Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Enginyeria Informàtica

Apunts

Grau en Matemàtiques

Curs 2022-2023 | Cinquè Semestre

Càlcul Diferencial en Diverses Variables

Autor:
Mario Vilar

Professor/a:
Dr. Xavier Massaneda

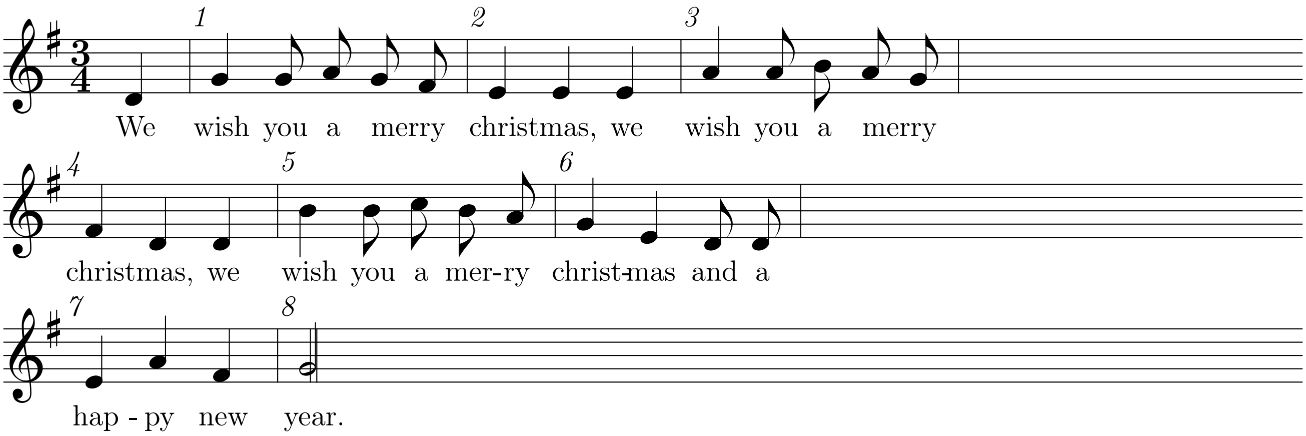
Presentació de l'assignatura

Aquesta assignatura tracta les funcions reals de diverses variables reals, treballant les nocions de límit, continuïtat i diferenciabilitat d'aquestes funcions. S'introdueixen el principals resultats i aplicacions.
Sintetitzats durant les classes de teoria, vigilar amb les errades: s'han fet poques correccions posteriors.

Classificació AMS (2020): 00-01, 97I40, 97I60, 97N40.

Índex

Introducció



Primer de tot, trobareu que hi ha un índex, on hi distingim els diferents apartats ordenats seguint el meu propi criteri i, de tant en tant, seguint l'ordre cronològic del curs. Hi ha capítols, seccions, subseccions (i fins i tot subsubseccions). Us faig cinc cèntims de com he organitzat els encapçalaments de cada pàgina:

1. el número de l'últim capítol/secció/subsecció, depèn de la profunditat que hi hagi definida en aquell moment, figurarà en cada cantonada superior de pàgina parella (per exemple, *1.2*);
2. el nom del capítol es trobarà a la part dreta de la capçalera de les pàgines parelles (per exemple, «Divisibilitat i nombres primers»);
3. el nom de l'última secció/subsecció de la pàgina, a la cantonada dreta superior de les pàgines parelles (per exemple, «Polinomis: algorisme d'Euclides»);
4. el número de l'últim teorema, definició... de la pàgina en qüestió es trobarà a les pàgines senars, a la cantonada superior dreta, destacat en el seu color corresponent (per exemple, **1.2.3**).

A més, hi ha una taula, la taula de contingut, en què es veu fàcilment que s'ha seguit una mena de *sorting-by-color* per poder treballar de manera més eficient amb els diferents tipus d'enunciats matemàtics. D'aquesta manera, si busqueu una definició, un teorema... podreu trobar-los molt ràpidament.

Per últim, m'estalviaré de comentar l'índex terminològic perquè el seu propòsit és clar i, en efecte, paral·lel al de l'organització d'aquest document: poder facilitar-vos al màxim la feina per localitzar qualsevol concepte que desitgeu. Espero que us serveixin d'alguna cosa aquests apunts, els he fet amb tot l'amor del món. Sort!

Teorema de prova. *Aquest és un teorema de prova. Els teoremes, les proposicions, els lemes, els corol·laris, les propietats, les conjectures i els processos tindran aquest format.*

Definició de prova. Aquesta és una definició de prova. Les definicions, els exemples i les notacions tindran aquest format.

Remarca de prova. Aquesta és una remarca de prova. Les remarques tindran aquest format.

Figura 1: Els diferents formats d'enunciats.

Mario VILAR
Sitges, Barcelona
20 de gener de 2023

Taula de continguts

| I | Capítol 1 | I |

III Capítol 3 III

Part I

Topologia, límits, continuïtat i diferenciabilitat

I

Una introducció a la topologia

$$\boxed{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \;\Big|\; (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n) := (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))}$$

1.1 Conceptes bàsics

Definició 1.1.1 (Espai vectorial $\mathbb{R}^n$). Podem equipar el conjunt $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1 \div n\}$ amb una suma i un producte per escalars:

$$\begin{aligned} x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

que fan de $\mathbb{R}^n$ un espai vectorial real, amb dimensió exactament n. Els elements d'aquest espai vectorial es poden denotar amb $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ o bé, directament, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Aquests elements reben el nom de *vectors* i $0 = (0, \ldots, 0)$ n'és l'element neutre de la suma.

Observació 1.1.2. De la mateixa manera, i abusant de la notació:

$$\mathbb{R}^n = \{p = (p_1, \ldots, p_n) \;\big|\; p_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1 \div n\}, \tag{1.1.2}$$

també es pot pensar com a conjunt de punts. En aquest altre context, $\mathbb{R}^n$ té estructura d'espai afí si l'acompanyem de les translacions:

$$T_x(p) = p + x = (p_1 + x_1, \ldots, p_n + x_n), \tag{1.1.3}$$

induïdes per cada x de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$. En particular, donats dos punts $p, q \in \mathbb{R}^n$ existeix un únic vector x tal que $p + x = q$. Aquest vector x s'obté fent *extrem-origen*, és a dir, $x = p - q$.

Per a comprendre la convergència de successions ens interessa conèixer el concepte de topologia de l'ambient. Per construir una topologia seguirem el següent recorregut:

$$\text{producte escalar} \implies \text{norma} \implies \text{distància} \implies \text{topologia}. \tag{1.1.4}$$

1.2 Producte escalar, norma i distància

Definició 1.2.1 (Producte escalar euclidià). Una operació definida a $\mathbb{R}^n$ de la següent manera, que assigna a cada parell de vectors x, y un nombre real que denotarem per $\langle x, y \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Les seves propietats característiques són:

1. **és bilineal**: per a tot x, y, x', y',
2. **és simètric**:
3. **és definit positiu**: $\langle x, x\rangle \geq 0$ i $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

Definició 1.2.2 (Norma de $x \in \mathbb{R}^n$)**.** Podem definir la norma amb la següent equació:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{1.2.2}$$

El fet que el producte escalar estigui definit positiu garanteix que la norma està ben definida. Geomètricament, $\|x\|$ representa la longitud del vector x.

Teorema 1.2.3. *Donats $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta), \text{ on } \theta \text{ és l'angle que formen } x, y. \tag{1.2.3}$$

Demostració. Si $x = 0$ o $y = 0$ el resultat és trivial. Altrament, considerem el triangle de vèrtexs 0, x, y. Els seus costats són $\|x\|, \|y\|, \|x - y\|$. Pel teorema del cosinus:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cos(\theta). \tag{1.2.4}$$

D'altra banda, de la definició de norma, tenim que:

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2. \tag{1.2.5}$$

Si ho combinem tot,

$$\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos(\theta), \tag{1.2.6}$$

tal com volíem veure. ■

Definició 1.2.4 (Projecció ortogonal)**.** Siguin $x, y \in \mathbb{R}^n$ tals que $x, y \neq 0$. Aleshores, $y = P_x(y) + P_x^{\perp}(y)$, on $P_x(y)$ és un múltiple de x i $P_x^{\perp}(y)$ és perpendicular a $P_x(y)$.

Proposició 1.2.5. $\langle P_x(y), P_x^{\perp}(y)\rangle = 0$.

Demostració. Deduint l'expressió de $P_x(y)$ i $P_x^{\perp}(y)$ podem substituir:

$$P_x(y) = (\|y\| \cdot \cos(\theta)) \frac{x}{\|x\|} = \|y\| \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \frac{x}{\|x\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} x. \tag{1.2.7}$$

I, per altra banda, obtenim que:

$$P_x^{\perp}(y) = y - P_x(y) - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} x. \tag{1.2.8}$$

Aleshores:

$$\langle P_x(y), P_x^{\perp}(y)\rangle = \left\langle \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} x, y - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} x \right\rangle = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \langle x, x\rangle = 0. \tag{1.2.9}$$

■

Amb aquesta nova notació que hem introduït, redefinim la desigualtat ja vista de Cauchy-Schwarz.

Teorema 1.2.6 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz). *Per a tot x, y es compleix que:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$
$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2.10}$$

Propietat 1.2.7 (Norma i distància). *La norma de x és $\|x\| = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^{\frac{1}{2}} = \langle x, x\rangle$ i podem establir una sèrie de propietats:*

- *Desigualtat triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*
- *Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.*
- *$\|x\| \geq 0$ i $\|x\| = 0 \iff x = 0$.*

Com ja coneixem, es poden fixar una sèrie de normes. Les més fonamentals són:

1. *Norma 1: $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$.*
2. *Norma ∞: $\|x\|_\infty = \max_{j=1\div n}\{|x_j|\}$*

Definició 1.2.8 (Distància). Siguin dos vectors $x, y \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, la distància entre x i y la definim com $d(x, y) = \|x - y\|$. La distància satisfà les següents propietats característiques:

1. $d(x, y) \geq 0$ i $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. és simètrica: $d(x, y) = d(y, x)$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}^n$;
3. compleix la desigualtat triangular: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, per a tot $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Exercici 1.2.9. *Trobeu la projecció ortogonal de u sobre v, on $u = (1, 0, 2)$ i $v = (-1, 1, 0)$. Aquests dos vectors, formen un angle agut?*

Demostració. Siguin $u = (1, 0, 2)$ i $v = (-1, 1, 0)$. Busquem la projecció ortogonal de u sobre v:

$$w = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \frac{1(-1) + 0 + 2}{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}(-1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right). \tag{1.2.11}$$

■

Exercici 1.2.10. *Trobeu analíticament i representeu gràficament tots els vectors unitaris de $\mathbb{R}^3$ que formen un angle de $\frac{\pi}{4}$ radians amb el vector $(0, 1, 1)$. Quina figura geomètrica representen?*

Demostració. Sigui $u = (a, b, c)$ tal que $\|u\| = 1$, amb l'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ entre u i un vector $(0, 1, 1)$. Com que la norma dels vector u és 1, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. D'altra banda:

$$u \cdot (0, 1, 1) = \|u\| \cdot \|(0, 1, 1)\| \cos\left(\frac{\pi}{4}\right). \tag{1.2.12}$$

Per tant, s'han de complir ambdues equacions: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (que traça l'esfera unitària $\mathbb{S}^2$ i $b + c = 1$, un pla). ■

Exercici 1.2.11. *Utilitzant la desigualtat de Cauchy-Schwarz $|u\cdot v| \leq \|u\|\|v\|$, per a tots $u, v \in \mathbb{R}^n$, provem que si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, llavors:*

$$-\sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}}. \tag{1.2.13}$$

Per quins vectors la primera desigualtat és una igualtat?

Demostració. Primer de tot, com que $|a| \leq b \implies -b \leq a \leq b$, anàlogament $-\|u\|\|v\| \leq uv \leq \|u\|\|v\|$. Sigui ara $v = (x_1, \dots, x_n)$. Hem de sel·leccionar un vector u concret de manera que es compleixi la desigualtat desitjada. Adonem-nos que aquest vector resulta ser $u = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$.

$$\begin{aligned} uv &= \frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}+\cdots+\frac{x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ \|u\|\|v\| &= \sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}} \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Pel que fa al segon apartat, com volem saber $uv = -\|u\|\|v\|$, utilitzem la coneguda $uv = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$. Obtenim que l'angle que formen els vectors ha de ser, necessàriament, $\cos(\theta) = -1$. D'aquesta manera ja hem trobat la nostra condició. ■

1.3 Interior, adherència i frontera

Definició 1.3.1 (Entorn). Prenem com a referència la recta real $\mathbb{R}$. Sigui $a \in \mathbb{R}$ i $r \in \mathbb{R}^+$. L'interval a l'entorn del punt $a \in \mathbb{R}$ és $I = (a-r, a+r) = I(a, r)$.

Definició 1.3.2 (Bola). Anàlogament, prenem $a \in \mathbb{R}^n$. Una bola centrada en a de radi r són tots aquells punts pertanyents a $\mathbb{R}^n$ tals que la distància que els separa d'a és inferior a r.

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) = \|x-a\| < r\}. \tag{1.3.1}$$

Observació 1.3.3. No tota bola és una circumferència. Prenem, per exemple:

$$Q(a,r) = I(a_1,r) \times I(a_2,r) \times \ldots \times I(a_n,r). \tag{1.3.2}$$

En aquest cas, podem posar tota bola dins d'un quadrat i tot quadrat està inscrit en una bola. Prenem, per exemple, el cas $n = 2$ i en fem una representació gràfica:

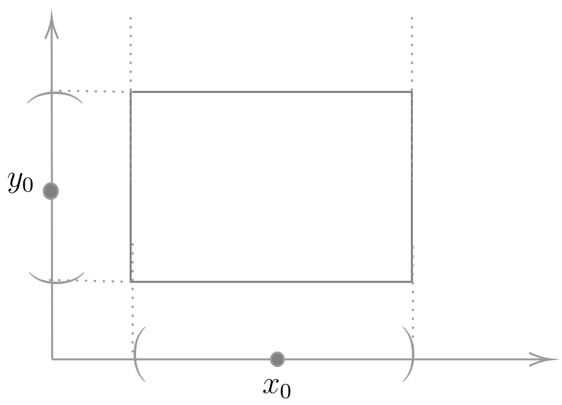


Figura 1.1: Una bola en forma de quadrat.

Definició 1.3.4 (Bola tancada)**.** És un conjunt de punts delimitat per una figura, que en reté els punts. En aquest cas, matemàticament queda definida de la següent manera:

$$\overline{B(a,r)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) \leq r\}. \tag{1.3.3}$$

Definició 1.3.5 (Punt interior)**.** Diem que un punt a és interior a A si $\exists r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$ (està *totalment* continguda en el conjunt, per molt petit que agafem r). Denotem el conjunt dels punts interiors a A com $\mathring{A}$, i observem immediatament que $\mathring{A} \subset A$.

Exemple 1.3.6 (Conjunts i els seus interiors)**.** Prenem que A serà sempre un subconjunt d'$\mathbb{R}^2$.

