt obert. Definim* $d_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ *per:*

$$d_A(x, y) = \|x - y\| + \left| \frac{1}{d(x, \mathbb{R}^n \setminus A)} - \frac{1}{d(y, \mathbb{R}^n \setminus A)} \right|, \; x, y \in A.$$

   2.1. *Demostreu que* d_A *està ben definida i que* d_A *és una distància en* A.

   2.2. *Demostreu que si* $(x_n)_n \subset A$ *i* $x \in A$, *llavors* $\|x_n - x\| \to 0$ *si, i només si,* $d_A(x_n, x) \to 0$.

Demostració.

1. Això és equivalent a provar que $-\|x - y\| \leq d(x, F) - d(y, F) \leq \|x - y\|$. Hem de veure, doncs, dues desigualtats: la primera és $d(y, F) \leq d(x, F) + \|x - y\|$ i $d(x, F) \leq d(y, F) + \|x - y\|$. Si intercanvio els papers de la x i la y l'una em dona l'altra, així que en tenim prou amb provar una, per exemple la segona. Prenem $z \in F$ tal que $d(z, F) \leq \|x - y\| + \|y - z\|$. En particular, tenim $d(x, F) - \|x - y\| \leq \|y - z\|$ per a tot $z \in F$. $\|y - z\|$ és una cota inferior de $d(y, F)$; prenent l'ínfim (la més gran de les cotes inferiors) tenim $\|y - z\| \leq d(y, F)$ i $d(x, F) - d(y, F) \leq \|x - y\|$.
2. Resolem els dos apartats.

   2.1. L'única observació feta a classe ha sigut que si A és un obert, aleshores $\mathbb{R}^n \setminus A$ és tancat i $d(x, \mathbb{R}^n \setminus A) = 0$ si, i només si, $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Això últim implica que per a tot $x \in A$, la distància $d(x, \mathbb{R}^n \setminus A) > 0$.

   2.2. Sigui $(x_n)_n \subset A$, $x \in A$. Hem de provar les dues implicacions:

   $\boxed{\Leftarrow}$ Com $d_A(x_n, x) \geq \|x_n - x\|$, si $d_A \to 0$, $\|x_n - x\|$ també pel fet d'estar-hi acotada.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Suposem $\|x_n - x\| \to 0$. Pel primer apartat:

$$|d(x_n, \mathbb{R}^n \setminus A) - d(x_n, \mathbb{R}^n \setminus A) \leq \|x_n - x\| \to 0$$
$$\overset{x_k, x \in A}{\Longrightarrow} d(x_k, \mathbb{R}^n \setminus A) \overset{8}{\to} d(x, \mathbb{R}^n \setminus A) \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{d(x_k, \mathbb{R}^n \setminus A)} \to \frac{1}{d(x, \mathbb{R}^n \setminus A)}.$$

   Per tant, $d_A(x_n, x) \to 0$. ■

Exercici 2.15. *Sigui* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció contínua complint que* $f(x) > 0$ *per a tot* $x \in \mathbb{R}^n$ *i que* $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$.

1. *Demostreu que* f *té un màxim absolut a* $\mathbb{R}^n$.
2. *Demostreu que* f *no té mínim absolut a* $\mathbb{R}^n$.

Demostració.

[8] Hem de notar que com $\mathbb{R}^n \setminus A$ és tancat, $\mathbb{R}^n \setminus A = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$ i bàsicament $x \notin \mathbb{R}^n \setminus A$, de manera que la distància és diferent de 0.

1. Si $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$, existeix $M > 0$ tal que per a tot $\|x\| > M$ tenim $0 < f(x) < f(0)$. Per altra banda, en el compacte $\|x\| \leq M$[9], f és contínua. Per tant, existeix $z_0 \in \mathbb{R}^n$ complint que per a tot $\|x\| \leq M$, $f(x) \leq f(z_0)$. En particular, $f(0) \leq f(z_0)$ i es compleix, doncs, que per a tot $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \leq f(z_0)$. És a dir, f té un màxim absolut en z_0.
2. Si f tingués un mínim absolut a $\mathbb{R}^n$ llavors existiria $x_0 \in \mathbb{R}^n$ complint que $f(x_0) \leq f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. En particular:
$$0 < f(x_0) \leq \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0,$$
fet que és una contradicció. ■

Exercici 2.16. *Sigui $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida com $f(x) = \ln x$, per a $x > 0$. Estudieu la continuïtat uniforme d'f en X, on:*
1. $X = (a,b)$, $0 < a < b < \infty$.
2. $X = (1,\infty)$,
3. $X = (0,1)$,
4. $X = (0,\infty)$.

Demostració.
1. Prenent a, b com ens demanen, $f \in C([a,b])$ i $[a,b]$ és un compacte; per tant, f és uniformement contínua en $[a,b]$ i ho serà en el subconjunt (a,b).
2. Posem $|f(x) - f(y)| = |\ln x - \ln y|$, $x, y > 1$. Aplicant el teorema del valor mitjà, $|\ln x - \ln y| = |\frac{1}{\xi_{x,y}}(x-y)| < |x-y|$, ja que $\xi_{x,y} \in S[x,y]$, el que implica $\xi_{x,y} > 1$; és a dir $\frac{1}{\xi_{x,y}} < 1$.
3. Prenem dues successions $(x_n)_n = \frac{1}{n}$ i $(y_n)_n = \frac{1}{2n}$; el valor absolut $|f(x_n) - f(y_n)| = \log 2$.
4. Si fos uniformement contínua en $(0,+\infty)$ també ho seria en el subinterval $(0,1)$, però com ja no ho és tenim que la funció no és uniformement contínua en $(0,+\infty)$. ■

Exercici 2.17.
1. *Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$ i $f : [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció uniformement contínua en els intervals $[a,b]$ i $[b,+\infty)$. Demostreu que f és uniformement contínua en $[a,+\infty)$.*
2. *Sigui $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \sqrt{x}$. Demostreu que f és uniformement contínua en $[0,+\infty)$.*

Demostració.
1. Com f és uniformement contínua en $[a,b]$ i $[b,+\infty)$, serà contínua en la unió $[a,b] \cup [b,+\infty) = [a,+\infty)$. La uniformitat no és evident i s'ha de demostrar. En particular, $f|_{[a,b+1]}$ també serà contínua

[9] És un compacte perquè $\|x\|$ està acotada per $-M$ i M i, a més l'interval en qüestió és tancat.

en $[a, b+1]$, ja que $f \in C([a,+\infty)) \supset C([a, b+1])$. Per tant, donat $\varepsilon > 0$, existeix $0 < \delta_1 < 1$[10] tal que si $x, y \in [a, b+1]$ i $d_X(x, y) < \delta_1$, llavors $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Per altra banda, com que f és uniformement contínua en $[b, +\infty)$, existeix $0 < \delta_2 < 1$ tal que si $x, y \geq b$ i $d_X(x, y) < \delta_2$, llavors $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Definim $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) < 1$ i siguin $x, y \in [a, +\infty)$ tals que $d_X(x, y) < \delta$. Llavors, si $x, y \in [a, b+1]$, $d_X(x, y) < \delta_1$ i, per tant $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Si $y \geq b+1$, llavors $x \geq b$ (doncs si $x < b$, es verificaria que $d_X(x, y) \geq 1 > \delta$). Per tant es compleix que $x, y \geq b$ i $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. El cas $x \geq b+1$ es faria anàlogament.

2. Necessitem prendre valors $x, y \geq 1$ (ja veurem per què). Per tant, dividirem la continuïtat uniforme en dos intervals, $[0, 1]$ i $[1, +\infty)$. Així:
$$|f(x) - f(y)| \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{|(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \overset{x,y\geq 1}{\leq} |x-y|.$$
Equivalentment, sigui $\varepsilon > 0$ i prenem $\delta = \varepsilon^2$. Aleshores, per a $|x-y| < \delta$ tenim:
$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}||\sqrt{x} + \sqrt{y}| = |x-y| < \varepsilon^2 \implies |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon.$$
Pel que fa a $[0, 1]$; en efecte, com $[0, 1]$ és un compacte i f és contínua en aquest interval, f hi ha de ser uniformement contínua. Per altra banda, a $[1, +\infty)$ és f-Lipschitz, i hi és uniformement contínua. Per l'apartat anterior, ja hem acabat. ■

Exercici 2.18. *Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per:*
$$f(x, y) = \sin\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. *És uniformement contínua la funció $g(x) = \dfrac{1}{x} \cdot f(x, \sqrt{x})$ en $(0, +\infty)$?*
2. *És uniformement contínua la funció $h(x) = x \cdot f(x, \sqrt{x})$ en $(0, +\infty)$?*
3. *Si $A \subset \mathbb{R}^2$ és acotat, és uniformement contínua f en A? I en tot $\mathbb{R}^2$?*

Demostració.

1. La funció queda definida de la següent manera:
$$g(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{x}.$$
Analitzant la funció (contínua) als punts $x \to 0^+$ i $x \to +\infty$ i veiem que:
$$\lim_{x\to+\infty} = \frac{\sin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{t\to 0^+} t\sin(t) = 0, \text{ i } \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{x} \simeq \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1+x^2} = 1.$$
Aplicant el següent resultat de teoria:

[10] S'entén que $\delta_1 < 1$ segurament perquè puguem prendre un δ_1-entorn al voltant de b?

Proposició 2.19. *Si $a \in \mathbb{R}$ i $\varphi : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua tal que existeixen els límits finits $\lim_{x \to a^+} \varphi(x)$ i $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$, llavors φ és uniformement contínua en $(a, +\infty)$.*

Obtenim que g és uniformement contínua.

2. El raonament serà similar. La funció $h(x)$ queda definida de la següent manera:

$$h(x) = x \cdot \sin\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Aleshores, podem analitzar la funció (contínua) als punts $x \to 0^+$ i $x \to +\infty$ i veiem que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{t}{1+t^2}\right)}{t} = 1 \text{ i } \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{1+t^2}\right)}{t} = \frac{\text{fitat}}{\infty} = 0.$$

De manera que podem tornar a aplicar 2.19.

3. Usarem un fet molt recurrent: si A és acotat, i com $\overline{A}$ és un tancat, resulta que $\overline{A}$ és un compacte (consultar el teorema de Heine-Börel). Com que f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i $\overline{A}$ és un compacte, f hi és uniformement contínua; en particular, serà uniformement contínua en $A \subset \overline{A}$. En canvi, f no és uniformement contínua en $\mathbb{R}^2$. Per a comprovar-ho, considerem les successions $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^2$, on

$$P_n = (0, \sqrt{2\pi n}), \quad Q_n = \left(0, \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right).$$

És fàcil veure que $\|Q_n - P_n\| = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2\pi n} \to 0$, mentre que

$$|f(Q_n) - f(P_n)| = f(Q_n) - f(P_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2\pi n) = 1 - 0 = 1$$

Per tant, no hi ha continuïtat uniforme en $\mathbb{R}^2$. ■

Exercici 2.20. *Sigui $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció uniformement contínua en $[0, +\infty)$ i $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en $[0, 1]$. Demostreu que la funció*

$$F(x) = \int_0^1 f(x+t)g(t)\, dt$$

és uniformement contínua en $[0, +\infty)$.

Demostració. Sigui $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, com que f és uniformement contínua tenim que $\forall \varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|y - \zeta| < \delta$ implica $|f(y) - f(\zeta)| < \dfrac{\varepsilon}{1 + \int_0^1 |g(t)|\, dt}$.

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_0^1 \left|f(x+t) - f(y+t)\right| \cdot |g(t)|\, dt \leq \frac{\varepsilon}{1 + \int_0^1 |g(t)|\, dt} \cdot \int_0^1 |g(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Per demostrar la continuïtat uniforme volem que $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$, volem bàsicament desplaçar l'interval d'integració una quantitat t:

$$|x + t - (y + t)| = |x - y| < \delta \implies |f(x + t) - f(y + t)| < \frac{\varepsilon}{1 + \int_0^1 |g(t)|\, dt}$$

I amb això ja hem acabat. ■

Exercici 2.21 (Típica propietat que pregunten a examen**).** *Siguin $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dues funcions uniformement contínues. Demostreu:*

1. *Si, a més, f i g són acotades llavors la funció producte fg és uniformement contínua en $\mathbb{R}$.*
2. *La funció composició $f \circ g$ és uniformement contínua en $\mathbb{R}$.*

Demostració.

1. fg és uniformement contínua en $\mathbb{R}$ si, i només si, existeix $\delta(\varepsilon)$ tal que per a tot $x, y \in \mathbb{R}$ amb $d_X(x, y) < \delta(\varepsilon)$ es dona $d_Y((fg)(x), (fg)(y)) < \varepsilon$. S'entén que $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Haurem d'aplicar que f, g són uniformement contínues totes dues. Al ser f, g acotades també, tenim $|f| \leq M_f$ i $|g| \leq M_g$ els respectius suprems. Fixem-nos:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq M_f \cdot |g(x) - g(y)| + M_g \cdot |f(x) - f(y)|. \end{aligned}$$

Si prenem $M = \max\{M_f, M_g\}$, ens queda veure com apliquem que f, g són uniformement contínues. En efecte, prenent $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_f(\varepsilon), \delta_g(\varepsilon)\}$ i fixant $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2M + 1}$ i $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M + 1}$[II] ens queda:

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq M_f \cdot |g(x) - g(y)| + M_g \cdot |f(x) - f(y)| < M\left(\frac{\varepsilon}{2M + 1} + \frac{\varepsilon}{2M + 1}\right) < \varepsilon.$$

2. $f \circ g$ és uniformement contínua en $\mathbb{R}$ si, i només si, existeix $\delta(\varepsilon)$ tal que per a tot $x, y \in \mathbb{R}$ amb $d_X(x, y) < \delta(\varepsilon)$ es dona $d_Y(f(g(x)), f(g(y))) < \varepsilon$. En efecte, prenent $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_f(\varepsilon), \delta_g(\varepsilon)\}$ i fixant $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ i $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, tenim

$$\left.\begin{aligned} |x - y| < \delta_1(\varepsilon) &\implies |g(x) - g(y)| = |z - t| < \varepsilon \\ |z - t| < \delta_2(\varepsilon) = \varepsilon &\implies |f(z) - f(t)| < \varepsilon \end{aligned}\right\} \implies |f(g(x)) - f(g(y))| < \varepsilon.$$

Així, $f \circ g$ és uniformement contínua en $\mathbb{R}$. ■

Exercici 2.22. *Un subconjunt C d'un espai mètric (X, d) es diu que és totalment acotat en X quan, per tot $r > 0$ podem recobrir C per un nombre finit de boles obertes de radi r.*

[II] A les respostes fita per $\frac{\varepsilon}{2M + 1}$, i ja en tenim prou perquè $\frac{\varepsilon}{2M + 1} < \frac{\varepsilon}{2M}$.