- Sigui $A = B(a,r)$. Aleshores, $A = \mathring{A}$.
- Sigui $A = \overline{B(a,r)}$. Podem dir que $A \neq \mathring{A}$.
- Sigui $A = \mathbb{Q}$. $\mathring{A} = \emptyset$, ja que tota bola traçable contindrà irracionals.
- Finalment, dir que A és obert si $A = \mathring{A}$ i que $\mathring{A} \subset A$.

Definició 1.3.7 (Punt adherent)**.** Diem que un punt x és adherent a A si $\forall r > 0$ tenim que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Tots els punts pertanyents a A formen part de l'*adherència* d'A ($\overline{A}$): sigui $a \in A$ un punt interior, aleshores $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$ ja que, com a mínim, $B(a,r) \cap A = \{a\}$.

Exemple 1.3.8 (Conjunts i les seves adherències)**.**

- Sigui $A = B(a,r)$. Podem dir que $A \neq \overline{A}$.
- Sigui $A = \overline{B(a,r)}$. Aleshores, $A = \overline{A}$.
- Sigui $A = \mathbb{Q}$. $\overline{A} = \mathbb{R}$, ja que $x \in \overline{A} \iff \forall r > 0,\ I(x,r) \cap A \neq \emptyset$.
- Finalment, dir que A és tancat si $A = \overline{A}$ i que $A \subset \overline{A}$.

Definició 1.3.9 (Punt frontera)**.** Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$. Direm que un punt x és a la frontera d'A si és adherent a A i a $A^C = \mathbb{R}^n \setminus A$, el seu complementari en $\mathbb{R}^n$. Aquest conjunt de punts es coneix com a *frontera* d'A i es denota per ∂A o $\operatorname{Fr}(A)$.

$$\left.\begin{aligned} B(x,r) \cap A &\neq \emptyset \\ B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) &\neq \emptyset \end{aligned}\right\} \forall r > 0. \tag{1.3.4}$$

Propietat 1.3.10 (L'equivalència de les diferents definicions de frontera)**.** *Equivalentment a la definició de frontera amb què hem treballat, $\overline{A} := \mathring{A} \cup \partial A$ (o bé $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$).*

Demostració. Prenem $x \in \overline{A}$. Per definició, $x \in \overline{A} \iff B(x,r) \cap A \neq 0,\ \forall r > 0$. Procedim per distinció de casos en la intersecció amb el complementari:

1. Utilitzant 1.3.9, $B(x,r) \cap A^C \neq 0$ per a tot $r > 0$ implica que $x \in \partial A$.
2. Utilitzant altre cop 1.3.9, $\exists r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A^C = \emptyset \implies B(x,r) \subset A \implies x \in \mathring{A}$.

■

Observació 1.3.11. Com ja hem dit, els punts interiors a un conjunt pertanyen al conjunt, és a dir, sempre se satisfà $\mathring{A} \subset A$. També és cert que tot punt d'un conjunt n'és adherent, és a dir, $A \subset \overline{A}$. Tot i això, hem d'anar amb compte. La intuïció ens diu que tot punt frontera o adherent hauria de pertànyer a A, però *podrien existir punts adherents i punts frontera que no pertanyessin a A, sinó a $\mathbb{R}^n \setminus A$.*

Exemple 1.3.12. Posem $\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana, i prenem $A = (0,1)$. Notem que A és un obert de la topologia en $\mathbb{R}$, de manera que $A = \mathring{A}$. L'adherència d'aquest conjunt és, clarament, $\overline{A} = [0,1]$, de manera que els punts frontera són $\partial A = \{0,1\} \not\subset A$.

Exemple 1.3.13. Si prenem $n \geq 1$ i $A = B_0(x_0, r_0)$, llavors $\mathring{A} = A$, $\overline{A} = \overline{B(x_0, r_0)}$ i $\partial A = S(x_0, r_0)$. Per contra, si escollim $B = \overline{B(x_0, r_0)}$, aleshores $\mathring{B} = B(x_0, r_0)$, $\overline{B} = B$ i $\delta B = S(x_0, r_0)$. A és obert i no és tancat, mentre que B és tancat i no és obert. A *Topologia* veurem que poden existir conjunts oberts i tancats alhora (*clopen*) i d'altres ni oberts ni tancats.

Propietat 1.3.14. *Si A és obert, aleshores $\mathbb{R}^n \setminus A = A^C$ és tancat. En particular, A és obert si, i només si, el seu complementari és tancat.*

Demostració. Solament demostrarem la implicació cap a la dreta. Fixem-nos que volem veure que $A^C = \overline{A^C}$, és a dir, que $\overline{A^C} \subset A^C$ (l'altra inclusió és trivial). Sigui $x \in \overline{A^C}$; aleshores, $B(x,r) \cap A^C \neq \emptyset$ per a tot $r > 0$. Suposem que $x \notin A^C$, de manera que $x \in A$ i, en concret, $x \in \mathring{A}$ en ser A obert (existeix una bola centrada en x continguda en A, és a dir, $x \notin \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$): arribem a contradicció, ja que $x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$. Per tant, $x \in A^C$ i ja hem demostrat la inclusió. ■

Propietat 1.3.15. *Siguin $A_1, \ldots, A_n$ conjunts oberts, la seva unió és oberta. De fet, la unió infinita d'oberts és oberta i:*

$$A_n \text{ conjunts oberts} \implies \bigcap_{i=1}^{n} A_n \text{ obert.} \tag{1.3.5}$$

En aquest sentit, la intersecció infinita d'oberts pot no ser oberta.

Demostració. Sigui $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una família numerable de conjunts oberts. Volem veure que $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ és oberta. Per a fer-ho, veurem que tot punt d'A és interior. En efecte, si $a \in A$, aleshores $a \in A_k$ per algun j, i com A_j és obert, aleshores existeix $r > 0$ tal que $a \subset B(a_r) \subset A_j \subset A$.
Siguin ara $A_1, \ldots, A_m$ conjunts oberts, i sigui $A = \bigcap_{i=1}^m A_i$. Sigui $a \in A$. Així, per a cada $j = 1 \div m$ existeix $r_j > 0$ tal que $B(a, r_j) \subset A_j$. Si ara anomenem $r = \min\{r_1, \ldots, r_m\}$ és evident que $r > 0$ i que $B(a,r) \subset A_j$ per a tot j, per la qual cosa $B(a,r) \subset A$ i, per tant, a és interior a A. A resulta, doncs, ser obert. ■

Observació 1.3.16. Si estiguéssim parlant d'un conjunt infinit ($m = \infty$), el mínim $r = \min\{r_1, \ldots, r_m\}$ podria no existir, i l'ínfim podria ser 0. Això impedeix assegurar que la intersecció numerable d'oberts sigui, en efecte, oberta.

Exercici 1.3.17. *Construïu exemples de conjunts A de $\mathbb{R}^2$ tals que:*

1. *A no té punts interiors.*
2. *A no té punts frontera.*
3. *A no té punts exteriors.*
4. *A no té punts d'acumulació.*

5. *A no té punts aïllats.*

Demostració. Posem els resultats en format llista:

1. Les rectes (per exemple, $y = 0$) no tenen punts interiors en $\mathbb{R}^2$: no podem contenir una bola en ella, per molt petit que sigui $\varepsilon > 0$.
2. Els únics conjunts que no té punts frontera en $\mathbb{R}^2$ són $\mathbb{R}^2$ o bé el buit:
$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A} = \mathring{A} \cup \operatorname{Fr}(A) \implies \mathring{A} = \overline{A}. \tag{1.3.6}$$
3. En aquest cas, en tenim prou fent el complementari del primer apartat, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$.
4. Si un conjunt no té punts d'acumulació vol dir que està format únicament per punts aïllats. Seguint la definició de punt d'acumulació, $a \in A' \iff B(a,r) \cap (A \setminus \{a\})$ té infinits punts.
$$A = \{(n,0) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \implies A' = \emptyset. \tag{1.3.7}$$
5. Per trobar un conjunt que no tingui punts aïllats, seguim la definició de punt aïllat. $a \in A$ és un punt aïllat si $\exists r > 0 \mid A \cap B(a,r) = \{a\}$. Podem agafar una bola qualsevol en $\mathbb{R}^2$: per exemple, $A = B((0,0),1)$.

■

Exercici 1.3.18. *Representeu gràficament els conjunts A següents. Sense demostrar-ho dieu quins són els conjunt* $\mathring{A}, \overline{A}, A'$ *i* $\operatorname{Fr}(A)$*. Quins són oberts? Quins són tancats? Quins són acotats? Quins són compactes?*

Demostració. Farem solament la correcció de l'apartat (b), $A = [-1,2] \times (1,2) \subset \mathbb{R}^2$.

1. L'interior és $\mathring{A} = (-1,2) \times (1,2)$,
2. i l'adherència, $\overline{A} = [-1,2] \times [1,2]$.
3. Podem trobar el conjunt d'acumulació de la següent manera: $A' = \overline{A} \setminus \{\text{punts aïllats}\} = \overline{A}$.
4. Com que totes dues components x, y estan fitades per 2, A és acotat.

Trobar la frontera és més farragós i es deixa com a exercici. ■

1.4 Conjunt d'acumulació i conjunt aïllat

Definició 1.4.1 (Punt d'acumulació). Un punt x és un punt d'acumulació, és a dir, pertany al conjunt d'acumulació si $B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ (és adherent a $A \setminus \{x\}$).

Definició 1.4.2 (Conjunt d'acumulació). Anàlogament, sigui $A \subset \mathbb{R}^n$. Diem conjunt d'acumulació d'A, escrit A', format pels punts $x \in \mathbb{R}^n$ que són adherents a $A \setminus \{x\}$. En altres paraules, la bola centrada en x de radi r que té punts d'A que no són x.

Definició 1.4.3 (Punt aïllat). $a \in A$ és aïllat si existeix $r > 0$ tal que $B(a,r) \cap A = \{a\}$.

Exemple 1.4.4.

- Sigui $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. L'únic punt d'acumulació és el zero: $A' = \{0\}$.
- Sigui $A = \mathbb{R} \times ((0, +\infty) \setminus \mathbb{N}) \subset \mathbb{R}^2$. L'interior és clarament $\mathring{A} = A$; l'adherència, $\overline{A} = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$; la frontera, $\partial A = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \{(x, y) \mid y = n\}$.

Propietat 1.4.5.

1. *$\overline{A} = A' \cup \{$punts aïllats d'$A\}$.*
2. *$x \in A' \iff B(x, t) \cap (A \setminus \{x\})$ té infinits punts, $\forall r > 0$.*

Demostració.

1. $x \in \overline{A}$. Per la definició de punt adherents, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, per a tot $r > 0$. Per una banda, si $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \implies x \in A'$ per a tot $r > 0$, aleshores x també pertany al conjunt d'acumulació. Podria passar, però, que existís un $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$; en aquest cas, $B(x, r) \cap A = \{x\}$ i x és un punt aïllat.
2. Sigui $x \in \overline{A}$. Per a tot $r > 0$, $B(x, r) \cap (A \setminus \{x\})$. Posem $A = \{x, y, z\}$: podem trobar $r' > 0$ tal que $B(x, r') \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$, ja que els punts estan prou dispersos tals que no es trobin dins la bola per r' prou petit. Això contradiu la definició de punt d'acumulació.

■

Exemple 1.4.6. Sigui $\overline{A} = \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}^2$. Tenim que l'interior és buit, l'adherència és $\mathbb{R}^2$, la frontera $\delta A = \mathbb{R}^2$, el conjunt d'acumulació és $A' = \mathbb{R}^2$ i no hi ha punts aïllats.

1.5 Successions, conjunts compacte i acotat

Definició 1.5.1 (Successió a $\mathbb{R}^n$). Una successió a $\mathbb{R}^n$ és $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $k \longmapsto s(k) : x^k$, on x^k correspon al k-èsim valor de la successió, de cadascuna de les coordenades de l'n-vector. Denotem la successió per $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Això equival a n successions a $\mathbb{R}$ $(x_j^k)_{k, j \in \mathbb{N}}$, amb $j = 1 \div n$.

Observació 1.5.2. En la meva opinió, la notació anterior és una mica desafortunada: quan posem x^k es pot confondre fàcilment el k-èsim valor d'una successió $(x^k)_k$ amb un nombre elevat a la k-èsima potència. Sigui com sigui, l'obeirem ja que és la que s'usa a classe.

Definició 1.5.3 (Successió convergent a $\mathbb{R}^n$). Una successió $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ es diu que és convergent amb límit $a \in \mathbb{R}^n$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq k_0 \; \|x^k - a\| < \varepsilon$ (si la distància entre el k-èsim punt de la successió i el límit és menor que un cert valor ε).

Teorema 1.5.4. *Sigui $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ una successió, i sigui $a \in \mathbb{R}^n$ un punt. Aleshores, $(x^k)_k$ és convergent si, i només si, ho són totes les seves successions coordenades $(x_j^k)_k$, $j = 1 \div n$.*

$$\lim_{k \to \infty} x^k = a \iff \lim_{k \to \infty} x_j^k = a_j, \; \forall j. \tag{1.5.1}$$

Demostració. Si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, això equival a fer el límit coordenada a coordenada. És a dir, podem dividir (x^k) en n subsuccessions, una per a cada coordenada del vector a:

$$|x_j^k - a_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^k - a_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x^k - a\| < \varepsilon \implies \lim_{k\to\infty} x_j^k = a_j. \tag{1.5.2}$$

Ja hem vist que $\lim_k x_j^k = a_j$ per a tot $j = 1 \div n$. Recíprocament, si cadascuna de les successions components (x_i^k) convergeix respectivament a a_i, aleshores cadascuna de les diferències $|x_i^k - a_i|$ es pot fer tan petita com vulguem si agafem k prou gran. En particular, i donat $\varepsilon > 0$, podem escollir k_i tal que si $k \geq k_i$ aleshores $|x_i^k - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Si ara establim $k_0 = \max\{k_i\}_i$, aleshores:

$$\|x^k - a\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^k - a_j^k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{(\sqrt{n})^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon, \tag{1.5.3}$$

com volíem veure. ■

Teorema 1.5.5. *Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$.*

1. $x \in \overline{A} \iff \exists (x^k)_k \subset A$ *tal que* $\lim_k x^k = x$.
2. $x \in \delta A \iff \exists (x^k)_k \subset A, (y^k)_k \subset (\mathbb{R} \setminus A)$ *tals que* $\lim_k x^k = \lim_k y^k = x$.
3. $x \in A' \iff \exists (x^k)_k \subset A, x^k \neq x \forall k$ *tal que* $\lim_k x^k = a$.

Demostració.

1. Primer apartat:

   $\boxed{\Rightarrow}$ Sabem que $x \in \overline{A}$. Per tant, $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$ per a tot $r > 0$, en particular, per a $r = \frac{1}{k}$. Per a cada $k \in \mathbb{N}$ existeix $x_k \in A \cap B(x, \frac{1}{k})$ (la intersecció és no buida).

   $$\begin{cases} x^k \in A, \ (x^k) \subset A \\ \|x^k - x\| < \frac{1}{k} \end{cases} \tag{1.5.4}$$

   on el mòdul ens dona la distància entre x^k i el centre, el qual ha de ser menor que el radi de la bola, $\frac{1}{k}$. Aquesta és, justament, la definició de convergència i $\lim_k x^k = x$.