1. *Demostreu que, a $\mathbb{R}$ amb la distància euclidiana, un subconjunt $A \subset R$ és totalment acotat si, i només si, A és acotat.*
2. *Siguin X, Y dos espais mètrics i $f : X \longrightarrow Y$ uniformement contínua. Proveu que si A és totalment acotat en X, llavors $f(A)$ és totalment acotat en Y.*

Demostració.

1. Hem de provar les dues implicacions.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Recordem que amb la topologia euclidiana els oberts de $\mathbb{R}$ són els intervals (oberts). Si $A \subset \mathbb{R}$ és totalment acotat, el podem recobrir per un nombre finit d'intervals; és a dir, existeixen $x_1 < \ldots < x_n$ tals que:

   $$A \subset (x_1 - 1, x_1 + 1) \cup (x_2 - 1, x_2 + 1) \cup \cdots \cup (x_n - 1, x_n + 1) = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r), \ \ r = 1.$$

   Si anomenem K a aquesta unió, podem prendre un interval suficientment gran que contingui K: en efecte, si prenem $a = x_1 - 1$ i $b = x_n + 1$ tenim que $K \subset (a, b), -\infty < a \leq b < +\infty$. Per tant, A és acotat.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Si A és acotat, existeix un obert que el conté. Més formalment, existeixen $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $A \subset (a, b)$. Siguin ara $r > 0$ i $N \in \mathbb{N}$ el nombre natural més gran tal que $a + rN \leq b$; prenent $a_0 = a$ i $a_k = a_0 + rk$ per a $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tenim:

   $$A \subset (a, b) \subset \bigcup_{k=0}^{N} (a_k - r, a_k + r) \implies A \text{ totalment acotat.}$$

2. Sigui $r > 0$. Com f és uniformement contínua, existeix $s > 0$ de manera que $d_X(x, y) < s$ implica que $d_Y(f(x), f(y)) < r$. Com A és totalment acotat, existeixen $x_1, \ldots, x_N \in X$ de manera que

   $$A = \bigcup_{k=1}^{N} B_X(x_k, s) \implies f(A) = \bigcup_{k=1}^{N} B_Y(f(x_k), r).$$

   Provant que $f(A)$ és totalment acotat. En efecte, si $y \in f(A)$ llavors existeix $x \in A$ tal que $f(x) = y$. A més, tenim $x \in B_X(x_k, s)$ per un cert k amb $1 \leq k \leq N$. Com $d_X(x, x_k) < s$, tenim $d_Y(f(x), f(x_k)) < r$, que prova $y \in B_Y(f(x_k), r)$. ■

Exercici 2.23. *Sigui (E, d) un espai mètric.*

1. *Demostreu que, si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció uniformement contínua en E i $(x_n)_n \subset E$ és una successió de Cauchy llavors $(f(x_n))_n$ és una successió de Cauchy en $\mathbb{R}$.*
2. *Sigui $A \subset E$ un subconjunt no tancat d'E i $x_0 \in \overline{A} \setminus A$. Sigui $\Phi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $\Phi(x) = \dfrac{1}{d(x, x_0)}$.*

2.1. *Demostreu que Φ és contínua en A.*

2.2. *Demostreu que Φ no és uniformement contínua en A (podem utilitzar l'apartat 1.).*

Demostració.

1. Com f és una funció uniformement contínua en E, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $x, y \in E$ i $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$, llavors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Si $(x_n)_n \subset E$ és una successió de Cauchy tenim que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que fixat $\delta > 0$ i per a tot $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \delta = \delta(\varepsilon)$. Acabem de veure que, com a conseqüència de ser f uniformement contínua ens queda que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, tal com volíem.
2. Hem de fer els dos apartats.
   2.1. Si A és no tancat, aleshores $\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$ i existeix $x_0 \in \overline{A} \setminus A$. Tenim Φ definida per $x \longmapsto \dfrac{1}{d(x, x_0)}$. Adonem-nos que $d(x, x_0) \to 0$ per a certs $x \in A$, però mai $d(x, x_0) = 0$ ja que $x_0 \notin A$. Per tant, Φ serà contínua en A.
   2.2. Φ no és uniformement contínua en A ja que podem trobar una $(x_n)_n \subset E$ de Cauchy tal que $(f(x_n))_n$ no és de Cauchy i, per tant, Φ no és uniformement contínua. La successió de Cauchy en qüestió és $(x_n)_n \subset A$, tal que $(x_n)_n \to x_0$, ja que $x_0 \notin \overline{A} \setminus A$. En canvi, $(\Phi(x_n))_n \to +\infty$, de manera que no pot ser de Cauchy i es confirma que Φ no pot ser uniformement contínua en A. ■

Observació 2.24. La funció $A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \longmapsto d(x, x_0)$ és uniformement contínua en A; en efecte, tenim que si $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$ aleshores apliquem la desigualtat triangular $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (per a tots x, y, z).

$$|d(x, x_0) - d(y, x_0)| \leq |d(x, y)| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon.$$

Exercici 2.25. *Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval no trivial complint que totes les funcions contínues definides en I són uniformement contínues en I.*

1. *Demostreu que I és tancat.*
2. *Demostreu que I és acotat.*

Demostració.

1. Si I no fos tancat, tindríem un punt $i_0 \in \overline{I} \setminus I$, i podríem prendre la funció definida a 2.23, apartat 2., i provar l'existència d'una funció Φ contínua tal que no és uniformement contínua; fet que va en contra de la hipòtesi suposada.
2. Si I fos tancat però no acotat, tindríem un interval de la forma $[a, +\infty)$, a qualsevol. Hem de trobar una f contínua que no sigui uniformement contínua, tot i que usarem la definició). Hem de veure que per a tot $\delta > 0$, tal que $|x - y| < \delta$, tenim $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Prenent $f(x) = x^2$, $x_n = a + n$ i

$y_n = a + n + \frac{1}{n}$, $|x_n - y_n| \to 0$ i:

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |x_n^2 - y_n^2| = \left|2an + 2 + \frac{1}{n^2}\right| \to \begin{cases} 2, & \text{si } a = 0, \\ +\infty, & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$ ■

Exercici 2.26. *Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua i sigui $\delta > 0$. Definim $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) \leq \delta\}$. Demostreu que f és uniformement contínua en K_δ.*

Demostració. Cal solament veure que K_δ és un compacte, ja que és tancat i acotat. *Argument recurrent*: com $|d(x,K) - d(y,K)| \leq d(x,y)$, d'on deduïm que la funció $d_K(x) = d(x,K)$ és uniformement contínua en $\mathbb{R}^n$ i, en particular, contínua.

1. És tancat perquè d és contínua i $K_\delta = d^{-1}([0,\delta])$ és l'antiimatge d'un conjunt tancat per una funció contínua.
2. Per veure que K_δ acotat usem que K és acotat. Aleshores, n'existeix un suprem: $M_K = \sup_{x \in K} \|x\|$, $M_K \geq \|x\|$ per a tot $x \in K$. Si prenem ara $x \in K_\delta$, per a tot $y \in K$:

$$d(y,K) \leq \delta < \delta + 1 \implies \|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \leq \|x - y\| + M_K < \delta + 1 + M_K$$

amb el que $\|x\| \leq M_K + \delta < M_K + \delta + 1$. La distància ha de ser menor estricte que l'ínfim, ja que si fos l'ínfim podria no existir, de manera que al δ li sumem una quantitat (en aquest cas hem escollit 1).

Com f és contínua i K_δ és compacte, f hi és uniformement contínua. ■

Exercici 2.27. *Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.*

1. *Demostreu que existeix $x_0 \in \mathbb{R}$ i $f(x) \geq f(x_0)$ per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Proveu que existeix $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que la funció $(f - \alpha)^{-1}$ és contínua i acotada.*

Demostració.

1. Donat que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, prenent $M = f(0)$, existeix $N \in \mathbb{R}$ tal que per a tot $|x| \geq N$, $f(x) \geq f(0)$. Considerem ara el compacte $[-N, N]$. Llavors, f té un mínim absolut en $[-N, N]$. És a dir, existeix $x_0 \in [-N, N]$ tal que per a tot $x \in [-N, N]$, $f(x) \geq f(x_0)$. Per a veure que $f(x_0)$ és un mínim absolut només ens queda comprovar que si $|x| \geq N$, llavors $f(x) \geq f(x_0)$. En efecte, si $|x| \geq N$, llavors $f(x) \geq f(0) \geq f(x_0)$ (ja que $0 \in [-N, N]$).
2. N'hi ha prou en considerar $\alpha = f(x_0) - 1$. Es compleix que per a tot $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \big(f(x_0) - 1\big) \geq 1 > 0$, amb el que la funció $\frac{1}{f - \alpha} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ és contínua i positiva i $0 < \frac{1}{f - \alpha} \leq 1$. ■

3 Successions i sèries de funcions

Exercici 3.1. *Considerem la successió de funcions $(f_n)_n$ amb $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per $f_n(x) = nx^n(1-x)$.*

1. *Calculeu el límit puntual de la successió* $(f_n)_n$ *en l'interval* $[0, 1]$.
2. *Convergeix la successió* $(f_n)_n$ *uniformement en* $[0, 1]$*?*
3. *Sigui* $0 < \delta < 1$. *Convergeix la successió* $(f_n)_n$ *uniformement en* $[0, \delta]$*?*

Demostració. A partir d'ara usarem recurrentment un resultat de teoria respecte la convergència uniforme.

1. Observem que, per a tot $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $f_n(0) = n \cdot 0^n \cdot (1 - 0) = 0$ (en particular, està ben definit perquè $n > 0$); a més, $f_n(1) = n \cdot 1^n \cdot (1 - 1) = 0$. Tenim, doncs, $f_n(1) = f_n(0) = 0$. Definim $f := \lim_{n\to\infty} f_n$; així, quan $n \to \infty$, $f(1) = f(0) = 0$. Per a la resta, és a dir, $x \in (0, 1)$, tenim $\lim_n nx^n = 0$; per tant, $f(x) = 0$ per a aquests valors. En definitiva, obtenim que $f(x) = 0$ per a tot $x \in [0, 1]$.
2. La successió convergeix uniformement en $[0, 1]$ si convergeix al seu límit puntual $f(x)$, que hem vist que és la funció $f \equiv 0$. Com que les f_n són contínues i positives, tenim que $f_n \to 0$ uniformement en $[0, 1]$ si, i només si:
$$\max_{x\in[0,1]} f_n(x) \to 0.$$
És a dir, el valor màxim de cada f_n hauria de tendir a zero; de manera que f fos, en efecte, $f \equiv 0$. En aquest cas, el màxim s'assoleix, i ho fa en el punt $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. Com cada f_n és contínua i, de fet, C^∞ (de manera que és derivable):
$$f_n'(x) = 0 \iff n(nx^{n-1}(1-x)-x^n) = 0 \iff x^{n-1}(n(1-x)-x) = 0 \begin{cases} x^{n-1} \neq 0, \text{ ja que } f_n(0) = 0, \\ x = \dfrac{n}{n+1}. \end{cases}$$
Amb el que:
$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e} \neq 0.$$
Per tant, f_n no convergeix a zero uniformement en $[0, 1]$.
3. En cas que convergeixi, cal que ho faci cap a $f \equiv 0$, el límit puntual. Com que les f_n són contínues i positives, tenim que $f_n \to 0$ uniformement en $[0, \delta]$ si, i només si:
$$\max_{x\in[0,\delta]} f_n(x) \to 0.$$
Això es compleix perquè $f_n(x) = nx^n(1 - x) \leq nx^n \leq n\delta^n$ per a $x \in [0, \delta]$ i $\lim_n n\delta^n = 0$. Per tant, f_n convergeix a zero uniformement en $[0, \delta]$, per a tot $0 < \delta < 1$. ■

Observació 3.2. Is a constant raised to the power of infinity indeterminate? I am just curious. Say, for instance, is 0^∞ indeterminate? Or is it only 1 raised to the infinity that is? No, it is zero. Consider the function $f(x, y) = x^y$ and consider any sequences $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots\}$ with $x_i \to 0$ and $y_i \to \infty$. It is easy to see that $f(x_n, y_n)$ converges to zero: let $\varepsilon > 0$. For some N, $|x_i| < \varepsilon$ and $y_i > 1$ for all $i \geq N$, so $|f(x_i, y_i)| < \varepsilon$ for all $i \geq N$. More generally, as $x \to c$ and $y \to \infty$, x^y converges to 0 for $|c| < 1$, diverges to infinity for $c > 1$, oscillates without converging for $c \leq -1$, and is indeterminate when $c = 1$.

Exercici 3.3. *Sigui $I = [0, 1]$. Per a $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, sigui $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per:*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}.$$

1. *Calculeu el límit puntual de la successió $(f_n)_n$.*
2. *Estudieu la convergència uniforme de la successió $(f_n)_n$ en I.*
3. *Donat $a \in (0, 1)$, estudieu la convergència uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $[a, 1]$.*

Demostració.

1. Els mètodes usats per a aquest tipus d'exercicis seran molt similars (cf. 3.1). Fixem-nos en els extrems de l'interval I. Clarament, $f_n(0) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ i, doncs, $f(0) = 0$. Per a $f_n(1) = \frac{1}{1 + (1 - n)^2}$, de manera que $\lim_n f_n(1) = f(1) = 0$. Cal veure, finalment, què passa per a $x \in (0, 1)$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(1 + n^2)x^2 - 2nx + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(1 + n^2)x^2} = 0.$$
On hem usat, per exemple, que $x > 0$ i que $n^2 + n \sim n^2$ quan $n \to \infty$.
2. Si hi ha convergència uniforme ha de ser cap al límit puntual. Un altre cop, com en 3.1, necessitem que:
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \left| \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} \right| = 0.$$
Fixem-nos en $x_n = \frac{1}{n}$: en aquest punt, $f_n(x_n) = 1$, per a tot $n \in \mathbb{N}$; per tant, per a $n \to \infty$, existeix un punt $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) \neq 0$ i $(f_n)_n$ no és uniformement convergent en I. De fet, no ho hem demostrat però tenim $\sup_{x\in I} |f_n(x)| = \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|$.
3. Tornem a aplicar el mateix raonament, ara sabent que per a $x_n = \frac{1}{n}$ no convergeix, prenem un a estrictament major que x_n, $a > \frac{1}{n}$, de manera que:
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,1]} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(a)| = f(a),$$
però ja hem vist que per a qualsevol $a \in (0, 1)$ la successió $(f_n)_n$ convergeix puntualment cap a $f \equiv 0$; per tant, $\lim_n f_n(a) = 0$ i hi ha convergència uniforme a $[a, 1]$ cap a la funció $f \equiv 0$. ∎

Exercici 3.4. *Per a $\alpha \in \mathbb{R}$, considerem la successió de funcions $(f_n^\alpha)_n$, definida per*

$$f_n^\alpha(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n, \; x \in [0, 1].$$

1. *Calculeu per a $x \in [0, 1]$ el $\lim_{n\to\infty} f_n^\alpha(x)$.*
2. *Demostreu que $(f_n^\alpha)_n$ convergeix uniformement en $[0, 1]$ si, i només si, $\alpha < \frac{1}{2}$.*
3. *Sigui $0 < \rho < 1$. Per a quins valors d'α $(f_n^\alpha)_n$ convergeix uniformement en $[\rho, 1]$?*

Demostració.