   Observació 1.5.6. $\lim_{k\to\infty} x^k = x \iff \lim_k \|x^k - x\| = 0$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Sigui $x = \lim_k x^k$ on $(x^k) \subset A$. Fixem $r > 0$. Hem de veure que $A \cap B(x, r) \neq \emptyset$:

   $$\exists k_0 \in \mathbb{N} \mid \|x^k - x\| < r, \ \forall k \geq k_0. \tag{1.5.5}$$

   Així doncs, $x^k \in B(x, r) \cap A$.
2. Segon apartat: es fa de manera anàloga, intercanviant A per $\mathbb{R}^n \setminus A$.
3. Tercer apartat: es fa de manera anàloga, intercanviant A per $A \setminus \{a\}$.

■

Corol·lari 1.5.7. *Un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ és tancat si, i només si, inclou els límits de totes les seves successions convergents.*

Demostració. En efecte A és tancat si, i només si, conté tots els seus punts adherents. Però acabem de veure que els punts adherents són exactament aquells que s'obtenen com a límit d'una successió de punts d'A. ■

Corol·lari 1.5.8. *Els punts d'acumulació d'un conjunt són els límits de les seves successions no constants.*

Definició 1.5.9 (Conjunt acotat)**.** Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$. Informalment, un conjunt acotat és aquell que està contingut en alguna bola. Formalment, si $\exists r > 0$ tal que $A \subset B(0, r)$.

Definició 1.5.10 (Conjunt compacte)**.** A és compacte per successions si tota successió dins del conjunt $(x^k) \subset A$ té una parcial convergent amb límit a A.

$$(x^{k_j})_{j \in \mathbb{N}} \longrightarrow x \in A. \tag{1.5.6}$$

Teorema 1.5.11 (Compacte per successions)**.** *Un conjunt K és compacte per successions si, i només si, K és tancat i acotat.*

Demostració.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sigui $(x^k) \subset K$. Hem de veure que existeix una successió parcial $(x^{k_m})_m$ tal que $(x^{k_m})_m \longrightarrow x \in K$. Per la definició d'acotat, existeixen $a_1, \dots, a_n$ i $b_1, \dots, b_n$ tals que K es troba dins d'un producte cartesià d'intervals (un *quadrat*), $K \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

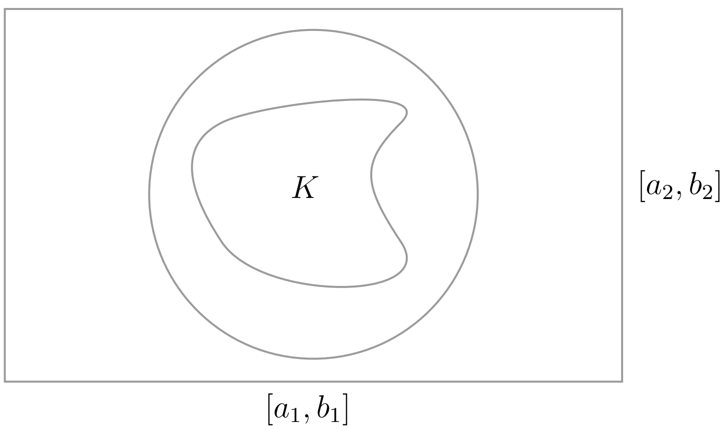


Figura 1.2: Producte cartesià d'intervals

Ara, $(x^k) \subset K \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Posem $(x_1^k)_k \subset [a_1, b_1]$ a la 1-èsima subsuccessió. Com que l'interval és tancat, podem aplicar el teorema de Bolzano-Weierstrass: existeix una parcial $(x_1^{k_{j_1}})$ convergent $\lim_{j_1 \to \infty} x_1^{k_{j_1}} = x_1$.
Existeix $(x_2^{k_{j_2}})_{j_2} \subset [a_2, b_2]$ convergent tal que $\lim_{j_2 \to \infty} x_2^{k_{j_2}} = x_2$. Al seu torn, notem que $\lim_{j_2 \to \infty} x_1^{k_{j_2}} = x_1$. Iterant per k_{j_n}:

$$\lim_{j_n \to \infty} x_n^{k_{j_n}} = x_n, \tag{1.5.7}$$

i obtenim $x = (x_1, \dots, x_n)$ el punt que denota el conjunt de coordenades límit i es troba dins del conjunt K $(x \in K)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suposem ara que K és compacte per successions. Per veure que és tancat, sigui $(x^k)_k \subset K$ una successió convergent. Hem de veure que el seu límit pertany a K. En efecte, com que K és compacte per successions, $(x^k)_k$ també convergeix a a, i $a \in K$ com volíem veure. Per veure que K és fitat, suposem que no ho és. Això vol dir que K s'escapa de tota bola. En particular, existeix $x^1 \in K$ tal que $x^1 \notin B(0,1)$, és a dir, $d(x^1, 0) \geq 1$. Igualment, existeix $x^2 \in K$ tal que $d(x^2, 0) \geq 1 + d(x^1, 0)$. Recursivament, existeix x^k tal que $d(x^k, 0) \geq d(x^{k-1}, 0) + 1$. Així doncs:

$$d(x^{k+j}, x^k) \geq d(x^{k+j}, 0) - d(x^k, 0) = \sum_{i=1}^{j} (d(x^{k+i}, 0) - d(x^{k+i-1}, 0)) \geq j, \tag{1.5.8}$$

per la qual cosa aquesta successió no pot tenir cap parcial convergent.

■

Exercici 1.5.12. *Sigui A un conjunt en $\mathbb{R}^3$: $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-1)^3 + z^2 \leq 5,\ y < 1\}$.*

1. *El punt $(1,1,2)$ forma part de la frontera?*
2. *El punt $(2,0,1)$ és punt d'acumulació?*
3. *És A tancat, acotat i compacte?*

Demostració.

1. Substituïm el vector en les equacions del conjunt i veiem que compleix ambdues. En particular, en la primera desigualtat no estricta trobem una igualtat. Així, aquest punt ha de formar part de la frontera. Utilitzarem 1.5.5, de manera que $(1,1,2) \in \partial A \iff \exists (x_k), (y_k)$ tals que els seus límits a l'infinit coincideixen en el punt $(1,1,2)$. En efecte:

$$\left.\begin{array}{l} (x^k)_{k\in\mathbb{N}} = (1, 1-\frac{1}{k}, 2)_{k\in\mathbb{N}} \subset A \\ (x^k)_{k\in\mathbb{N}} = (1, 1+\frac{1}{k}, 2)_{k\in\mathbb{N}} \subset A \end{array}\right\} \xrightarrow{k\to\infty} (1,1,2) \in A. \tag{1.5.9}$$

2. Hem d'usar que $x \in A' \iff \exists (x^k)_k \subset A, x^k \neq x \forall k$ tal que $\lim_k x^k = a$. En aquest cas, podem utilitzar un anàleg de la successió de l'apartat anterior: $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} = (2, 0, 1-\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ i el seu límit quan $k \to \infty$ és, justament, $(2,0,1)$.
3. La frontera és no buida i conté elements de l'adherència que no formen part del conjunt. De fet, $(1,1,2) \in \partial A$ però $(1,1,2) \notin A$. Així, A no pot ser tancat. A no és acotat ja que podem construir una successió no convergent; per exemple, $(2, -k, 1)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$, $\forall k$. Com que A no és ni tancat ni acotat, no pot ser compacte.
Deixo per aquí el següent raonament no revisat, fet directament a classe. Exercici per al lector comprovar errades en ell: Per mirar si està acotada, ens fixem que $(y-1)^3 < 0$ per a tot $y < 1$, de manera que no està fitada inferiorment. Per tant, A tampoc serà compacte. Com que $\partial A \neq \emptyset$ i $\mathring{A} \neq \emptyset$, A no és tancat.

■

Exercici 1.5.13. *Donat $A \subset \mathbb{R}^n$, són certes o falses les següents afirmacions?*

- *L'interior d'A coincideix amb l'interior d'$\overline{A}$.*

- $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{Fr}(A)$.
- *A i A' tenen els mateixos punts d'acumulació.*

Demostració. Demostrarem que totes elles són falses. Donarem un contraexemple per a cadascuna:

1. La primera és falsa. Podem agafar, per exemple, $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Tenim: $\mathring{A} = \emptyset$ i $\overline{A} = [0,1]$, de manera que l'interior de l'adherència és $(0,1)$.
2. La segona també ho és. El mateix exemple funciona: $\partial(\partial A) = \{0,1\}$ i $\partial A = [0,1]$.
3. Pel que fa a l'última, la formulació de la pregunta és una mica desafortunada: ens estan preguntant si $A' = (A')'$. Considerem $A = \{(\frac{1}{k}, 0) \in \mathbb{R}^2 \bigm| k \geq 1\}$. Sabem que $A' = \{(0,0)\}$, però $(A')'$ és buit ja que $\{(0,0)\}$ és un punt aïllat ell mateix.

■

Exercici 1.5.14.

1. *Sigui $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| y < 2x - x^2\}$. Determineu si és obert, tancat, acotat o compacte.*
2. *Sigui $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 3 \leq 0\}$. Determineu si és obert, tancat, acotat o compacte.*
3. *Sigui $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2 + 7y^2 - 14y^2 \leq 2\}$. Determineu si és obert, tancat, acotat o compacte.*

Demostració. Volem demostrar que A és un obert, és a dir, que A coincideix amb el seu interior. Tenim dos mètodes per demostrar-ho:

- $\forall p \in A$ és interior.
- Pel fet que $f(x,y) = y - 2x + x^2$ és contínua.

Ho provem per la segona:

$$A = f^{-1}((-\infty, 0)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| f(x,y) \in (-\infty, 0)\}. \tag{1.5.10}$$

Com que $(-\infty, 0)$ és un obert i f és contínua, l'antiimatge per f del conjunt ha de ser un obert també (és un resultat de *Topologia*, es pot consultar aquí). Per tant, A és obert, coincideix amb el seu interior.

Pel que fa al segon conjunt, el podem reescriure de la següent manera i ja és immediat:

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2 + y^2 + (z+1)^2 \leq 4\} = \overline{B((0,0,-1),2)}. \tag{1.5.11}$$

Ara, clarament $\overline{B} = B$ i B és tancat. L'interior és $\mathring{B} = B((0,0,-1),2)$ i ∂A és l'esfera $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$. El conjunt d'acumulació A' és $\overline{A}$, ja que no hi ha punts aïllats.

En el tercer apartat, reescrivim el conjunt un altre cop: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2 + 7(y-1)^2 \leq 9\}$ el·lipse tancada. Aleshores, $f(x,y) = x^2 + 7y^2 - 14y - 2$ és contínua. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| f(x,y) \leq 0\} = f^{-1}((-\infty, 0]) \implies C$ és tancat i, per tant, $C = \overline{C}$. Ara:

$$\begin{aligned} C' &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2 + 7(y-1)^2 < 9\} \\ \partial A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2 + 7(y-1)^2 = 9\} \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

Volem demostrar $\mathring{C} = C'$:

$\boxed{C' \subset \mathring{C}}$ Podem definir $C' = f^{-1}((-\infty, 0))$, que és un obert ja que el conjunt antiimatge d'un obert per una funció contínua és un obert. Com C' és un obert i $C' \subset C$ per definició, aleshores $C' \subset \mathring{C}$.

$\boxed{\mathring{C} \subset C'}$ Sigui $p \in \mathring{C}$. Volem provar que $p \in C'$. Ho provem pel contrarrecíproc: si $p = (x, y) \notin C'$, $x^2 + 7(y-1)^2 \geq 9$:

1. $p = (x, y)$ és tal que $x^2 + 7(y-1)^2 > 9 \implies p \notin C \implies p \notin \mathring{C}$.
2. Sigui $p = (x, y)$ «a l'extrem superior» és tal que $x^2 + 7(y-1)^2 = 9$. En aquest cas, triem una successió $p_k = (x, y + \frac{1}{k}) \notin C$ i tendeix a p quan $k \to \infty$. En conseqüència, $p \notin A \implies p \notin \mathring{A}$.

■

1.6 Connexos i arc-connexos

Definició 1.6.1 (Connex)**.** Es diu que un conjunt $A \subset \mathbb{R}^n$ és connex si no es pot descompondre com $A = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, amb $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ oberts relatius a A, disjunts i no buits.

Exemple 1.6.2. El conjunt $\mathbb{Q}$ no és connex a $\mathbb{R}$, donat que podem trencar $\mathbb{Q} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ com $\mathcal{U} = (-\infty, \pi) \cap \mathbb{Q}$ i $\mathcal{V} = (\pi, +\infty) \cap \mathbb{Q}$. Efectivament, $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ són oberts relatius a $\mathbb{Q}$ i clarament són disjunts.

Definició 1.6.3 (Arc-connex)**.** Un conjunt $D \subset \mathbb{R}^n$ és arc-connex si donats $a, b \in D$, existeix una corba $\gamma \subset D$ tal que $\gamma(0) = a$ i $\gamma(1) = b$.

Donat que a classe no s'han ni enunciat els següents resultats, en demostrarem un, segurament el més significatiu de tots. La resta es poden consultar als apunts de l'assignatura, [Pra22].

Teorema 1.6.4. *Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$. Són equivalents:*

1. *A és connex.*
2. *Els únics subconjunts d'A que són alhora oberts i tancats (relatius a A), són el buit i el total.*

Proposició 1.6.5. *Si $C \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt connex, i $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua, aleshores $f(C)$ també és connex. Siguin A, B conjunts connexos, tals que $A \cap B \neq \emptyset$. Aleshores, $A \cup B$ és connex.*

Proposició 1.6.6. *Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A és arc-connex, A és connex.*

Demostració. Posem $A = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, amb $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ oberts relatius a A no trivials, disjunts. Com que $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ són no buits, existeixen punts $a \in \mathcal{U}$ i $b \in \mathcal{V}$. Sigui $\gamma : [0, 1] \longrightarrow A$ contínua, tal que $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$. Aquesta corba γ existeix, donat que A és arc-connex. Aleshores

$$\gamma([0,1]) = (\gamma([0,1]) \cap \mathcal{U}) \cup (\gamma([0,1]) \cap \mathcal{V}). \tag{1.6.1}$$

i en aquesta descomposició $\gamma([0,1]) \cap \mathcal{U}$ i $\gamma([0,1]) \cap \mathcal{V}$ són oberts relatius a $\gamma([0,1])$, disjunts, i no trivials (tots dos són no buits). En conseqüència, $\gamma([0,1])$ no pot ser connex. Però això no pot ser donat que $\gamma([0,1])$ és la imatge per l'aplicació contínua γ del conjunt connex $[0,1]$. ■

Teorema 1.6.7. *Tot obert connex és arc-connex.*

Corol·lari 1.6.8. *Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ un obert. Aleshores, A és connex si, i només si, és arc-connex.*

II

Límits i continuïtat

2.1

Conceptes bàsics

Definició 2.1.1 (Corbes de nivell)**.** Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui $c \in \mathbb{R}$. Aleshores, $E_c = \{x \in D \mid f(x) = c\}$ és el conjunt de nivell c.

Definició 2.1.2 (Límit)**.** Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ i, en concret, sigui a un punt d'acumulació de D ($a \in D'$). Diem que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ (existeix el límit) si, i només si:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid 0 < \|x - a\| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{2.1.1}$$

En altres paraules, $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$ (la bola punxada $B^*(a, \delta)$) i, equivalentment, la imatge per la intersecció entre la bola i el domini està continguda en un entorn (o bola) d'ℓ:

$$f(B^*(a, \delta) \cap D) \subset B(\ell, \varepsilon). \tag{2.1.2}$$

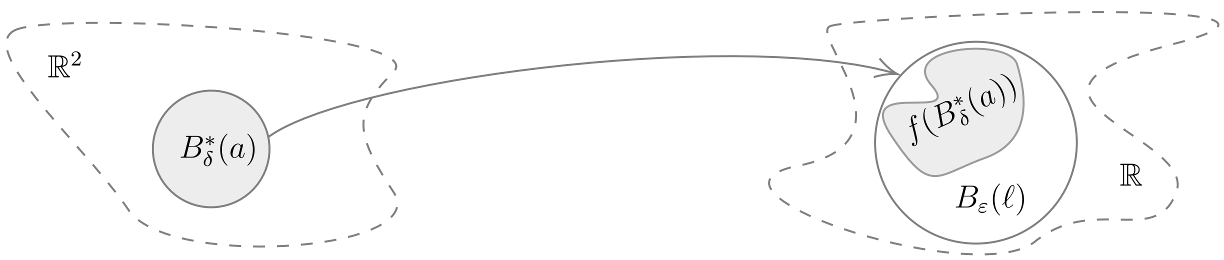


Figura 2.1: Representació del concepte $f(B^*(a, \delta) \cap D) \subset B(\ell, \varepsilon)$.

Observació 2.1.3. El concepte de límit requereix que a sigui un punt d'acumulació de D perquè això assegura que el conjunt $B^*(a, \delta)$ conté infinit elements de D, sigui qui sigui $\delta > 0$. Altrament, la intersecció $B^*(a, \delta) \cap D$ podria ser finita o, fins i tot, buida. En aquest sentit, acceptem el conveni que tota funció és contínua als punts aïllats del seu domini. De la mateixa manera, el concepte de límit no demana que $a \in D$, és a dir, es pot calcular límits a punts que no són del domini.

Exemple 2.1.4. Sigui $f(x, y) = x^2 + y^2$. El conjunt de nivell c és $E_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c\}$ definit de la següent manera:

$$\left.\begin{array}{cl} \emptyset, & \text{si } c < 0 \\ \{(0,0)\}, & \text{si } c = 0 \\ B_{\sqrt{c}}((0,0)), & \text{si } c > 0 \end{array}\right\} \tag{2.1.3}$$

Propietat 2.1.5. *Siguin $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui $a \in D'$ tals que existeixen $\ell_f = \lim_{x\to a} f(x)$ i $\ell_g = \lim_{x\to a} g(x)$. Aleshores:*

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \ell_f + \ell_g$,
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \ell_f \cdot \ell_g$,
3. *Si* $\ell_g \neq 0$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_f}{\ell_g}$.

Demostració. La propietat de la suma és conseqüència de la desigualtat triangular. De fet, si anomenem $\alpha = \lim f$ i $\beta = \lim g$, per a tot $\varepsilon > 0$. Donat que hem suposat l'existència dels dos límits per separat, podem trobar $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $0 < d(x,a) < \delta_1$, i podem trobar també $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $0 < d(x,a) < \delta_2$. Prenent ara $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ obtenim que si $0 < d(x,a) < \delta$ aleshores:

$$|(f+g)(x) - (\alpha+\beta)| = |f(x) - \alpha + g(x) - \beta| \leq |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (2.1.4)$$

Per al producte, notem primer que g està fitada a un entorn punxat d'a, és a dir, existeix $\delta_1 > 0$ i $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ per a tot $x \in B^*(a, \delta_1)$. D'altra banda, donada l'existència del límit tenim $\varepsilon > 0$ i podem trobar $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < d(x,a) < \delta_2$ aleshores $|f(x) - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Igualment, existeix $\delta_3 > 0$ tal que si $0 < d(x,a) < \delta_3$ aleshores $|g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|+1}$. Si ara fixem $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, aleshores per a tot $x \in B^*(a,\delta)$ es té:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \alpha\beta| &= |(f(x) - \alpha)g(x) + \alpha(g(x) - \beta)| \\ \leq |f(x) - \alpha| \cdot |g(x)| + |\alpha| \cdot |g(x) - \alpha| &\leq \frac{\varepsilon}{2M} M + |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\alpha|+1} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

La prova del tercer apartat és semblant a la del segon. ■

Propietat 2.1.6. *Altra vegada, siguin $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui $a \in D'$ tals que existeixen $\ell_f = \lim_{x\to a} f(x)$ i $\ell_g = \lim_{x\to a} g(x)$. Aleshores:*

1. *Si existeix $\lim_{x\to a} f(x)$, aleshores f és acotada a un entorn d'a.*
2. *El límit, en cas que existeixi, és únic.*

Propietat 2.1.7. *Per últim cop, sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui $a \in D'$ tals que existeix $\ell_f = \lim_{x\to a} f(x)$. Aleshores:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 1$.
2. *Per a tot $(x^k) \subset D$ tal que $\lim_{k\to\infty} x^k = a$ es té $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = \ell$.*

Demostració.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Sigui $(x^k) \subset D$ amb $\lim_{k\to\infty} x^k = 0$. Volem veure que $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq k_0$, $|f(x^k) - \ell| < \varepsilon$. Triem $\delta > 0$ tal que $0 < \|x - a\| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$. Al seu torn, triem k_0 tal que $\|x^k - a\| < \frac{\delta}{2}$ si $k \geq k_0$. D'aquesta manera, $|f(x^k) - \ell| < \varepsilon$.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Raonem per reducció a l'absurd: suposem que $\lim_{x\to a} f(x) \neq \ell$, és a dir,

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall \delta > 0 \exists x \mid |f(x) - \ell| > \varepsilon, \quad 0 < \|x - a\| < \delta. \quad (2.1.6)$$

Triem δ_k proper a 0: $\delta_k = \frac{1}{k}$. Aleshores existeix x^k tal que compleix $0 < \|x^k - a\| < \frac{1}{k}$ (és a dir, que $\lim_{k\to\infty} x^k = a$), però $|f(x^k) - \ell| \geq \varepsilon$ (és a dir, que $\lim_{k\to\infty} f(x^k) \neq \ell$).

■

Exemple 2.1.8. Sigui $f(x,y) = x$, és a dir, la projecció per la primera coordenada. Volem demostrar que $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 1$ (intuïtivament ja podem deduir-ho). Apliquem la definició:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \mid 0 < \|(x,y) - (1,2)\| < \delta \implies |f(x,y) - \ell| = |x-1| < \varepsilon. \tag{2.1.7}$$

Com que $|x-1| < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \|(x,y)-(1,2)\| < \delta$, aleshores $|f(x,y)-\ell| = |x-1| \leq \|(x,y) - (1,2)\|$. Si triem $\delta = \varepsilon$, ja hem provat que $|x-1| < \varepsilon$.

Exemple 2.1.9. Sigui ara $f(x,y) = xy$. Volem demostrar que $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 2$. Aplicant un altre cop la definició:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \mid 0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \implies |xy-2| < \varepsilon. \tag{2.1.8}$$

Podem acotar $|xy-2|$, usant que $x = (x-1)+1$ i $y = (y-2)+2$ implica que $xy = 2 + (y-2) + 2(x-1) + (x-1)(y-2)$:

$$|xy-2| = |(y-2) + 2(x-1) + (x-1)(y-2)| \leq \delta + 2\delta + 4\delta^2 \leq 4\delta, \quad \delta < 1. \tag{2.1.9}$$

D'aquesta manera, podem triar δ tal que $4\delta < \varepsilon$.

Exemple 2.1.10. En últim lloc, sigui $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, prenent el domini $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$. Demostrarem que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ no existeix. Agafem el conjunt de corbes de nivell $E_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mid \frac{xy}{x^2+y^2} = c\}$. Ara:

$$f(x,mx) = \frac{x \cdot mx}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}. \tag{2.1.10}$$

El límit de f restringida a la recta $y = mx$ existeix i el valor és diferent per a cada pendent m, i el punt coincident està exclòs de D.

Exercici 2.1.11. *Donada una funció $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, es diu conjunt de nivell al conjunt de punts on f pren un mateix valor: si $c \in \mathbb{R}$, es té $E_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$. Estudieu els conjunts de nivell de les funcions:*

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$,
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,
3. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Demostració. Per al primer apartat, hem d'estudiar aquest conjunt en funció dels valors de $c \in \mathbb{R}$.

1. Si $c < 0$, $E_c = \emptyset$. És clar que en el cos $\mathbb{R}$ no existeixen x, y tals que $x^2 + y^2 < 0$.
2. Si $c = 0$, cal necessàriament que $x = y = 0$. Per tant, el conjunt de nivell està format per un sol punt $E_c = \{(0,0)\}$.
3. Si $c > 0$, $E_c = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = (\sqrt{c})^2\}$. Notem el cas especial $c = 1$, on E_c correspondria exactament a $\mathbb{S}^1$.

Per a $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, adonem-nos que el $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ no pertany al domini. *Petita observació: E_0 segueix estant definida per als valors (x,y) tals que $x = y$.*

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = c \iff \frac{1-c}{1+c}x^2 = y^2 > 0. \tag{2.1.11}$$

Perquè aquests punts caiguin dins el conjunt de nivell cal que $c \neq -1$ i, a més, que $\frac{1-c}{1+c} > 0 \iff c \in (-1,1)$. Per tant, E_c està solament definida per $c \in (-1,1)$ i

$$E_c = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \;\middle|\; y = \pm\sqrt{\frac{1+c}{1-c}} \cdot (\pm x) \right\}. \tag{2.1.12}$$

Per a $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, estudiem en funció dels valors de c:

1. Si $c < 0$, $E_c = \emptyset$. És clar que en el cos $\mathbb{R}$ no existeixen x, y tals que $\sqrt{1-x^2-y^2} < 0$.
2. Si $c \geq 0$, cal necessàriament que $1 \geq x^2 + y^2$. Notem, doncs, que l'expressió és idèntica al primer apartat i ens quedem amb un subconjunt de les corbes de nivell: E_c està solament definida per a tot $c \in [0,1]$. En particular, per a $c = 0$ tenim que:

$$E_0 = \{(x,y) \mid \sqrt{1-x^2-y^2} = 0\} \text{ circumferència de centre } (0,0) \text{ i radi } 1. \tag{2.1.13}$$

Per a $c = 1$, $E_1 = \{(0,0)\}$. I, finalment, per a $c \in (0,1)$:

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = c \iff x^2 + y^2 = 1 - c^2 \text{ centre } (0,0) \text{ i radi } \sqrt{1-c^2}. \tag{2.1.14}$$

■

2.2

Càlcul de límits

El càlcul de límits es pot fer seguint una sèrie de resultats coneguts que ens permetran facilitar-nos la feina. *Fem límits restringits per veure quin valor és candidat a límit o, en cas que trobem dos camins que passin per a amb límits restringits diferents, concloure que no hi ha límit.* Amb aquests mètodes mai no sabrem si hi ha límit.

1. **Propietats algebraiques**: sigui $p_n(x)$ un polinomi en n variables i $x = (x_1, \dots, x_n)$ un n-vector, tal que $\lim_{x\to a} p_n(x) = p_n(a)$.

$$\lim_{x\to a} x_j^m = a_j^m, \tag{2.2.1}$$

a causa de la propietat multiplicativa dels límits que ja hem vist.

2. **Criteris negatius i límits restringits**: hem de dividir aquest conjunt en diversos casos o resolucions conegudes.
   - **Límits iterats**: hem de fer una *composició* de límits per a cada coordenada del vector, començant per la última i acabant per la primera:

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1,\dots,x_n) = \lim_{x_1\to a_1}\left(\lim_{x_2\to a_2}\left(\cdots\left(\lim_{x_n\to a_n}(f(x_1,\dots,x_n))\right)\cdots\right)\right) \tag{2.2.2}$$

   En aquest sentit, si els límit iterats són diferents, el límit no existeix pas.

- **Límits sobre rectes**: agafem les rectes que passen per a i tenen direcció $\vec{v}$ unitari: $x = a + \lambda\vec{v}$. Notem que $x = a + \lambda\vec{v}$ implica que $\|v\| = 1$ i $\|x - a\| = |\lambda|$. $\lim_{x\to 0} f(a + \lambda\vec{v})$. Anomenem $\lim_{x\to 0}(a + \lambda\vec{v})$ el límit de f restringit a la recta $x = a + \lambda\vec{v}$.

Exemple 2.2.1. Sigui $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Si apliquem els límits iterats ens dona que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = 0$. Però de la mateixa manera que si els límits iterats són diferents no existeix el límit global, si els límits iterats coincideixen no tenim garantida l'existència del límit global. En cas que existeixi, el que sí sabem és que serà precisament 0.

Definició 2.2.2 (Continuïtat). Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Sigui $a \in D'$. Diem que f és contínua al punt a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Formalment:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \mid \|x - a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{2.2.3}$$

També podem formular la continuïtat en termes de successions, especificant que el límit és $f(a)$:

$$\text{contínua per successions} \iff \forall(x^k)_k \subset D \text{ amb } \lim_{x\to a} x^k = a \text{ es té } \lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(a). \tag{2.2.4}$$

Exemple 2.2.3.

1. La primera projecció (la projecció per la primera coordenada) $f(x,y) = x$ és contínua al punt $(1,2)$, ja que el límit coincideix amb la imatge en el punt.
2. $f(x,y) = xy$ també és contínua en aquest punt.
3. Sigui $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, tal que $(x,y) \neq (0,0)$. *Podem definir $f(0,0)$ de manera que f sigui contínua al $(0,0)$?* Això equival a preguntar si el límit existeix i coincideix amb l'imatge pel punt.
   - Límits iterats:
   $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) &= 0 \\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$
   Com dèiem a 2.2.1, no podem assegurar l'existència: si existeix, el límit ha de valdre necessàriament 0.
   - Límit sobre rectes: prenem $y = mx$.
   $$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2mx}{x^2+mx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2}x = 0. \tag{2.2.6}$$
   Si existeix, el límit ha de valdre necessàriament 0. Per demostrar l'existència:
   $$\begin{aligned} \forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 \mid 0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta &\implies |f(x,y) - 0| < \varepsilon \\ 0 < x^2 + y^2 < \delta^2 &\implies \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Observació 2.2.4. L'ús de coordenades polars per al càlcul de límits té perills. Si bé la implicació següent és certa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \implies \lim_{r\to 0^+} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \ell,\ \forall\theta, \tag{2.2.8}$$

la implicació contrària

$$\lim_{r\to 0^+} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \ell,\ \forall\theta \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \tag{2.2.9}$$

no és certa en general. En efecte, per a cada θ podem denotar $g_\theta(r) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Si suposem que, per a cada θ, la funció g_θ té límit ℓ quan $r \to 0^+$, aleshores tots els límits direccionals de f a l'origen són ℓ. Però això vol dir que donat θ i donat $\varepsilon > 0$, existeix δ tal que si $0 < r < \delta$, llavors $|g_\theta(r) - \ell| < \varepsilon$. Però, naturalment, aquest δ, que depèn de ε, també pot dependre de la funció g_θ; és a dir, que hem d'escriure $\delta = \delta_\theta(\varepsilon)$. Per això, si volguéssim un δ_θ que servís per tots els valors de θ, hauríem de prendre l'ínfim $\inf_\theta\{\delta_\theta\}$. Però aquest ínfim podria perfectament ser 0.