1. Si $x = 0$, $f_n^\alpha(0) = 0$, per a tot $n \geq 1$. El mateix per a $x = 1$, $f_n^\alpha(1) = 0$ per a tot $n \geq 1$. Com que ara $x \in (0,1)$, aleshores $x^2 \in (0,1)$ i $1 - x^2 \in (0,1)$, també. Naturalment, doncs, $x(1-x^2)^n \to 0$ quan $n \to \infty$. Com que l'exponencial $((1-x^2)^n)$ domina sobre la quadràtica (n^α), tenim:
$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha x(1-x^2)^n = \lim_{n\to\infty} x(1-x^2)^n = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$
2. Com hem fet, per exemple, en 3.1, la successió $(f_n^\alpha)_n$ convergeix uniformement en $[0,1]$ si, i només si:
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\to[0,1]} n^\alpha x(1-x^2)^n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \max_{x\to[0,1]} n^\alpha x(1-x^2)^n = 0. \tag{3.1}$$
Ara, per trobar el màxim en aquest interval podem usar la derivada de f_n^α en $[0,1]$, ja que és C^∞:
$$(f_n^\alpha)'(x) = n^\alpha \left((1-x^2)^n - 2x^2 \cdot n(1-x^2)^{n-1}\right) = n^\alpha (1-x^2)^{n-1}\left(1-(1+2n)x^2\right),$$
i $(f_n^\alpha)'(x) = 0$ si, i només si,
$$n^\alpha(1-x^2)^{n-1}\left(1-(1+2n)x^2\right) = 0 \iff x^2 = \frac{1}{1+2n}.$$
Hem usat que $n^\alpha, (1-x^2)^{n-1} \neq 0$ per a cap $x \in [0,1]$. Per tant, ens quedem amb $x_n = \sqrt{\frac{1}{1+2n}}$ que, efectivament, es pot comprovar que és un màxim. Ara, substituïm aquest valor en (3.1):
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup_{x\to[0,1]} n^\alpha x(1-x^2)^n &= \lim_{n\to\infty} f_n^\alpha(x_n) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \sqrt{\frac{1}{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} n^\alpha \sqrt{\frac{1}{2n}}\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot n^{\alpha-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$
Hem usat que $\frac{2n}{1+2n} \to 1$ quan $n \to \infty$ i $\sqrt{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$, o bé $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot n^{-\frac{1}{2}}$. Aquest límit val zero si, i només si, $\alpha - \frac{1}{2} < 0$; és a dir, $\alpha < \frac{1}{2}$.
3. És el mateix que 3.3, apartat 3.. Com que $\rho \in (0,1)$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$, tenim $x_n < \rho$. Per tant, donat que f_n^α és creixent fins a x_n i decreixent a partir de x_n, tenim (via els dos apartats anteriors).
$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[\rho,1]} f_n^\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^\alpha(\rho) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \rho(1-\rho^2)^n = 0.$$ ■

Exercici 3.5. *Per a $n \in \mathbb{N}$, sigui $f_n : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f_n(x) = \min(n, x^{-1})$.*

1. *Demostreu que la successió de funcions $(f_n)_n$ convergeix puntualment a la funció $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^{-1}$.*
2. *Convergeix $(f_n)_n$ uniformement a f en $[1,+\infty)$? I en $(0,+\infty)$?*

Demostració.

1. En aquest cas hem de començar a pensar de manera diferent, havent d'aplicar la definició. Si prenem $(x_n)_n = \frac{1}{n}$, per a $x > 0$ existeix un n_0 tal que $x > \frac{1}{n}$ per a tot $n \geq n_0$. Com que $x, n \neq 0$ podem invertir la desigualtat i tenim $n > \frac{1}{x}$ per a tot $n \geq n_0$. Per tant, $f_n(x) = \min(n, \frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$, $n \geq n_0$, i $|f_n(x) - \frac{1}{x}| = 0 < \varepsilon$.
2. Si prenem $x \in [1, +\infty)$, tenim que $n > \frac{1}{x} \geq 1 = n_0$; per tant, per a tot $n \in \mathbb{N}$ tenim $|f_n(x) - \frac{1}{x}| = 0 < \varepsilon$ o, dit d'una altra manera, $(f_n)_n$ és uniformement convergent en $[1, +\infty)$. En canvi, en $(0, +\infty)$ la convergència puntual no és uniforme en un entorn suficientment proper al zero. Podem justificar-ho en termes de convergència uniforme i acotació: tenim una successió $(f_n)_n$ de funcions acotades, però la funció a la qual convergeixen puntualment, $f(x) = \frac{1}{x}$, no ho és; això implica, doncs, que la convergència *puntual* cap a f no és uniforme. ■

Exercici 3.6 (Propietat interessant, d'examen). *Sigui $f_n : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ una successió de funcions que convergeix uniformement a una funció $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Suposem que existeix $[a, b] \subset \mathbb{R}$ compleixin que per a tot $n \geq 1$, $f_n(A) \subset [a, b]$. Sigui $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$. Demostreu que la successió $(\varphi \circ f_n)_n$ convergeix uniformement a $\varphi \circ f$ en A.*

Demostració. Se'ns està plantejant una successió $(f_n)_n$ de funcions acotades que convergeix uniformement a una funció f. Pel teorema de convergència uniforme i acotació, aquesta f ha de ser, també, acotada; pel teorema de continuïtat uniforme i compacticitat, cal que φ sigui uniformement contínua en $[a, b]$, ja que és contínua sobre un compacte. Usant l'exercici 2.21, tenim que $\varphi \circ f_n$ és uniformement contínua, per a tot $n \geq 1$. Ara apliquem-ho tot:

1. Donat que φ és uniformement contínua en $[a, b]$, existeix un $\delta > 0$ tal que per a tot $u, v \in [a, b]$, $|\varphi(u) - \varphi(v)| < \varepsilon$.
2. Donat que $(f_n)_n$ convergeix uniformement a f en A, existeix un n_0 tal que per a tot $n \geq n_0$ i tot $x \in A$, $|f_n(x) - f(x)| < \delta$.

Per tant, $|\varphi(f_n(x)) - \varphi(f(x))| < \varepsilon$. És a dir, $(\varphi \circ f_n)_n$ convergeix a $\varphi \circ f$. ■

Exercici 3.7. *Sigui $\alpha > 0$ i $f_n : [0, +\infty)$ i $n \geq 1$, la successió de funcions definida per:*

$$f_n(x) = \left(\frac{1 + nx}{n + x^2}\right)^\alpha.$$

1. *Estudieu la convergència puntual de la successió $(f_n)_n$.*
2. *Estudieu la convergència uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $[0, 1]$.*

Demostració.

1. Estudiem el cas $x = 0$: $f_n(0) = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$; com $\alpha > 0$, $f = \lim_n f_n$ és $f(0) = 0^\alpha = 0$. Ara, per a $I = (0, +\infty)$ veurem que per a tot $x \in I$, $(f_n)_n$ convergeix puntualment cap a x^α:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + nx}{n + x^2}\right)^\alpha = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{nx}{n}\right)^\alpha = \lim_{n\to\infty} x^\alpha = x^\alpha.$$

2. Una successió $(f_n)_n$ convergeix uniformement cap a f si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$ tenim $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. En altres paraules, volem comprovar que $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$. En el nostre cas, cadascuna de les f_n depèn, a més, d'un paràmetre α, de manera que tenim $(f_n^\alpha)_n$. Per al cas $\alpha = 1$:
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+nx}{n+x^2} - x\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1-x^3}{n+x^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 0.$$
Evidentment, doncs, $(f_n^1)_n$ convergeix uniformement a $f^1(x) = x$ en $[0,1]$. Ara cal fer-ho per a un $\alpha > 0$ qualsevol: la idea és fitar els valors que pot prendre f_n en un compacte i aplicar l'exercici 3.6. En efecte, per a $x \in [0,1]$:
$$0 \leq \frac{1+nx}{n+x^2} = \frac{\frac{1}{n} + x}{1 + \frac{x^2}{n}} \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Per tant, $f_n^1([0,+\infty)) \subset [0,2]$[12]. Finalment, si prenem $\varphi(x) = x^\alpha$, φ és contínua en el compacte $[0,2]$ i, aplicant el teorema de compactes i continuïtat uniforme, φ és uniformement contínua. Aplicant l'exercici anterior, $f_n^\alpha = \varphi \circ f_n^1$ convergeix uniformement a $f^\alpha = \varphi \circ f^1$ en $[0,1]$. ■

Exercici 3.8. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) espais mètrics i sigui $(f_n)_n$ una successió de $f_n : X \longrightarrow Y$ que convergeixen uniformement en X cap a una funció $f : X \longrightarrow Y$.*

1. *Proveu que si per a tot n f_n és uniformement contínua, aleshores f és uniformement contínua.*
2. *Proveu que si $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ és uniformement contínua, aleshores $g \circ f_n$ convergeix uniformement en X cap a una funció $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Demostració.

1. Si f_n és uniformement contínua, existeix $\delta_n > 0$ tal que si $d_X(x,y) < \delta_n$, aleshores $d_Y(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Com que $(f_n)_n$ convergeix uniformement en X cap a una funció $f : X \longrightarrow Y$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$, $\sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$[13], per a tot $x \in X$. Per tant, ens val amb prendre una distància suficientment petita: si $d_X(x,y) < \delta_{n_0}$, tenim:
$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f_{n_0}(x)) + d_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d_Y(f_{n_0}(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$
2. Si g és uniformement contínua, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta_g > 0$ tal que si $d_Y(x,y) < \delta_g$, aleshores $d_{\mathbb{R}}(g(x), g(y)) = |g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Si, a més, $(f_n)_n$ convergeix uniformement en X cap a una funció $f : X \longrightarrow Y$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$, $d_Y(f_n(x), f(x)) < \delta_g$. Aleshores, per

[12] Adonem-nos que no cal que ens limitem a $x \in [0,1]$; és clar que per a tot $x \geq 1$ també tenim la fitació. Si volem ser més estrictes, podem calcular el límit a l'infinit de manera que $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\frac{x^2}{n}} = 0$.

[13] Aquest $\sup_{x\in X}$ ve donat per una proposició de teoria. Bàsicament, que $(f_n)_n \to f$ uniformement en X si, i només si, $\sup_x d_Y(f_n(x), f(x)) \to 0$ quan $n \to \infty$. Hem usat (i usarem) recurrentment el resultat al llarg d'aquesta secció.

a tot $x \in X$ tal que per a tot $n \geq n_0$ (el que acabem de definir per a la convergència uniforme de $(f_n)_n$) tenim:

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon, \text{ ja que } d_Y(f_n(x), f(x)) < \delta_g.$$

Per si no quedés clar, si posem $x = f_n(u)$ i $y = f(u)$, sabem per convergència uniforme de $(f_n)_n$ que $d_Y(x, y) < \delta_g$; com també $d_Y(x, y) < \delta_g$ per la convergència uniforme de g, tenim la convergència uniforme de la composició $(g \circ f_n)_n$ cap a $g \circ f$ en X. ■

Exercici 3.9. *Siguin $g_n^\beta(x) = n^\beta x^n(1-x)$ i $f_n^{\alpha,\beta}(x) = n^\beta(x\cos^2(\alpha x))^n(1-x)$.*

1. *Trobeu per quins paràmetres β la successió $(g_n^\beta)_n$ convergeix uniformement.*
2. *Demostreu que si $0 < \alpha < \pi$, aleshores $f_n^{\alpha,\beta}$ convergeix uniformement en $[0,1]$.*
3. *Sigui $\alpha = \pi$. Trobeu per quins paràmetres β la successió $(f_n^{\pi,\beta})_n$ convergeix uniformement.*

Indicació. *En estudiar g_n^β es pot localitzar una successió de punts $(x_n)_n \subset [0,1]$ on per a cada n s'assoleix el màxim de la diferència $|g_n(x) - f(x)|$ en $[0,1]$ precisament en x_n. Per fer el darrer apartat pot ser útil demostrar que $\cos^{2n}(\pi x_n) \longrightarrow 1$, sabent que:*

$$\cos^{2n}(\pi x_n) = \left(((1 + \cos^2(\pi x_n) - 1)^{\frac{1}{\cos^2(\pi x_n)-1}}\right)^{n(\cos^2(\pi x_n)-1)}.$$

Demostració.

1. Primer investiguem la convergència puntual, que es troba de manera pràcticament idèntica a la de 3.4. En efecte, $g_n^\beta(0) = g_n^\beta(1) = 0$, per a tot $n \in \mathbb{N}$ i tot $\alpha \in \mathbb{R}$. Pel que fa a les $x \in (0,1)$, $1 - x \in (0,1)$ i el decreixement exponencial x^n absorbeix el creixement polinòmic de n^β; és a dir, $n^\beta x^n \longrightarrow x^n$ quan $n \longrightarrow \infty$. En altres paraules, g_n^β convergeix puntualment a la funció $g \equiv 0$ a l'interval $[0,1]$. Per tant, *en cas* de convergir uniformement, ho farà a aquesta mateixa funció.
   Ara, anem a veure per a quins β la funció g_n^β convergeix uniformement cap a 0. El màxim de $(g_n^\beta)'(x)$ és aquell $x_0 \in (0,1)$[14] tal que $(g_n^\beta)'(x_0) = 0$:

$$(g_n^\beta)'(x) = n^\beta \cdot x^{n-1}(n(1-x) - x) = 0 \iff n(1-x) - x = 0 \iff x = \frac{n}{1+n}.$$

   Per tant, com estem en un compacte el suprem s'assoleix (per Weierstrass), i

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} g_n^\beta(x) = \lim_{n\to\infty} g_n^\beta\left(\frac{n}{1+n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^\beta \left(\frac{n}{1+n}\right)^n \left(1 - \frac{n}{1+n}\right)$$

$$\overset{15}{=} \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} n^\beta\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} n^{\beta-1} \begin{cases} +\infty, & \text{si } \beta > 1, \\ \frac{1}{e}, & \text{si } \beta = 1, \\ 0, & \text{si } \beta < 1. \end{cases}$$

[14] Ja hem dit que $g_n^\beta(0) = g_n^\beta(1) = 0$, com que $\max_{x\in[0,1]} g_n^\beta \geq 0$, podem descartar els casos $x = 0, 1$. De fet, podrem usar a continuació que $x^{n-1} \neq 0$.

Per tant, tenim convergència uniforme si, i només si, $\beta < 1$.

2. Val la pena adonar-se des del principi que $f_n^{\alpha,\beta}(x) = g_n^{\beta}(x) \cdot \cos^{2n}(\alpha x)$. Això ens permet veure que $|f_n^{\alpha,\beta}(x)| \leq |g_n^{\beta}(x)|$; com $x \in [0,1]$, podem precisar més encara: $f_n^{\alpha,\beta}(x) \in [0, g_n^{\beta}(x)]$. D'aquí és evident, pel teorema de l'entrepà, que $(f_n^{\alpha,\beta})_n$ convergeix puntualment cap a $f \equiv 0$ quan $x \in [0,1]$. En cas de convergir uniformement, el límit ha de ser la funció $f(x) = 0$.
Si $\alpha \in (0,\pi)$, $|\cos(\alpha)| < 1$. Si $x \in [0,1)$ tenim $x\cos^2(\alpha x) \leq x < 1$. Com que $x\cos^2(\alpha x)$ és una funció contínua, el màxim s'assoleix en algun punt x_0 de l'interval $[0,1]$ on $x_0\cos^2(\alpha x_0) = y_0 < 1$, així que $x\cos^2(\alpha x) \leq x_0\cos^2(\alpha x_0) = y_0 < 1$. Per tant, $f_n^{\alpha,\beta}(x) \leq n^{\beta}(y_0)^n \to 0$ quan $n \to \infty$. Per tant, la convergència és uniforme per a qualsevol valor $\alpha \in (0,\pi)$.

3. Com que $f_n^{\pi,\beta} \leq g_n^{\beta}$, deduïm que per $\beta < 1$ la convergència és uniforme. Tot seguit demostrarem que per $\beta \geq 1$ la convergència no és uniforme. En particular, demostrarem que $f_n^{\pi,\beta}(x_n) \geq c > 0$, contradient la convergència uniforme. Per fer-ho comparem els valors $f_n^{\alpha,\beta}(x_n)$ i $g_n^{\beta}(x_n)$. Si veiem que $\dfrac{f_n^{\alpha,\beta}(x_n)}{g_n^{\beta}(x_n)} = \cos^2(\alpha x_n)^n \to 1$, aleshores obtenim com a conclusió que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{\pi,\beta}(x_n) = \lim_{n\to\infty} g_n^{\beta}(x_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \beta > 1, \\ \dfrac{1}{e}, & \text{si } \beta = 1, \\ 0, & \text{si } \beta < 1. \end{cases}$$

És a dir, si que $f_n^{\alpha,\beta}$ convergeix uniformement si, i només si, $\beta < 1$. Per demostrar que $\cos^2(\alpha x_n)^n \to 1$, observem que $x_n = \dfrac{n}{n+1} \to 1$, de manera que $\cos^2(\pi x_n) - 1 \to 0$. Per tant, expressant:

$$\cos^{2n}(\pi x_n) = \left(((1 + \cos^2(\pi x_n) - 1)^{\frac{1}{\cos^2(\pi x_n)-1}}\right)^{n(\cos^2(\pi x_n)-1)},$$

trobem que:

$$\lim_{n\to\infty} \cos^{2n}(\pi x_n) = (e^{-1})^{\lim_n n(\cos^2(\pi x_n)-1)},$$

en cas que $n(\cos^2(\pi x_n) - 1)$ sigui convergent. Ara bé, usant que $\cos^2$ és π-periòdic, tenim:

$$n(\cos^2(\pi x_n) - 1) = n(\cos^2(\pi(x_n - 1)) - 1) = n(\cos(\pi(x_n - 1)) - 1)(\cos(\pi(x_n - 1)) + 1).$$

I usant l'infinitèsim:

$$\lim_{n\to\infty} n(\cos^2(\pi x_n) - 1) = 2\lim_{n\to\infty} n\frac{\cos(\pi(x_n-1)) - 1}{-\frac{(x_n-1)^2}{2}}\left(-\frac{(x_n-1)^2}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} n(-(x_n-1)^2).$$

Sabent que $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ obtenim que $\lim_n n(\cos^2(\pi x_n) - 1) = \lim_n \dfrac{-n}{(n+1)^2} = 0$, és a dir, $\cos^{2n}(\pi x_n)$ tendeix a $(e^{-1})^0 = 1$ quan $n \to \infty$, tal com volíem veure. ■

[15] Fixem-nos que $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{1+n})^n$ és $\frac{1}{e}$; això és perquè podem reescriure la fracció com: $(1 - \frac{1}{n+1})^n$, i aquesta tendeix conegudament a $\frac{1}{e}$ quan $n \to \infty$.

Exercici 3.10. *Per a $n \in \mathbb{N}$, sigui $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per:*

$$f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2}.$$

1. *Calculeu el límit puntual, de la successió $(f_n)_n$.*
2. *Estudieu la convergència uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $\mathbb{R}$.*
3. *Estudieu la convergència uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$, on $a > 0$.*
4. *Estudieu la convergència puntual de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^3$ en $\mathbb{R}$.*
5. *Estudieu la convergència uniforme de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^3$ en $\mathbb{R}$.*
6. *Estudieu la convergència uniforme de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^3$ en $[a, b]$, on $0 < a < b < \infty$.*

Demostració.

1. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ per a tot $n \geq 1$, de manera que tenim $\lim_n f_n(0) = f(0) = 0$. Ara, si $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{x}{x^2} = 0.$$

   Per tant, si $(f_n)_n$ convergeix uniformement si ho fa cap a la funció $f \equiv 0$.

2. Podem trobar un punt x_n tal que $\lim_n f_n(x_n) \neq 0$ bastant fàcilment. Per exemple, perquè $(x\sqrt{n})^2 = nx^2$ podem considerar $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ i:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}}{1 + n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} > 0.$$

   Tal com volíem, hem trobat que no hi ha convergència de la successió $(f_n)_n$ en $\mathbb{R}$.

3. $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$ és un tancat (però no compacte perquè no és acotat), que ve representat per $|x| \geq a$. $(f_n)_n$ convergirà uniformement si per a tot $n \geq n_0$,

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|\sqrt{n}}{1 + nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a\sqrt{n}} = 0.$$

   On en l'últim pas hem usat les cotes $M_n = \frac{1}{a\sqrt{n}}$ i el criteri M de Weierstrass.

4. $f_n^3(x) = \frac{x^3 \cdot n^{\frac{3}{2}}}{(1 + nx^2)^3}$. I ara, rutinàriament, comprovem la convergència puntual, ara per a sèries; és a dir, si la suma puntual convergeix. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Ara, si $x \neq 0$, el raonament és una mica més fi:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{x^3 \cdot n^{\frac{3}{2}}}{(1 + nx^2)^3} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{x^3}{|x|^6} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x^3} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^3} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Recordem que la sèrie harmònica $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ convergeix si, i només si, $\alpha > 1$. Per tant, $\sum_n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ convergeix i la sèrie convergeix puntualment en tot punt de $\mathbb{R}$ (criteri M de Weierstrass).

5. La convergència uniforme d'una sèrie de funcions es dona quan $(s_n)_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ convergeix uniformement en X, que no serà el cas. Com a contraexemple de la convergència uniforme, trobem un punt x_n tal que $f_n(x_n) \neq 0$: en efecte, $f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{8}$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.
6. Si $x \in [a, b]$, aleshores $f_n^3(x) \geq 0$ i, en particular, $x \geq a \geq 0$:

$$0 \leq f_n^3(x) = \frac{x^3 \cdot n^{\frac{3}{2}}}{(1+nx^2)^3} = \frac{x^3 \cdot n^{\frac{3}{2}}}{1+3nx^2+3n^2x^4+n^3x^6} \leq \frac{x^3 \cdot n^{\frac{3}{2}}}{n^3x^6} \leq \frac{1}{a^3 n^{\frac{3}{2}}} = M_n$$

Donat que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum_n M_n < \infty$, el criteri M de Weierstrass ens dona que la sèrie és uniformement convergent en $[a, b]$. ■

Exercici 3.11. *Sigui $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, definida per:*

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}|x|}{2+nx^2}.$$

1. *Estudieu la convergència puntual de la successió $(f_n)_n$ en $\mathbb{R}$.*
2. *Estudieu la convergència uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $|x| \geq a$, $a > 0$.*
3. *Estudieu la convergència uniforme de la successió $(f_n)_n$ en $\mathbb{R}$.*

Demostració.

1. Com sempre i, en especial, idènticament al primer apartat de 3.10, $f_n(0) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Ara, si $x \neq 0$, hem de veure que $\lim_n (f_n)_n = 0$. En efecte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}|x|}{2+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}|x|} = \frac{1}{|x|} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

   Per tant, $(f_n)_n \to 0$ puntualment en $\mathbb{R}$.
2. Si $a > 0$ i $|x| \geq a$, hem de trobar que $\sup_{x\in X} \lim_n |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in X} \lim_n |f_n(x)| = 0$.

$$0 \leq \sup_{|x|\geq a} |f_n(x)| \leq \sup_{|x|\geq a} \frac{1}{\sqrt{n}|x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}a} \to 0;$$

   per tant, $(f_n)_n$ convergeix uniformement cap a zero en $|x| \geq a$.
3. Per a tot $n \geq 1$, sigui $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Llavors, $f_n(x_n) = \frac{1}{3}$. Per tant, la successió no convergeix uniformement en $\mathbb{R}$. ■

Exercici 3.12. *Per a cada enter positiu n, sigui $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per:*

$$f_n(x) = \frac{\log(1+x^2)}{1+nx^4}.$$

Per a cada $a > 0$, considereu els intervals $I_a = [-a, a]$ i $J_a = [a, +\infty)$.

1. *Estudieu la convergència puntual i uniforme de la successió funcional $\{f_n\}_n$ en I_a i J_a.*
2. *Estudieu la convergència puntual i uniforme de la sèrie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$ en I_a i en J_a.*

Demostració.

1. Posem f el límit puntal de $(f_n)_n$ en $\mathbb{R}$. En $x = 0$, $f_n(0) = 0$ per a tot n i, per tant, $f(0) = 0$. Per a $x \neq 0$ tenim:
$$0 \leq f_n(x) = \frac{\log(1+x^2)}{1+nx^4} \leq \frac{\log(1+x^2)}{x^4} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0, \ n \longrightarrow \infty.$$
De manera que $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}$ i, en particular, a I_a i J_a. Pel que fa a la convergència uniforme en J_a, observem que la desigualtat $\log(1+t) \leq t$ per a $t > -1$ implica que:
$$\frac{\log(1+x^2)}{x^4} \leq \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{a^4}, \ x \geq a.$$
Aleshores, donat que $f_n(x) \leq \frac{\log(1+x^2)}{x^4} \cdot \frac{1}{n}$, tenim $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{a^4 n}$. Com que $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ deduïm que $f_n \longrightarrow 0$ uniformement en J_a. ■

Exercici 3.13. *Sigui $f_n : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, una successió de funcions convergent uniformement a $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ en $[1, +\infty)$. Suposem que per a tot $n \geq 1$, existeix el límit $a_n = \lim_x f_n(x) \in \mathbb{R}$.*

1. *Demostreu que la successió $(a_n)_n$ és de Cauchy i, per tant, convergent.*
2. *Demostreu que $\lim_x f(x) = \lim_n a_n$.*

Demostració.

1. La successió $(f_n)_n$ és uniformement de Cauchy; això és, existeix un $n_f \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n, m \geq n_f$ tenim $|f_m - f_n| < \varepsilon$, $x \in [1, +\infty)$. Si existeixen els límits a_n, aleshores $|a_n - f_n(x)| \longrightarrow 0$ i $|a_m - f_m(x)| \longrightarrow 0$ quan $x \longrightarrow \infty$. Volem demostrar que existeix un n_0 tal que per a tot $n, m > n_a$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Sigui $n_0 \geq n_f$. Aleshores, per a tot $n, m \geq n_0$ tenim:
$$|a_n - a_m| = |a_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - a_m| < \varepsilon + |f_n(x) - f_m(x)| + |a_m - f_m(x)| \xrightarrow{x \to \infty} \varepsilon.$$
La successió és, doncs, de Cauchy i existeix un límit $a := \lim_n a_n$.
2. El segon apartat consisteix en demostrar que $\lim_x f(x) = a$; és a dir, que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un M_ε tal que si $x > M_\varepsilon$, aleshores $|f(x) - a| < \varepsilon$. Per a tot $n \in \mathbb{N}$ podem escriure:
$$|f(x) - a| = |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|.$$
Com que $(f_n)_n$ és uniformement de Cauchy (equivalentment, com estem a $\mathbb{R}$, convergeix uniformement) tenim que existeix un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n > n_\varepsilon$ i tot $x \geq 1$ tenim $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Anàlogament, i aquí ve la clau de l'exercici, podem escriure-ho com que existeix un $\tilde{n}_\varepsilon$ tal que per a $n > \tilde{n}_\varepsilon$ tenim $|a_n - a| < \varepsilon$. Aleshores, prenent $n_0 := n_0(\varepsilon) = 1 + \max(n_{\frac{\varepsilon}{3}}, \tilde{n}_{\frac{\varepsilon}{3}})$, veiem que:

$$|f(x) - a| \le |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| \le \frac{\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Hem usat la definició de n_0, ja que $n_0 > n_{\frac{\varepsilon}{3}}, \tilde{n}_{\frac{\varepsilon}{3}}$. I $n_{\frac{\varepsilon}{3}}$ i $\tilde{n}_{\frac{\varepsilon}{3}}$ ens donen les cotes $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ i $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$, respectivament. Ara, com que $|a_{n_0} - f_{n_0}(x)| \to 0$ quan $x \to +\infty$, podem dir que si $x > M_{n_0,\varepsilon}$, aleshores $|a_{n_0} - f_{n_0}(x)| \le \varepsilon$[16]. Així doncs, definim $M_\varepsilon := M_{n_0(\varepsilon),\varepsilon}$ depèn només de ε. Així, si $x > M_{\frac{\varepsilon}{3}}$ obtenim que:

$$|f(x) - a| \le \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Exercici 3.14.