2.3 Corbes

Definició 2.3.1 (Corba). Una corba a $\mathbb{R}^n$ és una aplicació $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, és a dir:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)), \tag{2.3.1}$$

on cada $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua i, a més, $\gamma(t) \in D$, per a cada $t \in [0,1]$. Simbòlicament, escriurem $\gamma \subset D$, per dir que $\gamma([0,1]) \subset D$. Els punts $a = \gamma(0)$ i $b = \gamma(1)$ s'anomenen, respectivament, origen i extrem de la corba. Una corba es diu que passa pel punt $p \in \mathbb{R}^n$ si per a un determinat temps t_0 es té $\gamma(t_0) = p$.

Proposició 2.3.2. *Si existeix el límit de $f(x,y)$ quan $(x,y) \to (a,b)$ i aquest val ℓ, també existeixen els límits de f sobre totes les corbes que passen pel punt (a,b) i aquests límits valen ℓ.*

Exemple 2.3.3. Per exemple, a $\mathbb{R}^2$ una corba té la forma $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. En aquest sentit, aquesta passa pel punt $(0,0)$ si, per a algun temps t_0 concret. es té $(x(t_0), y(t_0)) = (0,0)$. Les rectes que passen per un punt p donat, per exemple, pel punt $(0,0)$, són corbes de la forma $\gamma(t) = (t, mt)$, on m indica el pendent de la corba. Aquestes corbes passen pel punt $(0,0)$ a temps $t_0 = 0$; per tant, si existeix

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \implies \lim_{t\to 0} f(t, mt) = \ell, \tag{2.3.2}$$

sigui quin sigui m.

2.4 Continuïtat

Com ja hem dit abans, amb aquests mètodes podem concloure que no hi ha límit, però si volem veure criteris positius pels quals hi ha límit podem refiar-nos dels següents.

Teorema 2.4.1 (Criteri del Sandwich). *Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Suposem que per $x \in B(a,r)$ per algun r, tenim $|f(x) - \ell| \leq \varphi(\|x-a\|)$, amb $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$, on φ és una funció d'una variable. Aleshores, $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.*

Observació 2.4.2. Com $\varphi(t)$ convergeix al 0 quan $t \to 0^+$ i $|f(x) - \ell|$ està fitada per aquesta expressió, té uniformement el mateix comportament, és a dir, $f(x) - \ell$, quan $\|x-a\| \to 0^+$, ens diu que $|f(x) - \ell| \to 0$.

Exemple 2.4.3. Volem trobar $\lim_{(x,y)\to(0,9)} \frac{(2x^2+y^3)^2}{4x^2+y^4}$. El límit sobre rectes $y = mx$ ens dona 0:

$$f(x,mx) = \frac{(2x^2+m^3x^3)^2}{4x^2+m^4x^4} = \frac{x^4(2+m^3x)^2}{x^2(4+m^4x^2)} \xrightarrow{x\to 0} 0 \cdot \frac{2}{4} = 0. \tag{2.4.1}$$

Ja sabem que, en cas que el límit existeixi, aquest ha de valdre 0. Anem a veure si, en efecte, existeix. *Canviem l'expressió per simplificar els càlculs:* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x^2+y^3)^2}{4x^2+y^4}$.

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \mid 0 < \|(x.y) - (0,0)\| < \delta \implies |f(x,y) - 0| < \varepsilon. \\ |f(x,y) - 0| = \left|\frac{(2x^2 \cdot y^3)^2}{4x^2+y^4}\right| = \frac{(2x^2|y|^3)^2}{4x^2+y^4} = \frac{4x^4y^6}{4x^2+y^2} \leq x^2y^6 \\ \leq (x^2+y^2)(x^2+y^2)^3 = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}),\ \varphi(t) = t^8 \\ |x| \leq \sqrt{x^2+y^2},\ |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Proposició 2.4.4. *Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt, i $a \in \mathbb{R}^n$ un punt d'acumulació de D. Si $f : D \to \mathbb{R}^m$ és contínua a a, i $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ és contínua a $f(a)$, aleshores la composició $g \circ f$ és contínua a a.*

Demostració. Sigui $\left(x^k\right)_k$ una successió d'elements de D tal que $\left(x^k\right) \to a$. Si f és contínua a a, llavors $\left(f\left(x^k\right)\right)_k \to f(a)$. Però per hipòtesi g és contínua a $f(a)$, i per tant $\left(g\left(f\left(x^k\right)\right)\right)_k \to g(f(a))$. En conseqüència, $\left((g\circ f)\left(x^k\right)\right)_k \to (g\circ f)(a)$ i per tant $g \circ f$ és contínua al punt a. ■

Teorema 2.4.5 (Composició amb una funció contínua d'una variable). *Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Sigui $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua, on $I = (\ell - r, \ell + r)$, interval al voltant de ℓ.*

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}. \tag{2.4.3}$$

Aleshores, $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\ell)$.

Demostració. És conseqüència de l'anterior proposició, 2.4.4. ■

Exemple 2.4.6. Volem resoldre $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{xyz}$. Els límits iterats són:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin(xyz)}{xyz}\right)\right) = 1, \tag{2.4.4}$$

ja que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$. Ara, triem les funcions f, g següents:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xyz \implies \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} xyz = 0. \\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Per tant:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{xyz} = g(\ell) = g(0) = 1. \tag{2.4.6}$$

Observació 2.4.7. Aplicacions $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tals que

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_n) &= (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)) \\ \lim_{x\to a} f(x) = \ell = (\ell_1,\dots,\ell_m)\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 &\ \Big|\ 0 < \|x-a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \\ \implies \|f(x)\ell\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon &\iff \lim_{x\to a} f_j(x) = \ell_j. \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

En particular, f és contínua al punt a si, i només si, $f_j(x)$ és contínua per a tot j.

Definició 2.4.8 (Continuïtat al domini). Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Diem que f és contínua a D si és contínua a tots els punts $a \in D$.

2.5 Funcions contínues i oberts

Teorema 2.5.1. *Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Són equivalents:*

1. $f \in \mathcal{C}(D)$.
2. *L'antiimatge d'un obert és un obert. $\forall\mathcal{U}$ obert de $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(\mathcal{U}) = D \cap V$, on $V \subset \mathbb{R}^n$ és un obert.*
3. *Per a tot tancat $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m$ existeix un tancat $G \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(\mathcal{T}) = G \cap D$.*

Demostració.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Sigui $\mathcal{U}$ obert de $\mathbb{R}^m$. Si $\mathcal{U} \cap f(D) = \emptyset$, aleshores $f^{-1}(\mathcal{U}) = \emptyset$ i l'enunciat és trivial. En canvi, si $\mathcal{U} \cap f(D) \neq \emptyset$ tenim punts $a \in D$ amb $f(a) \in \mathcal{U} \cap f(D)$. Per la definició d'obert, existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a),\varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Utilitzant també la definició de f contínua a a:

$$\begin{aligned} \exists\delta_a > 0 \ \Big|\ x \in B(a,\delta_a) \cap D \implies f(x) \in B(f(a),\varepsilon) \subset \mathcal{U} \\ \iff f(B(a,\delta_a) \cap D) \subset \mathcal{U} \iff B(a,\delta_a) \cap D \subset f^{-1}(\mathcal{U}). \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Sigui $a \in D$ un punt qualsevol. Aleshores, $\mathcal{U} = B(f(a), \varepsilon)$ és un obert, sigui qui sigui $\varepsilon > 0$. Per tant, per hipòtesi, existirà un obert $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(\mathcal{U}) = V \cap D$. Per descomptat, i com $f(a) \in \mathcal{U}$, necessàriament $a \in V \cap D$ i, en ser $\mathcal{V}$ obert existirà $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset \mathcal{V}$. En definitiva,

$$f(B(a,\delta) \cap D) \subset f(V \cap \delta) = B(f(a), \varepsilon), \tag{2.5.2}$$

d'on obtenim que f és contínua al punt a. Repetim l'argument per a tots els punts $a \in D$ i ja hem acabat.

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$ És equivalent a demostrar-ho amb oberts, ja que un tancat és sempre el complementari d'un obert.

■

Exemple 2.5.2. Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Comentem succintament les corbes de nivell i altres conjunts:

- Aleshores, les corbes de nivell $E_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$ és un conjunt tancat. Sigui $E_c = f^{-1}(\{c\})$. En efecte, $A = \{c\}$ és un tancat a $\mathbb{R}$ (cada punt per separat és un tancat). Amb això, i el fet que f és contínua, sabem que $f^{-1}(\{c\})$.
- $\mathcal{U}_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > c\} = f^{-1}((c, +\infty))$ és obert, ja que l'antiimatge d'un obert és un obert.
- $\mathcal{T}_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq c\} = f^{-1}([c, +\infty))$ és tancat, ja que l'antiimatge d'un tancat és un tancat.

Observació 2.5.3. La imatge d'un obert per f contínua no té per què ser oberta. Per exemple, sigui f contínua definida per $f(x) = x^2$, amb $x \in (-1, 1)$, la imatge pel conjunt és $f((-1,1)) = [-1, 1]$, que és un tancat. Sigui com sigui, en cas que es compleixi aquesta propietat (que pot passar), direm que f és *oberta*.

2.6 Funcions contínues i compactes

Definició 2.6.1 (Homeomorfisme). Un homeomorfisme és una aplicació $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow E \subset \mathbb{R}^m$ entre subconjunts D i E amb la propietat que f és continua a D, injectiva a D, i la inversa $f^{-1} : f(D) \subset E \longrightarrow D$ és contínua.

Hem d'entendre els homeomorfismes com les aplicacions que deixen invariant l'estructura topològica, de la mateixa manera que els isomorfismes deixen invariant l'estructura lineal. En efecte, si f és un homeomorfisme, aleshores és contínua (i per tant la preimatge per f de tot obert és oberta) i al mateix temps és oberta (i.e. la preimatge per f^{-1} de tot obert és oberta). En altres paraules, f preserva els oberts (en tots dos sentits). El mateix passa amb els tancats. O amb les successions convergents.

Teorema 2.6.2. *Sigui $f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, amb $K \subset \mathbb{R}^n$ compacte i $f \in \mathcal{C}(K)$. Si f és injectiva, $f^{-1} : f(K) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és contínua. Equivalentment, f és oberta.*

Demostració. És suficient veure que, si $g = f^{-1}$, $g^{-1}(F)$ és tancat si $F \subset \mathbb{R}^n$ és tancat. Hem de mirar quins elements de $F \subset K$ són imatge per g^{-1} i, en particular, que coincideix amb la imatge per f de $F \cap K$; és a dir:

$$g^{-1}(F) = f(F \cap K). \tag{2.6.1}$$

Com $F \cap K$ és tancat i acotat (si K és compacte, 2.6.5 ens diu que $F \cap K$ també és compacte). Com f és contínua, tenim que la imatge per f també és compacta; és a dir, $f(F \cap K)$ és compacte i, en particular, és tancat ($g^{-1}(F)$ és compacte). ■

Definició 2.6.3 (Obert i tancat relatius)**.** Donat un conjunt $D \subset \mathbb{R}^n$, s'anomena *obert relatiu a D* a tot conjunt de la forma $D \cap \mathcal{U}$, essent $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un obert. De la mateixa manera, s'anomena *tancat relatiu a D* a tot conjunt de la forma $D \cap F$, on $F \subset \mathbb{R}^n$ és un tancat qualsevol.

Observació 2.6.4. En altres paraules, els oberts relatius a D són precisament les interseccions dels oberts de $\mathbb{R}^n$ amb D. Igualment, els tancats relatius a D són les interseccions de D amb els tancats de $\mathbb{R}^n$.

Propietat 2.6.5. *Sigui $K \subset \mathbb{R}^n$ compacte i sigui $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Aleshores, $f(K)$ és compacte.*

Demostració. És suficient veure que tota successió $\{y^j\}_j \subset f(K)$ té una parcial convergent. Sigui y^j el j-èsim element de la successió. $y^j \in f(K) \iff \exists x^j \in K$ i $f(x^j) = y^j$. Pel fet que K és compacte, $(x^k)_k$ admet una parcial convergent $(x^{k_j})_j$ amb límit $x \in K$ quan $j \to \infty$. Aquesta mateixa parcial generarà una nova successió $\{y^{k_j}\}_j$, el límit de la qual serà $f(x)$ donat que f és contínua a tots els punts de K. ■

Corol·lari 2.6.6. *La imatge contínua d'un conjunt fitat és fitada.*

Demostració. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ és fitat, aleshores $E \subset B(0,R)$ per a $R > 0$ prou gran. Però llavors $\overline{E} \subset \overline{B(0,R)}$ per tant $\overline{E}$ també és fitat. Però a més $\overline{E}$ és tancat, i per tant compacte. En conseqüència, si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és contínua aleshores $f(\overline{E}) \subset \mathbb{R}^m$ és compacte. Però això vol dir que $f(\overline{E})$ és fitat, per tant cap dintre d'una bola $B(0,S)$, $S > 0$. En particular, $f(E) \subset f(\overline{E}) \subset B(0,S)$ i per tant $f(E)$ és fitat. ■

Recordem de càlcul d'una variable que tota funció contínua $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ assoleix els seus extrems absoluts a l'interval $[a,b]$. En dimensions superiors passa una cosa semblant amb les funcions a valors escalars.