1. *Sigui $(f_n)_n$ una successió de funcions integrables en $[0,1]$ tal que:*
   1.1. *Existeix $M > 0$ i $|f_n(x)| \le M$ per a tot $n \ge 1$ i per a tot $x \in [0,1]$.*
   1.2. *$f_n \to 0$ uniformement en $[0, 1-\varepsilon]$ per a tot $0 < \varepsilon < 1$.*

   Demostreu que:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$
2. *Sigui $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua. Demostreu que:*
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\,dx = f(0).$$

Demostració.

1. Fixem un $0 < \varepsilon < 1$. Com $(f_n)_n \to 0$ uniformement en $[0, 1-\varepsilon]$, existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \ge n_0$ i tot $x \in [0, 1-\varepsilon]$, $|f_n(x)| \le \varepsilon$. Recordem (cf. 3.15, 5.) que $\left|\int_a^b f_n\right| \le \int_a^b |f_n|$; així,
$$\left|\int_{1-\varepsilon}^1 f_n(x)\,dx\right| \overset{17}{\le} \int_{1-\varepsilon}^1 |f_n(x)|\,dx \le M\varepsilon.$$
   Si $n \ge n_0$,
$$\left|\int_0^{1-\varepsilon} f_n(x)\,dx\right| \le \int_0^{1-\varepsilon} |f_n(x)|\,dx \le \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$
   Aquest últim pas és perquè $\left|\int_0^1 f_n\right|$ és la suma de $\left|\int_0^{1-\varepsilon} f_n\right|$ i $\left|\int_{1-\varepsilon}^1 f_n\right|$, que és $(M+1)\varepsilon$. Com està acotada per ε, quan $n \to \infty$ el límit tendeix a 0, com volíem.

[16] Val la pena remarcar que $M_{n_0,\varepsilon}$ depèn de n_0, però n_0 només depèn de ε. **Cal aquest $M_{n_0,\varepsilon}$??**

[17] Per què? Notem que $[1-\varepsilon, 1]$ és on f_n no convergeix, a priori, uniformement. Però sí que podem aplicar $\left|\int_{1-\varepsilon}^1 f_n\right| \le \int_{1-\varepsilon}^1 |f_n|$, i $\int_{1-\varepsilon}^1 |f_n| \le M \int_{1-\varepsilon}^1 1$, que és per Barrow $M(1-(1-\varepsilon)) = M\varepsilon$, com volíem.

2. Definim, per a $n \geq 1$ i $x \in [0,1]$, $g_n(x) = f(x^n)$. La idea seria acabar aplicant l'apartat anterior, així que cal veure que es verifiquin totes les seves condicions. Per a tot $x \in [0,1)$, $\lim_n x^n = 0$; per tant, $\lim_n g_n(x) = 0$. A cavall de la idea que hem dit, podem definir $0 < \varepsilon < 1$ tal que $(g_n)_n$ convergeixi uniformement a $f(0)$ en $[0, 1-\varepsilon]$. Això és perquè com f és contínua en 0, existeix δ tal que si $x \in [0,\delta)$, llavors $|f(x) - 0| < \delta$ (definició de continuïtat i, també, definició de límit si es vol). Triem n_0 tal que $(1-\varepsilon)^n < \delta$ per a tot $n \geq n_0$. Llavors, si $n \geq n_0$ i $x \in [0, 1-\varepsilon]$, $x^n < \delta$ i es compleix que $|g_n(x)| = |f(x^n)| < \varepsilon$.
   Finalment, si definim $f_n(x) = g_n(x) - f(0)$, es compleix que existeix $M > 0$ i $|f_n(x)| \leq M$ per a tot $n \geq 1$ i tot $x \in [0,1]$ al ser contínua f en $[0,1]$. Aplicant, ara sí, l'apartat anterior, deduïm que:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\,dx = f(0). \qquad \blacksquare$$

Propietat 3.15 (Recordatori de propietats d'integrals). *Siguin $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$, $I = [a,b]$, $c \in \mathbb{R}$.*

1. $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$.
2. $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.
3. $fg \in \mathscr{R}([a,b])$.
4. *Si $f \leq g$ en tot I, $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*
5. $|f| \in \mathscr{R}([a,b])$ *i* $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
6. *Sigui $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que per al conjunt $\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq h(x)\}$ és finit. Aleshores, $h \in \mathscr{R}([a,b])$ i $\int_a^b f = \int_a^b h$.*
7. *Sigui $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua a tot $[a,b]$ llevat de, potser, un nombre finit de discontinuïtats evitables o de salt. Aleshores, $h \in \mathscr{R}([a,b])$.*

4

L'espai de les funcions contínues

Exercici 4.1. *Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i amb tots els moments nuls, és a dir, tal que $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$ per a tot $n \geq 0$. Demostra que $f \equiv 0$.*

Demostració. Primer, notem que $f \in C([a,b])$ implica una successió de polinomis $(p_n)_n$ amb $p_n \to f$ uniformement en $[a,b]$, pel teorema de Weierstrass; alternativament, $d_\infty(f, p_n) \to 0$ quan $n \to \infty$ o, fins i tot, $\|f - p_n\|_\infty \to 0$ quan $n \to \infty$. Pel que sembla, també $\|f - p_n\|_{L^\infty} \to 0$ quan $n \to \infty$. Aplicarem la segona part de la hipòtesi en la igualtat marcada:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)^2\,dx &= \int_a^b ((f(x)-p_n(x))f(x)+p_n(x)f(x))\,dx\\ &= \int_a^b ((f(x)-p_n(x))f(x))\,dx + \int_a^b p_n(x)f(x)\,dx\\ &\overset{\star}{=} \int_a^b (f(x)-p_n(x))f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Com que $\int_a^b (f(x)-p_n(x))\,dx \le \|f-p_n\|_{L^\infty}$, tenim el següent:

$$\int_a^b f(x)^2\,dx \le \|f-p_n\|_{L^\infty}\int_a^b f(x)\,dx \le \|f-p_n\|_{L^\infty}\|f\|_{L^\infty}(b-a) \to 0.$$

Això podem fer-ho en termes de ε. Per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n \ge 0$ tal que:

$$\|f-p_n\|_{L^\infty} \le \frac{\varepsilon}{\|f\|_{L^\infty}(b-a)} \implies 0 \le \int_a^b f(x)^2\,dx \le \varepsilon.$$

En particular, tenim $\int_a^b f(x)^2\,dx = 0$ pel lema del Sandvitx. Ara, com f és contínua cal que $f \equiv 0$. ■

Exercici 4.2. *Sigui* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció contínua en* $[0,1]$*. Demostreu que si per a tot* $n \ge 0$ *tenim que* $\int_0^1 f(x)x^{2n}\,dx = 0$*, llavors* $f \equiv 0$*. És cert el resultat si* $[0,1]$ *és substituït per* $[-1,1]$*?*

Demostració. L'estratègia serà similar a 4.1, però en lloc de servir-nos de f^2 ens construirem una funció F. Si f és contínua, és aproximable per polinomis en virtut del teorema de Weierstrass. És a dir, com en 4.1, $\|f-p_n\|_{L^\infty} \to 0$ quan $n \to \infty$. Definim $F : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, donada per:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in [0,1]\\ f(-x), & \text{si } x \in [-1,0]\end{cases}$$

Com $f \in C([0,1])$, i F és contínua en $x = 0$ (ja que $f(0) = f(-0)$), aleshores $F \in C([-1,1])$; a més, la construcció ens dona clarament una funció *parella*. Si $n \ge 0$, podem calcular la integral de $\int_{-1}^1 F(x)x^{2n}\,dx$.

$$\int_{-1}^1 F(x)x^{2n}\,dx = \int_{-1}^0 F(x)x^{2n}\,dx + \int_0^1 F(x)x^{2n}\,dx = \int_{-1}^0 F(x)x^{2n}\,dx,$$

ja que $\int_0^1 f(x)x^{2n}\,dx = 0$ per hipòtesi. Veiem ara que $\int_{-1}^0 F(x)x^{2n}\,dx = 0$:

$$\int_{-1}^0 F(x)x^{2n}\,dx = \int_{-1}^0 f(-x)x^{2n}\,dx \xrightarrow{t=-x} (-1)^{2n}\int_0^1 f(t)t^{2n} = 0.$$

D'aquesta manera, $\int_{-1}^1 F(x)x^{2n}\,dx = 0$; volem veure que tots els moments són nuls, és a dir, hem de comprovar que qualsevol moment senar com ara $\int_{-1}^1 F(x)x^{2n+1}\,dx$ ho és.

$$\int_{-1}^1 F(x)x^{2n+1}\,dx = \int_{-1}^0 f(-x)x^{2n+1}\,dx + \int_0^1 f(x)x^{2n+1}\,dx \xrightarrow{t=-x} -\int_0^1 f(t)t^{2n+1}\,dt\,.$$

Com $\int_{-1}^{1} F(x)x^{2n+1}\,dx = 0$, tots els moments són nuls i podem aplicar l'exercici 4.1. Finalment, $f \equiv 0$. Si canviem $[0,1]$ per $[-1,1]$ el resultat no és cert en general; per exemple, amb $f(x) = x$. ■

Exercici 4.3. *Sigui $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua, no negativa i estrictament creixent en $[a,b]$. Demostreu que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua en $[a,b]$ si, i només si, per a tot $n \geq 0$ $\int_a^b f(x)g^n(x)\,dx = 0$, llavors $f \equiv 0$.*

Demostració. A priori, solament provarem la implicació cap a la dreta. És a dir, hem d'acabar veient que $f \equiv 0$ i ho farem aplicant la conseqüència del teorema d'Stone-Weierstrass: com $[a,b]$ és un compacte de la recta real, tota funció i en particular $f \in C_{\mathbb{R}}([a,b])$ es pot aproximar uniformement en $[a,b]$ per un polinomi P; és a dir, $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i g^i$ amb $n \geq 0$ i $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Per tant:

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)(f(x) - P(x))\,dx + \int_a^b f(x)P(x)\right| &\leq \int_a^b |f(x)| \cdot \|f(x) - P(x)\|\,dx \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot \|f - P\|_\infty < M\varepsilon.\end{aligned}$$

Per tant, $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ i com f^2 és contínua i no negativa, $f^2 \equiv 0$ (i, doncs, $f \equiv 0$). ■

Observació 4.4. La resolució de classe ho fa sense aquesta conseqüència, però el que diu té molt a veure amb la demostració de la mateixa. Si prenem:

$$A = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i g^i(x) \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R},\ n \geq 0 \right\},$$

llavors A és una subàlgebra de funcions que conté les funcions constants i com que g és estrictament creixent en $[a,b]$, llavors per A separa punts, ja que si $x \neq y$ llavors $g(x) \neq g(y)$ i $g \in A$. Aplicant el teorema de Stone-Weierstrass, donada una funció f contínua en $[a,b]$ i $\varepsilon > 0$ existeix una funció $P \in A$ tal que $\|f - P\| < \varepsilon$ i $P = \sum_{i=0}^{n} a_i g^i$ amb $n \geq 0$ i $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Exercici 4.5. *Sigui K un espai mètric compacte. Demostreu que $\mathcal{F} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ és una família equicontínua en K si, i només si, $\mathcal{F}$ és equicontínua en x per a cada $x \in K$.*

***Nota**: Recordem que una família de funcions $\mathcal{F}$ és equicontínua en un punt $x_0 \in X$ si es compleix que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta_{x_0} > 0$ de manera que si $x \in X$ amb $d_X(x, x_0) < \delta_{x_0}$, aleshores $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per a tota $f \in \mathcal{F}$.*

Demostració. La implicació cap a la dreta és per definició. Suposem, doncs, que $\mathcal{F}$ és equicontínua en x per a cada $x \in K$. Llavors, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta_x > 0$ de manera que si $y \in K$ amb $d_K(y,x) < \delta_x$, aleshores $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ per a tota $f \in \mathcal{F}$. Podem posar $K \subset \bigcup_{x \in K} B\left(z, \frac{\delta_x}{2}\right)$, però com K és compacte existeix un n finit tal que tenim $x_1, \ldots, x_n \in K$ complint $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B\left(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2}\right)$. Prenem ara $\min_j \delta_{x_j}$ i $x, y \in K$ tals que tinguem $|x-y| < \frac{\delta}{2}$. Existeixen $i = 1, \ldots, n$ tal que $x \in B\left(x_i, \frac{\delta_i}{2}\right)$. Per tant, com $\delta_{x_i} \leq \delta$:

$$|y - x_i| = |x_i - y| < |x_i - x| + |x - y| < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{\delta_{x_i} + \delta}{2} \leq \delta_{x_i}.$$

Com $f \in \mathcal{F}$ és equicontínua per a cada $x_i \in K$ i, com acabem de veure, $|y - x_i| \leq \delta_{x_i}$, aleshores $|f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalment, per a tota $f \in \mathcal{F}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$ ■

Exercici 4.6. *Sigui (X, d) un espai mètric i sigui $\sigma : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ una funció contínua, no decreixent amb $\sigma(0) = 0$. Sigui $\mathcal{F}_\sigma$ la família formada per totes les funcions $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que $|f(x) - f(y)| \leq \sigma(d(x, y))$, $x, y \in X$. Proveu que $\mathcal{F}_\sigma$ és equicontínua.*

Demostració. Provarem que $\mathcal{F}_\sigma$ és uniformement equicontínua, és a dir, que donat $\varepsilon > 0$ existeix $\eta > 0$ de manera que si $x, y \in X$, amb $d(x, y) < \eta$, llavors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $f \in \mathcal{F}_\sigma$. I, en efecte, de $\sigma \in C([0, +\infty))$ podem inferir, per exemple, que si $|t| < \eta$ aleshores $|\sigma(t)| = \sigma(t) < \varepsilon$[18]. Així doncs, prenent $\delta < \eta$[19] i x, y tals que $d(x, y) < \delta$: per a tota $f \in \mathcal{F}_\sigma$, al ser σ creixent, tenim:

$$|f(x) - f(y)| \leq \sigma(d(x, y)) \leq \sigma(\delta) < \varepsilon,$$

provant que $\mathcal{F}_\sigma$ és uniformement equicontínua i, en particular, equicontínua. ■

Exercici 4.7.

1. *Sigui $a < b$ i $(f_n)_n$ una successió de funcions contínues en $[a, b]$ uniformement acotades. Per a $n \geq 1$, definim $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt$, $x \in [a, b]$. Demostreu que la successió $(F_n)_n$ té una parcial convergent uniformement en $[a, b]$.*
2. *Sigui $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una successió de funcions contínues en $[a, b]$ sense parcials convergents. Té la successió $F_n(x) = \int_a^x \sin(f_n(t))\, dt$ alguna parcial convergent?*

Demostració. Aquest problema es basarà en l'aplicació del teorma de Arzela-Ascoli. El que ens diu aquest és que, en $[a, b]$ (un espai mètric compacte) i prenent $\mathcal{K} = (F_n)_n \subset C_{\mathbb{R}}([a, b])$, són equivalents que $\mathcal{K}$ sigui compacte i que $(F_n)_n$ sigui tancada, acotada i equicontínua.

[18] Surt de la definició de continuïtat: si $|x - y| < \eta$, aleshores $|\sigma(x) - \sigma(y)| < \varepsilon$, i com σ pren valors en $[0, +\infty)$ podem obviar el valor absolut.

[19] És força probable que la desigualtat no hagi de ser estricta, de manera que podríem haver-nos estalviat la definició de η, però segurament sigui més rigorós així.

1. Hem de provar que $(F_n)_n$ és uniformement acotada i equicontínua. Com que $(f_n)_n$ una successió uniformement acotada, existeix $M > 0$ tal que $\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)| \leq M$, per a tot $x \in [a,b]$. Per tant, si $n \geq 1$ i $x \in [a,b]$:

$$|F_n(x)| = \left|\int_a^x f_n(t)\,dt\right| \leq \int_a^x |f_n(t)|\,dt \leq M\int_a^x dt = M(x-a) \leq M(b-a) \ll \infty,$$

ja que $a \leq x \leq b$. Per tant, $|F_n(x)| \leq M(b-a)$ per a tot $x \in [a,b]$ i també està uniformement acotada. Queda veure que és equicontínua: si veiem que és uniformement equicontínua, ja haurem acabat. I, en efecte, $\forall \varepsilon > 0$ i $\forall n$ existeix $\delta > 0$ tal que si $d_X(x,y) < \delta$, $x, y \in [a,b]$, $|F_n(x) - F_n(y)| < \varepsilon$:

$$|F_n(x)-F_n(y)| \leq \left|\int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^y f_n(t)\,dt\right| = \left|\int_x^y f_n(t)\,dt\right| \leq \int_x^y |f_n(t)|\,dt \leq M|x-y|,$$

i com $x-y < \delta$ i $|F_n(x)-F_n(y)| < M\delta$, prenent $\varepsilon = M\delta$ ja hem acabat. Ens podem adonar, també, que:

$$|F_n(x) - F_n(y)| \leq |F_n(x)| + |F_n(y)| = 2M(b-a).$$

Però això solament ens dona acotació, ja que $b-a$ no es pot fer tan petit com vulguem (no podem definir δ a partir de $d_X(a,b)$). Finalment, com hem demostrat que K és compacte, pel teorema de Weierstrass $(F_n)_n$ té una parcial convergent, i pel teorema de convergència uniforme i compacticitat, aquesta parcial és convergent uniformement en $[a,b]$. ■

Exercici 4.8. *Sigui $f \in C^1(\mathbb{R})$. Suposem que $f(0) = 0$ i que $|f'(0)| < 1$. Definim $f_n = f \circ \overset{n}{\cdots} \circ f$ i $g(x) = 0$.*

1. *Demostra que si $x \in \mathbb{R}$ és tal que $f_n(x) \to 0$ quan $n \to \infty$, aleshores existeix un interval obert I_x centrat en x de tal manera que $f_n(y) \to 0$ quan $n \to \infty$, per $y \in I_x$. Dedueix que la conca d'atracció de 0, $U_0 = \{x \mid f_n(x) \to 0\}$, és un conjunt obert.*
   ***Nota**: utilitzeu el teorema del valor mitjà.*
2. *Demostra que si $I \subset U_0$ és un interval tancat i fitat, aleshores $\{f_n \mid I \longrightarrow \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{g\}$ és un conjunt compacte de funcions contínues.*
3. *Demostra que si $I \subset U_0$ és un interval tancat i fitat, aleshores $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ és un conjunt de funcions equicontínues en I.*

Demostració.

1. Volem acabar provant que $|f_n(x) - f_n(y)| \to 0$ quan $n \to \infty$. f és contínua i amb derivada contínua, pel que si $|f'(0)| < 1$ existeix un entorn J del 0 suficientment petit tal que $|f'(j)| < 1$ per a tot $j \in J$. Sigui $x \in \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) \to 0$ quan $n \to \infty$. Aleshores, existeix un n_0 tal que per a tot $n > n_0$,

$f_n(x) \in J$. Com f_n és contínua, *existeix* un $I_x = (x-\delta, x+\delta)$ tal que $f_n(I_x) \subset J$[20]. Aleshores, donat $n > n_0$ (és important que sigui estricta, ja que $n - 1 \geq n_0$ que és el que estem buscant) i $y \in I_x$, pel teorema del valor mitjà (cf. A.17, aplicat a $x := f_{n-1}(x) \in I_x$ i $y := f_{n-1}(y) \in I_x$) tenim:

$$|f_n(y)-f_n(x)| = |f(f_{n-1}(y))-f(f_{n-1}(x))| \leq |f'(\xi)|\cdot|f_{n-1}(y)-f_{n-1}(x)| < |f_{n-1}(y)-f_{n-1}(x)| \to 0$$

Tenir en compte que $\xi \in (f_{n-1}(x), f_{n-1}(y)) \subset J$, pel que $|f'(\xi)| < 1$. També, per la mateixa raó, $|f_{n-1}(y) - f_{n-1}(x)| \to 0$ quan $n \to \infty$. D'aquesta manera, $f_n(y) \to 0$ quan $n \to \infty$. $U_0 = \{x \mid f_n(x) \to 0\}$, és un conjunt obert, el mateix entorn J.

2. Sabem que $f_n \to g$ puntualment per l'apartat anterior. De fet, per a tot $x \in I \subset J$ la convergència en $I_x = (x-\delta, x+\delta)$ és uniforme, ja que si $y, z \in I_x$, aleshores $|f_n(y) - f_n(z)| \to 0$ quan $n \to \infty$. Com que $I \subset U_0 \subset \mathbb{R}$ és tancat i acotat, pel teorema de Heine-Börel és compacte i $I = \bigcup_{x\in I} I_x$ n'és un recobriment, del qual en podem trobar un subrecobriment finit, $I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$. Amb la configuració anterior, existeixen $n_1, \ldots, n_n \in \mathbb{N}$ tals que:

$$f_{n_1}(I_1) \subset J,\ f_{n_2}(I_2) \subset J, \ldots, f_{n_n}(I_n) \subset J.$$

Així, la convergència és uniforme en I. Sigui $n_0 = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} n_j$, tenim $f_{n_0}(I_j) \subset J$ per a tot j. Per tant, com abans $|f_n(y) - f_n(z)| \to 0$ quan $n \to \infty$, $n > n_0$, però ara ens val amb què $x, y \in I$, no fa falta I_x. Qualsevol successió d'elements de $(f_n)_{n\geq 0}$ que no tingui parcials constants ha de contenir infinits elements diferents de $(f_n)_{n\geq 1}$ i, en particular, conté una parcial de $(f_n)_{n\geq 1}$. En ser uniformement convergent a la successió g, la parcial també ha de convergir uniformement a g. Per tant, hem vist que el conjunt és compacte per successions i, per tant, compacte.

3. Conseqüència de l'apartat anterior, i del teorema d'Arzela-Ascoli aplicat al conjunt compacte $f_n \to g$ quan $n \to \infty$. La fita uniforme prové del fet que convergeixen uniformement a la funció constant, que és una funció fitada. ■

Observació 4.9. El conjunt de punts x tals que existeix un entorn U de x on $(f_n)_n$ és equicontínua, s'anomena normalment conjunt de Fatou de la funció f. El seu complementari és el conjunt de Julia, que exhibeix un comportament caòtic i un aspecte típicament fractal. Els resultats anteriors són extrapolables al pla complex: el conjunt de Mandelbrot és el conjunt de punts $c \in \mathbb{C}$ tals que $f_c(z) = z^2 - c$ té un conjunt de Julia connex.

[20] Si es vol, $J = (f_n(x) - \varepsilon, f_n(x) + \varepsilon), \forall \varepsilon > 0$.

5
Sèries de potències

Exercici 5.1. *Calcul el radi de convergència de les següents sèries de potències:*

1. $\displaystyle\sum_n \frac{x^n}{n^n}$,
2. $\displaystyle\sum_n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$,
3. $\displaystyle\sum_n n!x^{2n}$,
4. $\displaystyle\sum_n (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{2n}$,
5. $\displaystyle\sum_n \frac{n!x^n}{n^n}$,
6. $\displaystyle\sum_n \frac{2^n x^n}{n}$.

Demostració.

1. Anirem poc a poc perquè és el primer. Si prenem $(a_n)_n = \frac{1}{n^n}$ i $(x^n)_n = x^n$, tenim que $\frac{1}{R} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \overline{\lim_n} \frac{1}{n} = 0$ i $R = +\infty$.
2. Aplicant el criteri del quocient, tenim:
$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1.$$
Ja veurem que el radi de convergència $R = 1$ és força útil en molts contextos.
3. Fem el canvi de variable $y = x^2$, de manera que passem a tenir la sèrie $\sum_n n!y^n$. Aplicarem, doncs, el criteri del quocient:
$$R' = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$
Com es tradueix això per a $\sum_n n!x^{2n}$? Tenim que la sèrie divergeix si $|y| = |x^2| > 0 \iff |x| > 0$ i, per tant, $R = 0$.
4. Podem reescriure-la en termes del criteri del quocient, de manera que $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}(4x^2)^n$ i posant $y = 4x^2$ queda $a_n = \frac{1}{2n}(-y)^n$. Aplicant el criteri:
$$R' = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n} = 1.$$
Llavors la sèrie convergeix si, i només si, $|y| = |4x^2| = 4|x^2| < 1$; resolent la inequació obtenim que $|x| < \frac{1}{2}$. D'igual manera, trobem que la sèrie divergeix si, i només si $|x| > \frac{1}{2}$. Per tant, $R = \frac{1}{2}$.

Observació 5.2. Altrament, podríem haver optat pel criteri de l'arrel i la subsuccessió $a_{2n} = (-1)^n \frac{2^{2n}}{2n}$. En aquest cas:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim_n} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{2^{2n}}{2n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{2n}} = 2 \implies R = \frac{1}{2}.$$

5. Tenim $a_n = \frac{n!}{n^n}$ i no tenim més remei que aplicar el criteri del quocient (el de l'arrel no ens aniria molt bé):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot (n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

6. Finalment, $a_n = \frac{2^n}{n}$ i aplicant el criteri del quocient:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2\cdot 2^n}{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$ ■

Exercici 5.3. *Considerem la sèrie de potències:* $\sum_n \frac{n+1}{n} \left(\frac{x}{3}\right)^n$.

1. *Estudieu la convergència puntual i uniforme de la sèrie.*
2. *Trobeu la suma de la sèrie en tot punt x del domini de convergència.*
3. *Quin és el valor de* $\sum_n \frac{n+1}{n 9^n}$*?*

Demostració.

1. Comencem calculant el radi de convergència de la sèrie, $(a_n)_n = \frac{n+1}{n \cdot 3^n}$:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{n+2}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{n+1}{n\cdot 3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{3(n+1)^2} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3(n+1)^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Per tant, la sèrie convergeix (puntualment) si, i només si, $|x| < R = 3$, és a dir, en $(-3, 3)$. De fet, per $x = 3$ tenim $\sum_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, que conegudament divergeix; d'altra banda, per a $x = -3$, $\sum_n (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, que divergeix també. La sèrie convergeix uniformement en $[-r, r]$, per a tot $r \in (0, 3)$[21].

2. Consultar 5.4. Primer, fem el canvi de variable $y = \frac{x}{3}$, de manera que el radi de convergència esdevé $R' = \frac{3}{3} = 1$ i per a $|y| < 1$:

$$S(y) = \sum_n \frac{n+1}{n} y^n \iff yS'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) y^n.$$

[21] Aquest argument de *convergeix puntualment en* $(-3, 3)$*, però convergeix uniformement en* $[-r, r]$*,* $r \in (0, 3)$ és conseqüència del criteri M de Weierstrass, i ve d'una proposició de teoria. Aquesta ens assegura, a més, que la funció $f(x) = \sum_n a_n x^n$ és contínua en $(-3, 3)$.

Resolem $yS'(y)$. Tenim $R = 1$. Per tant la sèrie és convergent per $|y| < 1$ i divergent per $|y| > 1$. També és fàcil veure que la sèrie divergeix tant en $y = 1$ com en $y = -1$. A més, la sèrie convergeix uniformement en $[-r, r]$ per a tot $0 < r < 1$. Integrant la sèrie de potències terme a terme, obtenim que la primitiva ve donada per:

$$G(y) = \sum_{n\geq 1} y^{n+1} + C = \frac{y^2}{1-y} + C \implies S(y) = G'(y) = \frac{2x(1-y)+y^2}{(1-y)^2} = \frac{2y-y^2}{(1-y)^2}, \ |y| < 1.$$

Per tant, i calculant la primitiva,

$$S'(y) = \frac{2-y}{(1-y)^2} \implies S(y) = \frac{1}{1-y} - \ln(1-y) + C, \ |y| < 1.$$

Com que $S(0) = 0$, se segueix que $C = -1$ i:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n = S\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \ln\left(1-\frac{x}{3}\right) - 1, \ |x| < 3.$$

3. Si prenem $x = \frac{1}{3}$ en la fórmula de l'apartat anterior, obtenim que el valor és $\frac{1}{8} + \ln\left(\frac{9}{8}\right)$. ■

Observació 5.4. La suma de la sèrie en tot punt x del domini de convergència es fa a partir de la identitat $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. És a dir, totes les sèries en què aplicarem aquest procediment tindran $R = 1$. Recordem que a $|x| < R$, podem integrar o derivar una sèrie de potències fent-ho terme a terme.