Corol·lari 2.6.7 (Weierstrass)**.** *Sigui $K \subset \mathbb{R}^n$ compacte i $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Existeixen $x^0 \in K$ i $x^i \in K$ tals que $f(x^0) \leq f(x) \leq f(x^i)$, per a tot $x \in K$ (s'assoleixen el màxim i el mínim).*

Demostració. Sigui la imatge de K (K compacte a $\mathbb{R}$) per f; per tant, $f(K)$ és tancat i acotat. Essent acotat, existeix el seu suprem $s = \sup_{x\in K}\{f(x)\}$. En conseqüència, donat $\varepsilon > 0$ la intersecció $(s-\varepsilon, s] \cap f(K)$ és no buida i existeixen punts dintre de $(s-\varepsilon, S] \cap f(K)$.
Prenem $\varepsilon = \frac{1}{k}$, amb $k \in \{1, 2, \dots\}$. $s - \frac{1}{k}$ no és una cota superior de $\{f(x) \mid x \in K\}$. Existeix algun $f(x^k) > s - \frac{1}{k}$ i ens queda que donat $x^k \in K$, $s - \frac{1}{k} < f(x^k) \leq s$.
Com que $(x^k) \subset K$ i K és compacte, (x^k) té alguna parcial $(x^{k_j})_j$ amb $\lim_{j\to\infty} x^{k_j} = x^i$.

$$f(x^{k_j}) \subset (s-\frac{1}{k_j}, s] \implies |f(x^{k_j})-s| < \frac{1}{k_j} \text{ i } \begin{Bmatrix} \lim_{j\to\infty} f(x^{k_j}) = f(x^i) & \text{(deducció)} \\ s \leq \lim_{j\to\infty} f(x^{k_j}) \leq s & \text{(definició)} \end{Bmatrix} \implies f(x^i) = s \tag{2.6.2}$$

Per l'ínfim la prova és similar. ■

2.7
Continuïtat uniforme

Definició 2.7.1 (Funció uniformement contínua). Recordem que $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua a A si, i només si, $\forall a \in A \forall\varepsilon > 0$ existeix un $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ (un delta que depèn d'a i d'ε) tal que $\|x - a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. En canvi, si f és uniformement contínua a A, δ no depèn de l'elecció del punt:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\Big|\; \|x - a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon,\ \forall a \in A. \tag{2.7.1}$$

Teorema 2.7.2. *Sigui $f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, amb K compacte. Aleshores, f és uniformement contínua a $\mathbb{R}$.*

Demostració. Fixem $\varepsilon > 0$. Aleshores, per a tot $a \in A$ podem trobar un $\delta_a > 0$ (que depèn d'a) tal que $\|x - a\| < \delta_a \implies |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ara, sigui $x \in B(a, \delta_a)$: sabem que $f(x) \in B(f(a), \frac{\varepsilon}{2})$. Dit d'una altra manera, que $f(B(a, \delta_a)) \subset B(f(a), \frac{\varepsilon}{2})$. Les boles $B(a, \frac{1}{2}\delta_a)$ recobreixen tot K i són obertes. En ser K compacte, amb un nombre finit k de boles en tenim prou:

$$K \subset \bigcup_{a\in K} B(a, \delta_a) \implies K \subset B(a_1, \delta_{a_1}) \cup \dots \cup B(a_n, \delta_{a_n}). \tag{2.7.2}$$

Hem usat que un conjunt compacte es pot escriure com un subrecobriment finit. Sigui $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta_1, \dots, \frac{1}{2}\delta_k\}$. Com k és finit, $\delta > 0$. Siguin $x, y \in K$ tals que $d(x, y) < \delta$. Com que $x \in K$, existirà almenys un i tal que $x \in B(a_i, \frac{1}{2}\delta_{a_i})$. Aleshores:

$$d(y, a_i) \leq d(y, x) + d(x, a_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{a_i}, \tag{2.7.3}$$

de manera que també $y \in B(a_i, \delta_{a_i})$. Així doncs, $f(x), f(y) \in B(f(a_i), \frac{\varepsilon}{2})$. En conseqüència:

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), f(y)) < \varepsilon, \tag{2.7.4}$$

com volíem veure. ■

Proposició 2.7.3. *Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ i sigui $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si f és uniformement contínua a D, aleshores per a tota successió de Cauchy $(x_n)_n \subset D$ la successió d'imatges $(f(x_n))_n$ també és una successió de Cauchy.*

Demostració. Donat $\epsilon > 0$, sigui $\delta > 0$ el corresponent a la continuïtat uniforme de f. Sigui $(x_n)_n \subset D$ de Cauchy. Llavors existeix n_0 tal que si $n, m > n_0$ aleshores $d(x_n, x_m) < \delta$. Però per continuïtat uniforme aixo implica que $d(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$. En conseqüència, $(f(x_n))_n$ es de Cauchy. ■

Exemple 2.7.4. La funció $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ és contínua a l'interval $(0, 1)$, però no ho és uniformement. Efectivament, la successió $(x_n)_n$ definida per $x_n = \frac{2}{n\pi}$ és certament de Cauchy a $(0, 1)$, donat que ho és a $\mathbb{R}$ (hi és convergent). En contrapartida, les imatges $f(x_n)$ prenen tan sols tres valors,

$$f(x_n) = \begin{cases} 0 & n = 2k \text{ per algun } k \in \mathbb{N} \\ 1 & n = 4k+1 \text{ per algun } k \in \mathbb{N} \\ -1 & n = 4k+3 \text{ per algun } k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.7.5}$$

Per exemple, això prova que $|f(x_{4k+1}) - f(x_{4k+3})| = 2$ per tot $k \in \mathbb{N}$, *i* per tant aquestes imatges mai no poden estar prop l'una de l'altra.

Proposició 2.7.5. *Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt fitat, i sigui $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Suposem que f envia successions de Cauchy de D a successions de Cauchy de $\mathbb{R}$. Aleshores, f és uniformement contínua.*

Lema 2.7.6. *Donat A un conjunt, si tenim $\mathcal{U}$ obert i $\mathcal{T}$ un conjunt tancat tal que $\mathcal{U} \subset A \subset \mathcal{T}$ i $D = \mathcal{T} \setminus \mathcal{U} \subset \partial A$. Aleshores, $\overline{A} = B$, $\mathring{A} = \mathcal{U}$ i $\partial A = D$.*

2.8
Exercicis finals

Exercici 2.8.1. *Estudieu l'existència dels límits següents:*

$$\begin{array}{ll} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x^2+y^3)^2}{4x^2+y^4} & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^4+y^2} \\ \lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(x-1)^7}{2x+y} & \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)^7}{x^4+y^3} \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log^3(1+x^2y^2)}{(xy)^6} & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2} \end{array} \tag{2.8.1}$$

Demostració.

1. Volem veure que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x^2+y^3)^2}{4x^2+y^4} = 0. \tag{2.8.2}$$
Apliquem els límits iterats al nostre problema:
$$f(x,0) = \frac{(2x^2)^2}{4x^2} = x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0 \implies \text{si } \exists L, \text{ aleshores } L = 0. \tag{2.8.3}$$

Farem servir propietats de les desigualtats triangulars per fitar els termes que ens interessa treure: $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4x^2+y^4}$ i $|y| \leq \sqrt[4]{4x^2+y^4}$. Per tant:

$$|f(x,y)-L| = |f(x,y)| = \left|\frac{(2x^2+y^3)^2}{4x^2+y^4}\right| \leq 2\frac{(2x^2)^2+(y^3)^2}{4x^2+y^4} = 2\frac{4|x|^4+|y|^6}{4x^2+y^4}$$
$$\leq \frac{2}{(4x^2+y^4)^1}\left(4\left(\sqrt{4x^2+y^4}\right)^4 + ((4x^2+y^4)^{\frac{1}{4}})^6\right) = 2\left(4(4x^2+y^4)+(4x^2+y^4)^{\frac{1}{2}}\right) \to 0, \tag{2.8.4}$$

on $4x^2+y^4 \to 0$, quan $(x,y) \to (0,0)$. Tindria el mateix efecte buscar una δ tal que $f(x,y)$ estigués fitada per ε.

2. Per fer aquest límit, aplicarem que el límit del producte és el producte de límits:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{xy} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^4+y^2}. \tag{2.8.5}$$

Per calcular el primer límit, utilitzarem que la composició de funcions contínues és contínua. Sigui $f(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{xy}$. Definim la funció $h(t) = \frac{e^t-1}{t}$ si $t \neq 0$ i $h(0) = 1$, que és contínua (en el 0, podeu fer el límit per l'Hôpital, o observar que el límit dona la definició de derivada de e^t al 0). Considerem la funció $g(x,y) = xy$, que és polinòmica i per tant contínua en $\mathbb{R}^2$. Així, la funció $F(x,y) = h(g(x,y))$, que coincideix amb f en el domini d'aquesta, és contínua per ser composició de funcions contínues. Per tant,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = F(0,0) = 1. \tag{2.8.6}$$

Pel que fa al segon límit, si $r(x,y) = \frac{xy}{x^4+y^2}$, tenim que $r(x,0) = 0$ si $x^4+y^2 \neq 0$, de manera que el límit, en cas d'existir, ha de ser $L = 0$. Considerem el camí $\gamma(t) = (t, t^2)$, per a $t > 0$ i fem el límit segons aquesta corba quan $t \to 0^+$:

$$r\left(t, t^2\right) = \frac{t^3}{2t^4} \to +\infty, \tag{2.8.7}$$

si $t \to 0^+$. Per tant, el límit no existeix.

■

Exercici 2.8.2. *Siguin $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ i $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; \forall x \in \mathbb{R}$ existeix $f_1(x) = \lim_{y\to b} f(x,y)$ i per a cada $y \in \mathbb{R}$ existeix $f_2(y) = \lim_{x\to a} f(x,y)$.*

1. *Sigui $f(x,y) = \frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}$ per a $(x,y) \neq (0,0)$. Demostreu que f no té límit al $(0,0)$.*
2. *Siguin p, q enters positius i $f(x,y) = \frac{x^q y^q}{x^4+y^4}$. Estudieu l'existència del límit al $(0,0)$ segons els valors de p i q.*

Observació 2.8.3. Recordeu que si existeix $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell$, els límits iterats coincideixen en el valor ℓ; és a dir:

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{y\to b} f_2(y) = \ell. \tag{2.8.8}$$

Resolució. Calculem els límits iterats. Per una part

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}, \tag{2.8.9}$$

i per l'altra

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2y^2}{3x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-2y^2}{y^2}=-2. \tag{2.8.10}$$

Com que surten valors diferents, el límit global no existeix. Pel que fa al segon apartat, és clar que els límits iterats donen sempre 0. Si fem el límit sobre rectes $y=mx$, $m\in\mathbb{R}$ tenim

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^p m^q x^q}{x^4+m^4x^2}=\frac{m^q}{1+m^4}\lim_{x\to 0}x^{p+q-4}. \tag{2.8.11}$$

Queda clar doncs que si $p+q-4\leq 0$ aquests límits sobre rectes o bé no existeixen o bé donen valors diferents per a cada recta. En tot cas, el límit global no existeix. Passem a veure que quan $p+q-4>0$ el límit existeix i val 0 (l'únic valor possible, tenint en compte que els límits iterats i els límits sobre rectes valen sempre 0). Utilitzem la definició: volem veure que donat $\epsilon>0$ existeix $\delta>0$ tal que si $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ aleshores $\left|\frac{x^py^q}{x^4+y^4}-0\right|<\epsilon$. Utilitzem les acotacions $|x|,|y|\leq (x^4+y^4)^{\frac{1}{4}}$, que hem deduït de la següent manera:

$$x^4\leq x^4+y^4 \iff -\sqrt[4]{x^4+y^4}\leq x\leq +\sqrt[4]{x^4+y^4} \iff |x|\leq\sqrt[4]{x^4+y^4}. \tag{2.8.12}$$

Així doncs, tenim:

$$\left|\frac{x^py^q}{x^4+y^4}\right|\leq\frac{(x^4+y^4)^{\frac{p}{4}}(x^4+y^4)^{\frac{q}{4}}}{x^4+y^4}=\left(x^4+y^4\right)^{\frac{p+q}{4}-1}=0 \text{ si } x,y\to 0, \tag{2.8.13}$$

on, per hipòtesi, $\frac{p+q}{4}-1>0$. Pel criteri del Sandwich, podem afirmar que, efectivament, el límit buscat és efectivament 0. També podem fer-ho directament, utilitzant l'acotació

$$x^4+y^4\leq\left(x^2+y^2\right)^2=\|(x,y)\|^4. \tag{2.8.14}$$

Si $\delta>0$ és tal que $\|(x,y)\|<\delta$ aleshores

$$\left|\frac{x^py^q}{x^4+y^4}\right|\leq\left(x^4+y^4\right)^{\frac{p+q}{4}-1}<\delta^{p+q-4}. \tag{2.8.15}$$

Com que δ^{p+q-4} tendeix a 0 a mesura que δ va tendint cap a zero, existirà δ prou petit per a que $\delta^{p+q-4}<\epsilon$, amb la qual cosa tindrem el resultat desitjat. ■

Exercici 2.8.4. *Sigui* $g:(0,+\infty)\times[0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^2$ *donada per* $g(r,\theta)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$. *Si* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *és una funció i definim la seva expressió en coordenades polars per* $\tilde{f}=f\circ g$, *demostreu que* $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\ell$ *si, i només si,* $\lim_{r\to 0}\tilde{f}(r,\theta)=\ell$, *uniformement en* $\theta\in[0,2\pi)$.

Demostració. La resposta és immediata si obviem la demostració del teorema següent de teoria. Igualment, el demostrem a continuació.

Teorema 2.8.5. *Sigui* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*. Aleshores,* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$ *si, i només si,*

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)), \quad \textit{uniformement en } \theta. \tag{2.8.16}$$

És a dir, que per a tot $\varepsilon > 0$ *existeix un* $\delta > 0$ *tal que*

$$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - \ell| < \varepsilon, \tag{2.8.17}$$

per a tot θ *i tot* $r \in (0,\delta)$*.*

Per definició, sabem que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$ equival a dir que donat $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, aleshores $|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$. Si ara anomenem $x = r\cos(\theta)$ i $y = r\sin(\theta)$, aleshores es pot dir equivalentment que donat $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - \ell| < \varepsilon$ si $0 < r < \delta$ i θ és qualsevol. Això ens diu que $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ tendeix a 0, quan $r \to 0^+$, uniformement en θ. ■

Exercici 2.8.6. *Sigui* $A \subset \mathbb{R}^n$ *i sigui,* $d(x,A) = \inf_{z\in A} d(x,z)$*, distància de* $x \in \mathbb{R}^n$ *a* A*.*

1. *Proveu que* $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^2; d(x,A) = 0\}$*.*
2. *Demostreu que per a tot* $x, y \in \mathbb{R}^2, |d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|$ *i deduïu que l'aplicació* $d(\cdot, A)$ *és contínua en* $\mathbb{R}^2$*.*
3. *Demostreu que si* A *és obert, aleshores per a tot* $y \in A, x \neq y$*, es té* $d(x,y) > d(x,A)$*.*

Demostració. Pel que fa al primer apartat:

- $\boxed{\subseteq}$ Si $x \in \bar{A}$ existeix una successió $\left\{x^k\right\}_k \subseteq A$ tal que $\lim_{k\to\infty} x^k = x$, és a dir, tal que $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$. Com que $d(x,A) \leq \left\|x - x^k\right\|$ per a tot k deduïm que $d(x,A) = 0$.
- $\boxed{\supseteq}$ Recíprocament, si $d(x,A) = 0$, existeixen $x^k \in A$ tals que $\left\|x - x^k\right\| \leq \frac{1}{k}$, i per tant $x = \lim_{k\to\infty} x^k \in \bar{A}$

Pel que fa al segon apartat, per a qualsevol $z \in A$ tenim:

$$d(x,A) \leq \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|. \tag{2.8.18}$$

Passant aquesta desigualtat a l'ínfim en $z \in A$ obtenim:

$$d(x,A) \leq \|x - y\| + d(y,A), \tag{2.8.19}$$

i, per tant:

$$d(x,A) - d(y,A) \leq \|x - y\|. \tag{2.8.20}$$

Canviant els papers de x i y tenim també $-d(x,A) + d(y,A) \leq \|x-y\|$, obtenint d'aquesta manera la desigualtat demanada. Aquesta desigualtat implica la continuïtat de $f(x) = d(x,A)$. Vegem que f és contínua a qualsevol $x_\epsilon \mathbb{R}^n$. Fixat $\epsilon > 0$ podem triat $\delta = \epsilon$, de manera que si $\|x - x_0\| < \delta$ aleshores

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \|x - x_0\| < \epsilon. \tag{2.8.21}$$

Pel que fa al tercer apartat, si A és obert i $y \in A$ existeix $r > 0$ tal que $B(y,r) \subseteq A$. Ara n'hi ha prou amb observar que dins $B(y,r)$ hi ha punts més propers a A que el centre y. Podem, per exemple, agafar un punt dins la bola $B(y,r)$, en el segment que uneix x i y, i més proper a x que no el punt y; explícitament, prenem

$$z = y - \frac{r}{2}\frac{y-x}{\|y-x\|}. \tag{2.8.22}$$

Tenim $z \in B(y,r) \subset A$, ja que $\|y-z\| = \frac{r}{2}$, i:

$$\|z-x\| = \left\| y - x - \frac{r}{2}\frac{y-x}{\|y-x\|} \right\| = \|y-x\| - \frac{r}{2}. \tag{2.8.23}$$

Per tant, $d(x,A) \leq \|y-x\| - \frac{r}{2} < \|y-x\|$. ■

Exercici 2.8.7. *Sigui $B = \{x^2+3y+z : 0 \leq y \leq x, x \leq 5, -1 \leq z \leq 1\}$. És B compacte?*

Demostració. Considerem la funció $f(x,y,z) = x^2+3y+z$, que és contínua. Observem que el conjunt

$$K = \{(x,y,z) : 0 \leq y \leq x, x \leq 5, -1 \leq z \leq 1\} \tag{2.8.24}$$

és compacte. En efecte, és tancat perquè es el producte cartesià de dos tancats,

$$K = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x, x \leq 5\} \times [-1,1], \tag{2.8.25}$$

i és acotat perquè $|x|,|y|,|z| \leq 5$. Com que $B = f(K)$, és a dir, és la imatge d'un compacte per una funció contínua, B és compacte. ■

Exercici 2.8.8. *Per a $\gamma > 0$, definim la funció*

$$f_\gamma(x,y) = \begin{cases} \frac{12(y-1)^7}{(x^2+(y-1)^2)^\gamma} & (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & (x,y) = (0,1) \end{cases} \tag{2.8.26}$$

En funció del valor de γ, estudieu la continuïtat en $\mathbb{R}^2$ de f_γ.