Exercici 5.5. *Estudieu la convergència de la sèrie de potències:*

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{nx^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

Si $f(x)$ denota la seva suma, proveu que $|x| < 1$ es compleix que:

$$x^2 \int_0^x f'(t)\frac{dt}{t} = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

Exercici 5.6. *Considereu l'equació $xf''(x) = f(x)$ amb $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. Determineu la relació de recurrència que compleixen els coeficients d'una sèrie de potències $f(x) = \sum_n c_n x^n$ que, en el seu domini de definició, compleixi l'equació. Quin és el seu radi de convergència?*

Demostració. Si $f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$, llavors:

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} nc_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)c_{n+1}x^n \text{ i } f''(x) = \sum_{n\geq 1} n(n+1)c_{n+1}x^{n-1}.$$

Ens interessa derivar més que integrar a causa de la identitat de la hipòtesi, $xf''(x) = f(x)$. Com $f(0) = 0$, $c_0 = 0$ i:

$$xf''(x) = \sum_{n\geq 1} n(n+1)c_{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0} c_n x^n = \sum_{n\geq 1} c_n x^n = f(x).$$

Per tant, tenim $(c_n)_n$ definida recursivament: $c_n = n(n+1)c_{n+1}$ o, equivalentment, $c_{n+1} = \dfrac{c_n}{n(n+1)}$. Com $f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots$ i $f'(0) = 1$, es dedueix que $c_1 = 1$. Per inducció:

$$c_3 = \frac{c_2}{2\cdot 3} = \frac{\frac{c_1}{1\cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{c_1}{1\cdot 2\cdot 3},\ c_4 = \frac{c_3}{3\cdot 4} = \frac{c_1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4} \implies c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!\cdot n!}.$$

Per tant, $f(x) = \displaystyle\sum_n \frac{x^n}{(n+1)!\cdot n!}$ i, pel criteri del quocient podem calcular el radi de convergència R:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n!\cdot(n-1)!}{(n+1)!n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0.$$

Per tant, $R = +\infty$. ∎

Exercici 5.7. *Trobeu l'expressió en sèrie de potències de f al voltant de l'origen de la funció $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$ especificant el domini de convergència de la sèrie.*

Demostració. Aquí el truc és expressar $f(x)$ com a fraccions simples, és a dir:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} \iff \begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \xrightarrow{A=-1, B=2} f(x) = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

I veure que podem expressar aquests dos termes com a resultats de sèries geomètriques infinites:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{x-2} &= -\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n, & |x| < 2 \\ -\frac{1}{x-1} &= \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, & |x| < 1 \end{aligned}\right\} \implies f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n - \sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)x^n$$

Ens faltaria trobar el radi de convergència, que fem amb un simple criteri del quocient. Ens quedaria $R = 1$. Quan $x = 1, -1$ la sèrie divergeix en els dos casos. El domini de convergència és, doncs, $(-1, 1)$. ∎

Exercici 5.8. *Sigui $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2 - n - 3}{n+1} x^n$.*

1. *Estudieu la convergència puntual i uniforme de la sèrie.*
2. *Calculeu la suma de la sèrie de potències en el seu domini.*

Demostració.

1. Posem $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, on $a_n = \dfrac{n^2-n-3}{n+1}$. Podem calcular el radi de convergència de la sèrie amb el criteri del quocient:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)((n+1)^2 - (n+1) - 3)}{(n+2)(n^2 - n - 3)} = 1.$$

Es compleix, doncs, que el radi de convergència de la sèrie de potències és $R = 1$. Així, mirem els punts de contacte, $x \in \{-1, 1\}$. Quan $x = -1$ tenim una sèrie alternada tal que $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, de manera que no és convergent (per exemple, per Dirichlet). En el cas $x = 1$, exactament el mateix: $\displaystyle\sum_n a_n \to \infty$. Per tant, tampoc és convergent en $x = 1$.

2. El primer que fem és reescriure $\dfrac{n^2-n-3}{n+1} = n-2-\dfrac{1}{n+1}$. Per tant:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n^2-n-3}{n+1}x^n = \sum_{n\geq 1} nx^n - 2\sum_{n\geq 1} x^n - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}x^n = h(x) - 2\sum_{n\geq 1} x^n - g(x).$$

Cadascuna d'aquestes sèries té radi de convergència 1, de manera que aquesta reescriptura és certa per a tot $|x| < 1$. Però $h(x) = xh_1(x)$ on $h_1(x) = \sum_{n=1} nx^{n-1}$. I per a $|x| < 1$,

$$\int_0^x h_1(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Per tant, $h_1(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}ih(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. Ara si posem $g_1(x) = xg(x)$, es compleix que $g_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$. Per tant,

$$g_1(x) - g_1(0) = \int_0^x \frac{t}{1-t}dt = -x - \ln(1-x) \implies g(x) = -1 - \frac{\ln(1-x)}{x},\ x \neq 0,\ g(0) = 0.$$

Finalment,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n-3}{n+1}x^n = \frac{x}{(1-x)^2} - 2\frac{x}{1-x} - 1 - \frac{\ln(1-x)}{x},$$

si $x \neq 0$, i si $x = 0$ val zero. ■

Exercici 5.9. *Considerem la sèrie de funcions definida per:*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x^2+2)^n}{n(n-1)5^{n-1}}.$$

1. *Trobeu el conjunt E de punts $x \in \mathbb{R}$ tals que la sèrie és convergent.*
2. *Hi ha convergència uniforme de la sèrie en E?*

Demostració.

1. Podem reescriure la sèrie com: $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{5}{n(n-1)}\cdot\left(\dfrac{x^2+2}{5}\right)^n$. Per tant, si posem $y = \dfrac{x^2+2}{5}$, tenim $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{5}{n(n-1)}\cdot y^n$ podem aplicar el criteri del quocient per a $a_n = \dfrac{5}{n(n-1)}$:

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{(n+1)n}}{\frac{5}{n(n-1)}} = 1.$$

També ho fa per als valors $y = -1, 1$:

1.1. $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{5}{n(n-1)}$ és convergent, ja que es comporta com una $\sum_{n}\dfrac{1}{n^2}$ que també ho és.

1.2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n(n-1)}(-1)^n$ és una sèrie alternada amb $\dfrac{5}{n(n-1)} \searrow 0$, de manera que és convergent pel criteri de Dirichlet.

Així doncs, la sèrie convergeix si, i només si, $y \in [-1, 1]$, i $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|\dfrac{x^2+2}{5}\right| \leq 1\right\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

2. Perquè la convergència sigui uniforme, podem aplicar el criteri M de Weierstrass. I, en efecte, podem trobar una cota per a cada f_n:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{5}{n(n-1)} \cdot y^n\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n(n-1)} \ll \infty.$$

Ho podem fer ja que $|y^n| < 1$ per a tot n; naturalment, cada $\dfrac{5}{n(n-1)} \cdot y^n$ està acotat per $\dfrac{5}{n(n-1)}$. De manera que $\displaystyle\sum_n M_n \ll \infty$ i la sèrie és uniformement convergent en E. ■

Exercici 5.10. *Calculeu la suma de la sèrie* $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$.

Demostració. Considerem la sèrie de potències $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$, que té radi de convergència $R = 1$, i volem calcular el valor en $x = \dfrac{1}{2}$. Aleshores,

$$xS(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \implies (xS(x))' = \sum_{n\geq 1} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n\geq 1} (-x^2)^n = \frac{-x^2}{1+x^2}, \ |x| < 1.$$

Calculant *una* primitiva, obtenim que $xS(x) = -x + \arctan x + C$ i prenent $x = 0$ obtenim $C = 0$ amb el que, com

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1,$$

se segueix que:

$$S(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{x}\arctan(x), & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Per tant, $S\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1 + 2\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$. ■

Exercici 5.11. *Si* $x \in \mathbb{R}$, *proveu que:*

$$\sin^2(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Demostració. Derivarem i tornarem a integrar. Ho farem en aquest ordre perquè farem ús de la identitat $(\sin^2(x))' = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, que podem posar com una sèrie infinita de Taylor:

$$\sin(2x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n 2^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ara podem integrar terme a terme i donar *una* primitiva:

$$\sin^2(x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\int x^{2n+1}\,dx = C + \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

Com que $\sin^2(0) = 0$, $C = 0$. Per tant, posant $k = n+1$:

$$\sin^2(x) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}.$$

∎

Exercici 5.12. *Considereu la sèrie de potències* $\sum_n \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n(2n-1)}$. *Trobeu el domini de convergència i calculeu la suma de la sèrie en els punts del domini, detallant els intervals on la sèrie és uniformement convergent. Justifiqueu tots els passos.*

Demostració. No ens entretindrem molt, ni entrarem en molt de detall. Es pot comprovar mitjançant el criteri del quocient que $R = 1$, que per $x = -1, 1$ la sèrie convergeix i que en virtut del teorema d'Abel la sèrie és convergent (uniformement) en $[-1,1]$, el domini de convergència. Tenim $S(x) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n+1}$; per tant podem definir $f(x) = \frac{S(x)}{x}$ en $[-1,0)\cup(0,1]$ i estendre-ho contínuament al $x = 0$:

$$f(x) = \frac{S(x)}{x} = \sum_{n\geq 1} f_n,\ f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n}, & \text{si } x\neq 0;\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Queda clar que si derivem (podem derivar terme a terme, per teoria) ens podrem desfer del n al denominador; per tant:

$$f'(x) = \left(\frac{S(x)}{x}\right)' = \sum_{n\geq 1} f_n',\ f_n'(x) = \begin{cases} 2\dfrac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}, & \text{si } x\neq 0;\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Si tornem a derivar (terme a terme, un altre cop), podrem desfer-nos del $2n-1$ i calcular la sèrie per a $x\neq 0$:

$$f''(x) = \left(\frac{S(x)}{x}\right)'' = \sum_{n\geq 1} f_n'',\ f_n''(x) = \begin{cases} 2(-1)^n x^{2(n-1)}, & \text{si } x\neq 0;\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases} \implies -2\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)} = -2\sum_{n\geq 0}(-x^2)^n$$

I el resultat d'aquesta sèrie és $\frac{-2}{1+x^2}$. Per com hem definit $f''(x), f'(x)$ i $f(x)$, tenim que $f(0) = f'(0) = f''(0)$, i podem calcular l'integral *definida*, des del 0.

$$f'(x) = \int_0^x -\frac{2}{1+t^2}\,dt = -2\arctan x \implies f(x) = \int_0^x -2\arctan t\,dt = -2x\arctan x + \ln|1+x^2|.$$

Aquesta última integral l'hem feta per parts. Hem vist, doncs, que per $x\in[-1,1]$ tenim $S(x) = xf(x) = -2x^2\arctan x + 2x\ln|1+x^2|$. ∎

Exercici 5.13. *Per a $n \in \mathbb{N}$, sigui:*

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}(1-\cos x)^{2n-1}, \;\; x \in \mathbb{R},$$

i sigui E el conjunt dels nombres $x \in \mathbb{R}$ tals que convergeix la sèrie $\sum_n f_n(x)$. Determineu E.

Demostració. Hem de fer un canvi de variable, $y = 1 - \cos x$, i determinar el radi de convergència per a $(a_n)_n = \dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)}$. Pel que fa al radi de convergència:

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{1}{n(2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} = 1.$$

Ara, la convergència (uniforme, per Abel) està assegurada per a $|y| \leq 1$ (es pot comprovar que per als punts $y = -1, 1$ també ho és), desfent el canvi de variable, $E = \{x \mid 1 - \cos x \in [-1, 1]\} = \{x \mid \cos x \geq 0\}$. ■

6
Sèries de Fourier

Definició 6.1 (Sèrie de Fourier). Sigui $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi))$. Definim el coeficient de Fourier de f d'ordre $n \in \mathbb{Z}$ i la sèrie de Fourier, $Sf(x)$:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \;\; Sf(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx}, \;\; S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

Al tractar amb funcions 2π-periòdiques, també podem considerar funcions $f : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables i calcular $\widehat{f}(n)$ com:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\,.$$

En termes de sinus i cosinus, la sèrie de Fourier de f queda com:

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx),$$

on:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,.$$

Exercici 6.2. *Considerem la funció 2π-periòdica, que en $[-\pi, \pi)$ ve definida per:*

$$f(x) = \begin{cases} -\cos(x), & si \; -\pi \leq x < 0, \\ 0, & si \; x = 0, \\ \cos(x), & si \; -\pi \leq 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Demostreu la sèrie de Fourier de f ve donada per:

$$Sf(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1}\sin(2nx).$$

Demostració. Adonem-nos que la funció $f(x)$ és senar i, per tant, $\sum_{k\geq 1} a_k\cos(kx) = 0$[22] (cada a_n ens donaria 0). És a dir, la seva sèrie de Fourier ve donada per $Sf(x) = \sum_{k\geq 1} b_n \sin(nx)$. Anem a calcular els b_n:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \overset{23}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(kx)\,dx,\ \ I_k = \int_0^{\pi}\cos(x)\sin(kx)\,dx\,.$$

Integrant aquesta I_k per parts, veiem que:

$$\begin{aligned}I_k &= (\sin x\cdot\sin(kx))_{x=0}^{x=\pi} - k\int_0^{\pi}\sin x\cos(kx)\,dx = -k\int_0^{\pi}\sin x\cos(kx)\,dx\\ &= -k\left((-\cos x)(-k\sin(kx))\right)_{x=0}^{x=\pi} + k\int_0^{\pi}(-\cos x)(-k\sin(kx))\,dx\\ &= k((\cos\pi\cos(k\pi)-1)) + k^2 I_k = -k((-1)^k+1) + k^2 I_k,\end{aligned}$$

d'on obtenim que $(1-k^2)I_k = -k((-1)^k+1)$ i $I_k = \dfrac{k}{k^2-1}((-1)^k+1)$. Per tant:

$$b_k = \frac{2}{\pi}I_k = \begin{cases}0, & \text{si } k \text{ és senar, } k = 2n-1;\\ \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{2n}{4n^2-1}, & \text{si } k \text{ és parell, } k = 2n.\end{cases}$$

Així doncs,

$$Sf(x) = \sum_{k\geq 1} b_k\sin(kx) = \sum_{n\geq 1} b_{2n}\sin(2nx) = \frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2nx).$$

■

Exercici 6.3. *Sigui f una funció senar, 2π-periòdica definida en $[0,\pi]$ per $f(x) = x(\pi - x)$.*

1. *Calculeu la sèrie de Fourier de f.*
2. *Calculeu $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+3)^3}$.*

Demostració.