Demostració. És clar que f_γ és contínua a tots els punts $(x_0,y_0) \neq (0,1)$, ja que és el quocient de dues funcions contínues el denominador del qual no s'anul·la. Estudiem doncs la continuïtat al punt $(0,1)$. Tenim els límit iterats:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 1} \frac{12(y-1)^7}{(x^2+(y-1)^2)^\gamma} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^{2\gamma}} = 0 \tag{2.8.27}$$

i

$$\lim_{y\to 1}\lim_{x\to 0} \frac{12(y-1)^7}{(x^2+(y-1)^2)^\gamma} = \lim_{y\to 1} \frac{12(y-1)^7}{(x^2+(y-1)^2)^\gamma} = \lim_{y\to 1} 12(y-1)^{7-2\gamma}. \tag{2.8.28}$$

Aquest segon límit no dona 0 si $7-2\gamma \leq 0$, i per tant en aquests casos el límit global no pot existir. En particular, f_γ no pot ser contínua.
Si $7-2\gamma > 0$ utilitzem l'acotació $|y-1| \leq (x^2+(y-1)^2)^{\frac{1}{2}}$ per deduir que

$$\left| \frac{12(y-1)^7}{(x^2+(y-1)^2)^\gamma} \right| \leq 12\left(x^2+(y-1)^2\right)^{7/2-\gamma} = 12\|(x,y)-(0,1)\|^{7-2\gamma}.$$

Com que $7-2\gamma > 0$ el terme de la dreta de la desigualtat tendeix a 0 quan (x,y) tendeix a $(0,1)$, i pel criteri del Sandwich deduïm que $\frac{12(y-1)^7}{(x^2+(y-1)^2)^\gamma}$ també hi tendeix. Per tant f és contínua a $(0,1)$. ■

Exercici 2.8.9. *Sigui* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció acotada. Demostreu que* f *és contínua si i només si* $A = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ *és tancat.*

Demostració. Suposem primer que f és contínua i provem que A és tancat. És suficient veure que si $X^k \in A, k \geq 1$, és una successió convergent amb $\lim_{k\to\infty} X^k = X^0$, aleshores $X^0 \in A$. Si diem $X^0 = (x_0, y_0, z_0)$, hem de veure doncs que $z_0 = f(x_0, y_0)$.
Com que $X^k \in A$ tenim $X^k = (x_k, y_k, z_k)$ amb $z_k = f(x_k, y_k)$. La convergència $\lim_{k\to\infty} \|X^k - X^0\| = 0$ implica, en particular,

$$\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (x_0, y_0) . \tag{2.8.29}$$

La continuïtat dona, aleshores:

$$z_0 = \lim_{k\to\infty} z_k = \lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = f(x_0, y_0) , \tag{2.8.30}$$

tal com volíem.
Suposem ara que A és tancat i comprovem que f és contínua a qualsevol punt (x_0, y_0). És suficient veure que per a qualsevol successió (x_k, y_k) tal que $\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (x_0, y_0)$ es té $\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = f(x_0, y_0)$. Per a veure això utilitzarem que $(x_k, y_k, f(x_k, y_k)) \in A$ i que A és tancat.
Com que f és acotada, existeix $M > 0$ tal que $f(x, y) \in [-M, M]$ per a tot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Considerem ara la bola tancada $\bar{B} = \overline{B((x_0, y_0), 1)} \subset \mathbb{R}^2$. Observem que per a k prou avançat tenim

$$(x_k, y_k, f(x_k, y_k)) \in \bar{B} \times [-M, M], \tag{2.8.31}$$

i que aquest conjunt $K := \bar{B} \times [-M, M]$ és un compacte de $\mathbb{R}^3$. Per tant, existeix una parcial convergent $\left\{\left(x_{k_j}, y_{k_j}, f\left(x_{k_j}, y_{k_j}\right)\right)\right\}_j$ (teorema Bolzano-Weierstrass) i, degut a que A és tancat,

$$\left(x_{k_j}, y_{k_j}, f\left(x_{k_j}, y_{k_j}\right)\right) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} (x_0', y_0', f(x_0', y_0')) \in A. \tag{2.8.32}$$

Ara bé, com que $\left(x_{k_j}, y_{k_j}\right)$ és una parcial de (x_k, y_k) tenim que, necessàriament, $(x_0', y_0') = (x_0, y_0)$, i per tant el límit de $\left\{\left(x_{k_j}, y_{k_j}, f\left(x_{k_j}, y_{k_j}\right)\right)\right\}_j$ té la forma (x_0, y_0, z_0), amb $z_0 = f(x_0, y_0)$.
D'aquesta manera hem vist que f convergeix a partir d'una parcial de (x_k, y_k), però no en la seqüència total (pot ser que $\lim_k f(x_k, y_k)$ no existeixi).
Suposem doncs que $\lim_k f(x_k, y_k)$ no existeix. Això vol dir que existeix $\varepsilon > 0$ tal que

$$[-M, M] \backslash B(f(x_0, y_0), \varepsilon) \tag{2.8.33}$$

conté infinits elements en $(f(x_k, y_k))_k$ tals que podem trobar una subseqüència $\left(x_{k_j}, y_{k_j}\right)_j$ satisfent

$$\left\|f\left(x_{k_j}, y_{k_j}\right) - f(x_0, y_0)\right\| \geq \varepsilon, \quad \forall j \geq 0. \tag{2.8.34}$$

Ara bé, com que $\left(f\left(x_{k_j}, y_{k_j}\right)\right)_j$ és una seqüència en el compacte $[-M, M]$, repetint l'argument fet anteriorment, tenim que existeix una parcial convergent $\left(f\left(x_{k_{j_l}}, y_{k_{j_l}}\right)\right)_l$ que convergeix a $f(x_0, y_0)$, però això no és possible, ja que sabem que

$$\|f(x_{k_{j_l}}, y_{k_{j_l}}) - f(x_0, y_0)\| \geq \varepsilon, \quad \forall l \geq 0. \tag{2.8.35}$$

■

III

Derivabilitat

3.1 Derivades parcials i direccionals

Per generalitzar els nostres coneixements de derivació en una variable en diverses variables hem de conèixer molt bé com ho fem per traslladar-ho en clau de còpia.

Definició 3.1.1 (Funció univariable derivable en un punt). f és derivable al punt a si existeix la derivada en el punt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \tag{3.1.1}$$

Definició 3.1.2 (Derivada parcial). Sigui $a \in \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $\mathcal{U}$ obert a $\mathbb{R}^n$. Les derivades parcials de f al punt a (si existeixen) són:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{x_j \to a_j} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{x_j - a_j}. \tag{3.1.2}$$

En derivació parcial podem fer servir les regles de derivació que coneixem fins avui dia. Les altres variables actuen com si fossin constants.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{x_1 - a_1}. \tag{3.1.3}$$

Per a $n = 2$, la fórmula a seguir seria la immediatament superior.

Exemple 3.1.3. Sigui $f(x, y) = \sin(xy) + x$. Calculem les derivades parcials al punt $(1, \pi)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\cos(xy) + 1 &\implies \frac{\partial f}{\partial x}(1, \pi) = 1 - \pi. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\cos(xy) &\implies \frac{\partial f}{\partial y}(1, \pi) = \cos(\pi) = -1. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Definició 3.1.4 (Gradient). És el vector de les derivades parcials d'una funció escalar. Així, el gradient de f al punt a és:

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right). \tag{3.1.5}$$

Es tracta d'un vector i per coherència se sol expressar com una matriu columna:

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)^T = Df(a)^T. \tag{3.1.6}$$

Notem que l'existència de gradient implica només l'existència de les seves components (les derivades parcials) i, per tant, en esmentar gradient en cap cas s'assumeix que la funció és derivable.

Definició 3.1.5 (Derivada direccional)**.** Sigui $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ un obert d'$\mathbb{R}^n$ i $\vec{v}$ una direcció (un vector a $\mathbb{R}^n$ amb $\|v\| = 1$). Diem derivada direccional de f al punt a i en la direcció $\vec{v}$ a:

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}. \tag{3.1.7}$$

Observació 3.1.6. Sigui $v = e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, no nul a la coordenada j-èsima. Utilitzem la definició:

$$D_{e_j} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a). \tag{3.1.8}$$

Definició 3.1.7 (Diferenciabilitat en un punt)**.** Sigui $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $\mathcal{U}$ obert en $\mathbb{R}^n$ i $a \in \mathcal{U}$. f és diferenciable al punt a si, i només si, $\exists L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació lineal tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - L_a(x - a)|}{\|x - a\|} = 0. \tag{3.1.9}$$

Observació 3.1.8. Vegem per $n = 1$. A l'hora de determinar $L_a(x)$ tenim en compte que la podem representar per una matriu 1×1 (és una funció d'$\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$): $L_a(x) = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \lambda(x - a)}{x - a} = 0 \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda \iff f'(a) = \lambda. \tag{3.1.10}$$

Reescrivint, ens queda $L_a(x) = f'(a)x$.

Intentem veure quina ha de ser aquesta aplicació lineal $L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. En particular, intentem determinar què val $L_a(e_j)$, on $(e_j)_j$ és la base canònica. Considerem punts x a la coordenada j de la forma $x = a + te_j, t \in \mathbb{R}$. Aquest límit restringit a una variable resulta ser 0:

$$\begin{aligned} \|x - a\| = |t| \implies \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(a + te_j) - f(a) - L_a(te_j)}{t} \right| = 0 \\ \iff \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a) - tL_a(e_j)}{t} = 0 \iff \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} - L_a(e_j) = 0 \\ \iff \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - L_a(e_j) = 0 \iff L_a(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a). \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Per tant, ens queda que la matriu de L_a té mida $n \times 1$ i és la següent:

$$L_a \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right). \tag{3.1.12}$$

A posteriori:

$$L_a(v) = \nabla f(a) \cdot \vec{v},\ v \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.13}$$

Així doncs, podem reescriure l'expressió de diferenciabilitat de la següent manera:

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x - a)|}{\|x - a\|} = 0. \tag{3.1.14}$$

Aquesta aplicació lineal que estem buscant correspon un vector de la base canònica. En concret, és la que origina l'hiperplà tangent a la gràfica de la funció en el punt a.

Observació 3.1.9. Quan f és diferenciable al punt $a \in \mathcal{U}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \nabla f(a) e_j$. En general, $D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{v}$. Si f és diferenciable al punt a, f és contínua al punt a.

Exercici 3.1.10. *Donada la següent funció f, per a quins valors de p, q la funció és diferenciable a $(0,0)$?*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{x^4+y^4}, & \text{si } p,q > 0, \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{3.1.15}$$

Demostració. Cal que existeixi $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$ i que sigui diferenciable en aquell punt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{y} = 0 \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Com veiem, les derivades parcials són coincidents i $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Per tant, el gradient en la imatge per f de $(0,0)$ existeix i és finit. Ara apliquem la definició de diferenciabilitat:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)(x-0, y-0)}{\|(x-y) - (0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^p y^q}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{?} 0. \tag{3.1.17}$$

Si més no, aquest límit no és ni de bon tros evident. Intentem aplicar els límits sobre rectes per a conèixer el seu possible valor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^p (mx)^q}{(x^4 + (mx)^4)\sqrt{x^2 + (mx)^2}} = \frac{m^4}{(1+m^4)\sqrt{1+m^4}} \lim_{x \to 0} \frac{x^{p+q-4}}{|x|} \begin{cases} 0, & \text{si } p+q-5 > 0 \\ \nexists, & \text{si } p+q-5 \leq 0 \end{cases} \tag{3.1.18}$$

Per tant, per a $p+q \leq 5$, f no és diferenciable. Suposem $p+q > 5$. Utilitzant les fitacions habituals $|x| \leq (x^4)^{\frac{1}{4}} \leq (x^4+y^4)^{\frac{1}{4}}$, $|y| \leq (x^4+y^4)^{\frac{1}{4}}$ i, notem, $|x^p y^q| \leq (x^4+y^4)^{\frac{p+q}{4}}$ ens queda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^p y^q}{(x^4+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{(x^4+y^4)^{\frac{p+q}{4}-1}}{(x^4+y^4)^{\frac{1}{4}}} = (x^4+y^4)^{\frac{p+q-5}{4}} \xrightarrow{p+q-5>0} 0. \tag{3.1.19}$$

Fita interessant: $(x^2+y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \geq x^4 + y^4 \leq x^4 + y^4 + x^4 + y^4 = 2(x^4+y^4)$. ■

Propietat 3.1.11. *Si f és diferenciable al punt a, aleshores existeixen les derivades direccionals:*

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{v})}{t}, \quad \text{si } \|v\| = 1. \tag{3.1.20}$$

En concret, $\nabla f(a) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(a)\| \cos(\theta)$, ja que hem fixat $\|v\| = 1$, i $\vec{v} = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$. La derivada direccional és màxima quan $\vec{v}$ i $\nabla f(a)$ estan alineats.

Propietat 3.1.12. *Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és diferenciable al punt $a \in \mathring{D}$, aleshores f té derivades direccionals a a, i es compleix:*

$$D_v f(a) = Df(a) \cdot v = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle, \tag{3.1.21}$$

és a dir, la derivada direccional en la direcció v és la imatge de v per la diferencial.