1. Com f és senar i 2π-periòdica, $Sf(x) = \sum_{n\geq 1} b_n\sin(nx)$ i $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$. Per a fer aquest càlcul, podem servir-nos d'un parell d'integrals per part iterades, amb les quals no ens entretindrem. Obtenim que $b_n = \dfrac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)$, de manera que:

$$b_n = \begin{cases}0, & \text{si } n = 2k,\\ \dfrac{8}{\pi(2k-1)^3}, & \text{si } n = 2k-1,\end{cases} \implies Sf(x) = \sum_k b_{2k-1}\sin((2k-1)x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin((2k-1)x).$$

[22] la funció $f(x)$ és senar i la funció $\cos(x)$ és parella, de manera que el seu producte és una funció senar, i per a tota funció senar tenim que per a tot a tenim que $\int_{-a}^{a} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$. a és finit o infinit, i la funció no té cap asímptota vertical entre $-a$ i a.

[23] El producte de dues funcions senars és una funció parella, i la integral d'una funció parella entre $-a$ i a és el doble de la integral entre 0 i a, on a és finit o infinit, i la funció no té cap asímptota vertical entre $-a$ i a.

2. Aquí es posa interessant. Sembla que no tingui res a veure amb l'apartat anterior, però com $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = Sf\left(\frac{\pi}{2}\right)$, i $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$, tenim que:

$$\frac{\pi^2}{4} = Sf\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)\right)(-1)^k$$

Llavors, aïllant tenim que:

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\left((2k-1)\right)(-1)^k = \frac{\pi^3}{32}.$$

Llavors, a partir d'aquí és qüestió de reescriure el sumatori com se'ns demana. Posant $r = k+2$:

$$\sum_{r\geq -1}\frac{(-1)^{r+2}}{(2r+3)^3} = 1 - \sum_{r\geq 0}\frac{(-1)^r}{(2r+3)^3} \iff \sum_{r\geq 0}\frac{(-1)^r}{(2r+3)^3} = 1 - \frac{\pi^3}{32}.$$ ■

Exercici 6.4. *Sigui f una funció integrable en $\mathbb{T}$.*

1. *Si f és π-periòdica, demostreu que per a tot n senar, $\widehat{f}(n) = 0$.*
2. *Si f pren valors reals, demostreu que per a tot $n \geq 1$, $\widehat{f}(-n) = \overline{\widehat{f}(n)}$.*

Demostració.

1. Donat que f és π periòdica, es compleix que

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \int_{-\pi}^{0} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta + \int_{0}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{0} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta + \int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)e^{-in(t+\pi)}dt = \int_{-\pi}^{0} f(\theta)\left(1+e^{-in\pi}\right)e^{-in\theta}dt. \end{aligned}$$

Però, si n és senar, la darrera integral és zero, utilitzant que si n és senar, $e^{-in\pi} = -1$.

2. Donat que f pren valors reals, es compleix que $f = \bar{f}$. Per tant,

$$\overline{\widehat{f}(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(\theta)e^{-in\theta}}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{in\theta}d\theta = \widehat{f}(-n).$$ ■

Exercici 6.5. *Sigui f una funció integrable en $\mathbb{T}$. Demostreu que si f és decreixent a $[0, 2\pi]$, llavors per a cada $n \geq 1$ tenim que:*

$$A_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \geq 0.$$

Demostració. El que fem és dividir l'interval $[0, 2\pi]$ en una partició $\mathcal{P} = \{a_0 = 0, \ldots, a_n = 2\pi\} = \left\{a_i \mid a_i = \frac{2\pi k}{n}\right\}$, $i = 0, \ldots, n$ i prenem $I_j = [a_j, a_{j+1}]$, $0 \leq j < n$. Pel teorema fonamental del càlcul, podem considerar $A_n(f)$ com la suma de les integrals en I_j per a tot j, és a dir:

$$A_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{\frac{2\pi k}{n}}} f(x)\sin(nx)\,dx\,.$$

A més, si $j < n$, el canvi de variable $y = nx$ ens dona que

$$\int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} \sin(nx)\, dx = \frac{1}{n}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \sin y\, dy = 0,$$

ja que el sinus és una funció 2π-periòdica i senar. Per tant:

$$\int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} \sin(nx)\, dx = \int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{\pi(2k+1)}{n}} f(x)\sin(nx)\, dx + \int_{\frac{\pi(2k+1)}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} f(x)\sin(nx)\, dx,$$

ja que $2\pi k < (2k+1)\pi < 2\pi(k+1)$. Donat que f és decreixent, si $x \in \left(\frac{2\pi k}{n}, \frac{\pi(2k+1)}{n}\right)$, es compleix que $f(x) - f\left(\frac{\pi(2k+1)}{n}\right) \geq 0$ i també en aquest interval $\sin(nx) \geq 0$. Anàlogament, si $x \in \left(\frac{\pi(2k+1)}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n}\right)$, tenim que $f(x) - f\left(\frac{2\pi(k+1)}{n}\right) \leq 0$ i també en aquest interval $\sin(nx) \leq 0$. Per tant, en tots dos casos tenim una integral més gran que 0. ■

Exercici 6.6. *Sigui f una funció integrable en $\mathbb{T}$ i sigui $n \geq 1$. Definim $p(x) = f(nx)$ per a tot $x \in \mathbb{T}$. Demostreu que si $m \in \mathbb{Z}$, llavors:*

$$\widehat{p}(m) = \begin{cases} \widehat{f}\left(\frac{m}{n}\right), & \text{si } n \mid m, \\ 0, & \text{en cas contrari}. \end{cases}$$

Exercici 6.7. *Sigui $f \in C^1([-\pi, \pi])$ amb $f(\pi) = f(-\pi)$.*

1. *Proveu que $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$.*
2. *Demostreu que hi ha una constant $M \in (0, +\infty)$ de manera que $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{M}{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$ i $n \neq 0$.*

Exercici 6.8. *Sigui f una funció integrable en $\mathbb{T}$ i acotada per 1. Demostreu que es compleix que $|\widehat{f}(1) - \widehat{f}(0)| \leq \frac{4}{\pi}$.*

Exercici 6.9. *Sigui $f(x) = |x|$ en $[-\pi, \pi)$. Demostra que la sèrie de Fourier $Sf(x)$ és:*

$$Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

Demostració. Sigui $f(x) = |x|$, en $[-\pi, \pi)$. És una funció parella i, per tant, $Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx)$ i tenim $a_0 = \frac{2}{\pi} = \int_0^1 |x|\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\, dx = \pi$. A més, per $n \geq 1$ integrant per parts obtenim:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n}\, dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\sin(n\pi)}{n} - \frac{1}{n}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1) = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$Sf(x) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\right)\cos(nx).$$

Finalment, observem que si $n = 2k$, aleshores $(-1)^n - 1 = 0$ i, per tant:

$$Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$ ■

A

Cinc cèntims de Càlcul

Definició A.1 (Successió). Una successió de nombres reals és una aplicació de $\mathbb{N}$ en a $\mathbb{R}$, és a dir,

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, n \longrightarrow a_n$$

que fa correspondre a cada n un nombre real, $f(n) = a_n$. $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, on a_n serà el **terme general de la successió**.

Definició A.2 (Límit d'una successió). Una successió $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ a $\mathbb{R}$ es diu que té de **límit de la successió** el nombre $l \in \mathbb{R}$, o bé que convergeix cap a l, si per a tot $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, \quad |a_n - l| < \varepsilon$. Escriurem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_n a_n = l$$

Proposició A.3. *Si una successió té límit, aquest és únic.*

Demostració. Suposem que existeixen dos límits l_1 i l_2 d'una mateixa successió $a_{n n\in\mathbb{N}}$. Aleshores, fixat $\varepsilon > 0$, $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|a_n - l_1| < \varepsilon, \forall n \geq n_1$$

$$|a_n - l_2| < \varepsilon, \forall n \geq n_2$$

Llavors, si per $n \geq \max(n_1, n_2)$ tenim que

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon$$

i com això és cert $\forall \varepsilon > 0$, això implica que $l_1 = l_2$. ■

Definició A.4. La successió $\{a_n\}$ és acotada si $\exists k \in \mathbb{R} \mid |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema A.5. *Tota successió convergent és acotada. Com a conseqüència, tota successió no fitada és divergent.*

Teorema A.6. *Siguin $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{\mathbb{N}}$ dues successions amb $\lim_n a_n = a$ i $\lim_n b_n = b$. Aleshores,*

1. $\lim_n (\lambda a_n) = \lambda a$,
2. $\lim_n (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
3. $\lim_n (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

Teorema A.7. *Sigui $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió convergent amb límit $\lim_n a_n = a$. Si existeixen constants $c, d \in \mathbb{R}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$*

$$c \le a_n \le d,\ \forall n \ge n_0 \implies c \le a \le d$$

Demostració. Suposem $a > d$ (l'altre cas es farà de manera similar). Prenem $\varepsilon = a - d > 0$. Per definició de límit, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \ge n_1$ es té

$$|a_n - a| < \varepsilon = a - d$$

En particular,

$$a_n = a - (a - a_n) \ge a - |a - a_n| > a - (a - d) = d$$

i això és contradictori. Per reducció a l'absurd la contradicció ve de suposar $a > d$. Així, $a \le d$. ∎

Teorema A.8. *Siguin $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dues successions satisfent*

$$\lim_n a_n = a$$
$$\lim_n b_n = b$$

Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \le b_n, \forall n \ge n_0$, aleshores $a \le b$.

Teorema A.9 (Lema o Teorema del Sandwich). *Siguin $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successions per a les quals existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$a_n \le b_n \le c_n, \forall n \ge n_0$$

$$\lim_n a_n = \lim_n c_n = l \implies \lim_{\mathbf{n}} \mathbf{b_n} = \mathbf{l}$$

De la mateixa manera, siguin $f, h, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que $f(x) \le h(x) \le g(x), \forall x \in D$ en un entorn d'a. Sigui $a \in D$ pel qual existeixen els límits de f i h al punt d'a i, a més, coincideixen; és a dir, $\ell = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Aleshores, $\lim_{x\to a} h(x) = \ell$.

Teorema A.10. *Tota successió monòtona creixent i acotada superiorment és convergent. Anàlogament, tota successió monòtona decreixent i acotada inferiorment és convergent.*

Definició A.11 (Successió de Cauchy). Una successió $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és de Cauchy si per tot $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \ge n_0$ es té

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Teorema A.12. *Sigui $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió. Aleshores, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és convergent $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és de Cauchy.*

Demostració. Suposem que $\{a_n\}_n$ és convergent. Com que la successió és convergent, $\exists p \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \Big| \ |a_n - p| < \varepsilon/2, \ \forall n > n_0.$$

Per tant, per a qualssevol $n, m > n_0$ tenim:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \Big| \ |a_n - p| < \varepsilon/2; |a_m - p| < \varepsilon/2, \ \forall n, m > n_0.$$

de manera que:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - p| + |a_m - p| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

que és la condició de Cauchy presentada a la definició A.11. ■

Teorema A.13 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Sigui $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió acotada. Aleshores existeix una subsuccessió convergent. Convergent $\Longrightarrow$ fitada, fitada $\Longrightarrow$ parcial convergent.*

Demostració. Primer aclarir que una subsuccessió (o successió parcial) de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió de la forma $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, on $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Prenem $I = [A, B]$ tal que $\forall a_n \in I$ i dividim l'interval en dues meitats. En alguna de les dues meitats hi ha infinits termes de la successió (podrien ser les dues meitats). Ens quedem la meitat I_1 que conté infinits elements i prenem com a a_{n_1} el primer element de la successió que compleix $a_{n_1} \in I_1$. Repetim el procés amb I_1 i ens quedem amb la meitat que conté infinits elements, anomenem-la I_2, triem $a_{n_2} \in I_2$ de la mateixa manera. Anem repetint aquesta idea i obtenim una subsucessió $a_{n_k} \in I_k$ tal que si $k, m \geq n_0$, aleshores:

$$|a_{n_k} - a_{m_k}| < \frac{B - A}{2^{n_0}}$$

perquè cada cop anem fent meitats. Així, $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ és una successió de Cauchy, i per tant, convergent. ■

Proposició A.14 (Criteri de Stolz). *Sigui $(b_n)_n$ una successió estrictament creixent amb $\lim\limits_n b_n = +\infty$ i $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ tals que $\lim\limits_n \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \ell$. Aleshores, $\lim\limits_n \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$.*

Definició A.15 (Infinitèsims).

1. Direm que f és un infinitèsim quan x tendeix a $a \in \mathbb{R}$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
2. Si f, g són dos infinitèsims quan $x \to a$, direm que f és d'ordre superior a g si:

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0.$$

   És a dir, si f es fa petita més ràpidament que g quan x tendeix a a, s'escriu $f(x) = o(g(x)), x \to a$.
3. Direm que f i g són infinitèsims equivalents si:

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 1 \iff f(x) \simeq g(x), \ x \to a.$$

Teorema A.16 (Teorema de Rolle). *Sigui $f \in C([a,b])$, derivable a tot (a,b), tal que $f(a) = f(b)$. Aleshores, existeix $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema A.17 (Teorema del valor mitjà de Lagrange). *Sigui $f \in C([a,b])$ i derivable a tot (a,b). Aleshores, existeix $c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Teorema A.18 (Polinomi de Taylor). *Sigui f una funció $n-1$ cops derivable a un interval I, i sigui $a \in I$ on $f^{(n-1)}$ és derivable. Aleshores, el polinomi:*

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}}{j!}(x-a)^j = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

té ordre de contacte superior a n amb f al punt a.

Referències

[Rud80] Walter. Rudin. *Principios de análisis matemático*. spa. 3ª ed. México, D.F. [etc: McGraw-Hill, 1980. isbn: 9686046828.

[Ort93] Joaquín M. Ortega Aramburu. *Introducción al análisis matemático*. spa. Labor universitaria. Manuales. Bellaterra [etc: Universitat Autònoma de Barcelona [etc.], 1993. isbn: 843353047X.

[Vil22] Mario Vilar. *Càlcul Diferencial en Diverses Variables*. 1a ed. Vol. 1. Barcelona: Universitat de Barcelona, 2022. url: https://mariovilar.github.io/matematiques-enginyeria-informatica/2/quart-semestre/ICI/ici-final.pdf.

Apunts de l'assignatura Introducció al Càlcul Integral, impartida per Albert Clop durant el semestre de tardor del curs 2022/2023.

[Vil23] Mario Vilar. *Càlcul Diferencial en Diverses Variables*. 1a ed. Vol. 1. Barcelona: Universitat de Barcelona, 2023. url: https://mariovilar.github.io/matematiques-enginyeria-informatica/3/cinque-semestre/CDDV/apunts-calc.pdf.

Apunts de l'assignatura Càlcul Diferencial en Diverses Variables, impartida per Xavier Massaneda durant el semestre de tardor del curs 2022/2023.