1. *Si f és diferenciable, aleshores la diferencial és única. Efectivament, acabem de veure que, en cas d'existir, $Df(a)$ queda determinada per totes les derivades direccionals $D_vf(a)$. Però cadascuna de les $D_vf(a)$ és única.*
2. *Si f és diferenciable al punt a, llavors $Df(a)\cdot e_i = D_{e_i}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Per tant la matriu de $Df(a)$ en base canònica és*

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}. \tag{3.1.22}$$

3. *Si f és diferenciable al punt a i satisfà $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ per tot $i = 1\ldots n$, aleshores $D_vf(a) = 0$ per tot v, doncs*

$$D_vf(a) = Df(a)\cdot v = 0\cdot v = 0. \tag{3.1.23}$$

4. *Per comprovar si una funció és diferenciable a un punt $x = a$, l'única aplicació lineal L que pot servir és la que té matriu en base canònica $L = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)$. Si aquesta L no serveix, aleshores cap altra aplicació lineal L no servirà, i f no és diferenciable al punt a.*

Propietat 3.1.13. *Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $a \in D$ i tal que les seves derivades parcials $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ amb $j = 1 \div n$, són contínues a D. Aleshores, f és diferenciable a D. Diem que $f \in \mathcal{C}^1(D)$ o que f és de classe $\mathcal{C}^1$. En forma de cadena d'implicacions podem posar:*

$$f \in \mathcal{C}^1(D) \implies f \text{ diferenciable a } D \implies f \text{ contínua a } D. \tag{3.1.24}$$

Notem que $f \in \mathcal{C}^1$ és una condició més forta que f sigui diferenciable.

Demostració. Per a $n = 2$, sigui $a = (a_1, a_2)$ i $x = (x_1, x_2)$. Volem provar el següent:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1,a_2) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)h_2\right)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0. \tag{3.1.25}$$

El numerador ve donat per la següent expressió, pel teorema del valor mig en la primera igualtat:

$$\begin{aligned} f(a_1+h_1,a_2+h_2) - f(a_1+h_1,a_2) + f(a_1+h_1,a_2) - f(a_1,a_2) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)h_2\right) \\ = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,\xi_2)h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,a_2)h_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)h_2\right) \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\right)h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right)h_2 \\ \leq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\right)\|h\| + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,\xi_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\right)\|h\| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|\|h\| + \|\,\|h\|. \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

■

Definició 3.1.14 (Matriu diferencial de ϕ al punt a)**.** Sigui $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i sigui $a \in D$. Definim la imatge per ϕ com la imatge per les m aplicacions components en les m coordenades: $\phi(x_1, \dots, x_n) = (\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n))$. ϕ és diferenciable al punt a si, i només si, existeix $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|\phi(x) - \phi(a) - L_a(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0. \tag{3.1.27}$$

A posteriori, quan això passa, $L_a(u)$ és la matriu diferencial de ϕ al punt a (o jacobiana, tot i que per jacobiana normalment s'entén el determinant d'aquesta matriu).

$$L_a(u) = (D\phi_a)(u), \text{ on } D\phi_a \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1}(a) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \nabla \phi_1(a) \\ \vdots \\ \nabla \phi_m(a) \end{pmatrix} \tag{3.1.28}$$

Propietat 3.1.15. *Si ϕ, ψ diferenciables:*

1. *$\phi + \psi$ és diferenciable i $D(\phi+\psi)_a = D\phi_a + D\psi_a$.*
2. *Si $m = 1$, $\phi\psi$ és diferenciable i $\nabla(\phi\psi)_a = \psi(a)\nabla\phi_a + \phi(a)\nabla\psi_a$.*

Definició 3.1.16 (Regla de la cadena)**.** Siguin $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $g : f(D) \subset E \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Sigui $a \in D$ amb $f(a) \in E$. Si f és diferenciable al punt a i g és diferenciable a $f(a)$, aleshores $g \circ f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ és diferenciable i

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot D(f(a)), \text{ on } \cdot \text{ indica el producte de matrius.} \tag{3.1.29}$$

Les matrius de $D(g(f(a)))$ i $D(f(a))$ són les següents:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(a) \end{pmatrix}. \tag{3.1.30}$$

Teorema 3.1.17 (La regla de la cadena en derivació parcial)**.** *Suposem que $z = f(x,y)$ i f és diferenciable, i $x = g(t)$, $y = h(t)$. Suposant que les derivades rellevants existeixen,*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{3.1.31}$$

Encara més, suposem que $f(x,y)$ és una funció tal que $x = g(s,t)$ i $y = h(s,t)$ són funcions de dues variables, s, t. Aleshores:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \langle f_x, f_y \rangle \cdot \langle g_s, h_s \rangle = f_x g_s + f_y h_s, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \langle f_x, f_y \rangle \cdot \langle g_t, h_t \rangle = f_x g_t + f_y h_t. \tag{3.1.32}$$

Regla de la cadena amb parcials en dimensió 2. Posem $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que fem la següent assignació: $(x,y) \longmapsto (G_1(x,y), G_2(x,y))$, amb $G_1(x,y) = g(\phi(x,y))$ i $G_2(x,y) = g(\psi(x,y))$, on ara $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ i $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. La matriu diferencial de G és:

$$DG(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y)}. \tag{3.1.33}$$

Per a trobar qualsevol d'aquestes entrades, podem aplicar la regla de la cadena. Per exemple, a partir de la igualtat $G_1(x,y) = g(\phi(x,y))$ tenim:

$$\begin{aligned} DG_1(x,y) = Dg(\phi(x,y)) \cdot D\phi(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(\phi(x,y)) & \frac{\partial g}{\partial y}(\phi(x,y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.1.34}$$

Com que també $DG_1(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$, ens queda el següent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial x}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial x}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}(\phi(x,y))\frac{\partial \phi_2}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3.1.35}$$

Aquesta és la fórmula del teorema anterior, que surt d'aplicar la regla de la cadena. ■

Exemple 3.1.18. La funció $f(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ té jacobià no nul a tot punt diferent de $(0,0)$. En conseqüència, f és localment invertible a tot arreu llevat del punt $(0,0)$, amb inversa $\mathcal{C}^\infty$. Si posem $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ i anomenem g a la inversa local, aleshores $g \circ f = I$, o el que és el mateix:

$$g(f(u,v)) = g(x(u,v), y(u,v)) = (u,v), \tag{3.1.36}$$

i podem pensar que $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. La diferencial Dg es pot calcular matricialment:

$$Dg(f(u,v))Df(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1.37}$$

i en coordenades això s'escriu com:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(x,y) & \frac{\partial x}{\partial v}(x,y) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(x,y) & \frac{\partial y}{\partial v}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1.38}$$

d'on

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(x,y) & \frac{\partial x}{\partial v}(x,y) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(x,y) & \frac{\partial y}{\partial v}(x,y) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}^{-1} \tag{3.1.39}$$

Adonem-nos que això ens permet recuperar $Dg(x,y)$ en termes de $g(x,y)$ en aquells punts (x,y) en els que g tingui sentit. Naturalment, com g és desconeguda, també ho és Dg. Tot i això, si per exemple fixem el punt $(u,v) = (1,1)$ llavors $f(1,1) = (0,2)$ i, per tant, $x(1,1) = 0, y(1,1) = 2$ d'on $u(0,2) = 1$ i $v(0,2) = 1$ i per tant

$$Dg(0,2) = \frac{1}{4\left(u^2 + v^2\right)} \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.1.40}$$

Això ens permetria, per exemple, donar el polinomi de Taylor de g en un entorn del punt $(0,2)$, tot i no conèixer g explícitament. Els càlculs que hem fet matricialment també es podrien fer implicitament tot derivant el sistema

$$\begin{cases} x = u(x,y)^2 - v(x,y)^2, \\ y = 2u(x,y)v(x,y), \end{cases} \tag{3.1.41}$$

respecte de x i y, respectivament. En fer-ho, obtenim dos sistemes d'equacions en el punt (x,y),

$$\begin{cases} 1 = 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = 2v\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 2u\frac{\partial u}{\partial y} - 2v\frac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = 2v\frac{\partial u}{\partial y} + 2u\frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases} \tag{3.1.42}$$

Si $(x,y) = (0,2)$, llavors $(u,v) = (1,1)$ i per tant això genera un sistema lineal amb incògnites les derivades parcials de u, v respecte x, y al punt $(0,2)$,

$$\begin{cases} 1 = 2\frac{\partial u}{\partial x}(0,2) - 2\frac{\partial v}{\partial x}(0,2), \\ 0 = 2\frac{\partial u}{\partial x}(0,2) + 2\frac{\partial v}{\partial x}(0,2), \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 2\frac{\partial u}{\partial y}(0,2) - 2\frac{\partial v}{\partial y}(0,2), \\ 1 = 2\frac{\partial u}{\partial y}(0,2) + 2\frac{\partial v}{\partial y}(0,2), \end{cases} \tag{3.1.43}$$

Exemple 3.1.19. Sigui $\psi(x,y) = (e^{xy}, \sin(xy)+1)$, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. La matriu és la següent:

$$D\psi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix} \tag{3.1.44}$$

La composició de g i f ens donarà justament ψ: $(x,y) \longmapsto f(x,y) = xy \longmapsto g(t) = (e^t, \sin(t)+1)$ i $g(f(x,y)) = \psi(x,y)$.

$$D\psi(x,y) = Dg(f(x,y)) \cdot Df(x,y) = \begin{pmatrix} e^t \\ \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix}. \tag{3.1.45}$$

Observació 3.1.20. Suposem que γ és de classe $\mathcal{C}'$, és a dir, que $\gamma'(t)$ existeix i és contínua. Sigui $f(x)$ funció a $\mathbb{R}^n$ i $E_c = \{x \mid f(x) = c\}$, sigui $\gamma(t)$ corba dins de E_c. $f(\gamma(t)) = c$ i $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$.

Exemple 3.1.21. Considerem $f(x,y) = \frac{x^2|y|^\gamma}{|x|^3+y^2}$ i $f(0,0) = (0,0)$. Estudiem, primer, el cas $\alpha \geq 0$. De les desigualtats:

$$0 \leq \frac{|x|^3}{|x|^3+y^2} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{y^2}{|x|^3+y^2} \leq 1, \tag{3.1.46}$$

obtenim que:

$$0 \leq \frac{x^2|y|^\alpha}{|x|^3+y^2} = \left(\frac{|x|^3}{|x|^3+y^2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{y^2}{|x|^3+y^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} (|x|^3+y^2)^{\frac{2}{3}+\frac{\alpha}{2}-1} \leq (|x|^3+y^2)^{\frac{2}{3}+\frac{\alpha}{2}-1}. \tag{3.1.47}$$

Per tant, $\frac{2}{3} + \frac{\alpha}{2} - 1 > 0$. Aleshores:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0, \tag{3.1.48}$$

senzillament pel lema del Sandwich. Això prova que si $\alpha > \frac{2}{3}$ llavors f és contínua a l'origen. Per valors $\alpha \leq 0$, un càlcul de límits direccionals a l'origen mostra que f no té límit al $(0,0)$. Queda pendent, doncs, veure què passa si $0 < \alpha \leq \frac{2}{3}$. En aquest cas, els límits direccionals no resolen la qüestió donat que són tots 0. Com a mètode alternatiu, podem intentar traçar el límit al llarg d'alguna corba no rectilínia. Per facilitar el càlcul, escollim una corba $\gamma(t)$ amb components potencials

$$\gamma(t) = \left(t^2, t^3\right), \tag{3.1.49}$$

que faci que els dos sumands del denominador representin una contribució del mateix ordre. En efecte, γ té components polinomials (per tant contínues per valors de t en un entorn de 0) i certament passa per $(0,0)$ (donat que $\gamma(0) = (0,0)$). A més,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in\gamma} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4|t|^{3\alpha}}{t^6+t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{3\alpha-2}}{2} = \begin{cases} 0 & \alpha > \frac{2}{3} \\ 1 & \alpha = \frac{2}{3} \\ \infty & \alpha < \frac{2}{3} \end{cases} \tag{3.1.50}$$

Com que els límits sobre rectes són 0, i el límit sobre γ no ho és, ja estem en condicions d'assegurar que f no té límit al $(0,0)$ si $\alpha \leqslant \frac{2}{3}$. També podríem optar per afegir un petit paràmetre a la corba, per exemple $\gamma_m(t) = (mt^2, t^3)$, i procedir de manera similar,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in\gamma_m} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f\left(\gamma_m(t)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{m^2|t|^{3\alpha-2}}{(|m|^3+1)} = \begin{cases} 0 & \alpha > \frac{2}{3}, \\ \frac{m^2}{|m|^3+1} & \alpha = \frac{2}{3}, \\ \infty & \alpha < \frac{2}{3} \end{cases} \tag{3.1.51}$$

per concloure que el límit sobre γ_m depèn de m sempre que $\alpha \leq \frac{2}{3}$. Novament, això també prova que f no té límit al $(0,0)$.

3.2 Interpretació gràfica de la diferenciabilitat

Diem que dues funcions $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tenen contacte d'ordre major o igual que m al punt $x = a$, o bé que són tangents d'ordre m al punt $x = a$, si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{\|x-a\|^m} = 0. \tag{3.2.1}$$

Si f, g tenen contacte d'ordre major o igual que m, llavors també tenen contacte d'ordre major o igual que k per a tot $k = 0, 1, \ldots, m$. Geomètricament, això vol dir que les gràfiques de f i g tenen a un entorn de $x = a$ un contacte superior al que la funció $\|x\|^m$ té amb 0 al voltant de l'origen. En particular, f i g són més tangents a un entorn de $x = a$ com més gran és m. Representarem $\mathbb{R}^{n+1}$ com si fos $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Així doncs,

$$\mathbb{R}^{n+1} = \left\{(x, x_{n+1}) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n, x_{n+1} \in \mathbb{R}\right\}. \tag{3.2.2}$$

Recordem que la gràfica d'una funció $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és el subconjunt donat per

$$G(f) = \left\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_{n+1} = f(x)\right\} \tag{3.2.3}$$

En particular, la restricció de f als punts de la recta $r : x = a + t\vec{v}$ genera una funció g real de variable real, $g(t) = f(a + t\vec{v})$ la gràfica de la qual pot pensar-se com una corba traçada sobre $G(f)$. Aquesta corba és la intersecció de $G(f)$ amb el pla de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'equacions paramètriques $(x, x_{n+1}) = (a + t\vec{v}, s) = a + t\vec{v} + se_{n+1}$ (és a dir, el pla que conté r i és paral·lel a e_{n+1}). Adonem-nos que si g és derivable a l'origen, llavors existeix el límit

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t} = D_v f(a), \tag{3.2.4}$$

i en particular $g'(0) = D_v f(a)$. Com a conseqüència,

$$0 = \lim_{t\to 0} \left(\frac{g(t) - g(0) - g'(0)t}{t}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a) - D_v f(a)t}{t} = 0. \tag{3.2.5}$$

Més encara, si anomenem $p(t) = g(0) + g'(0)t = f(a) + D_v f(a)t$, aleshores

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t) - p(t)}{t} = 0, \tag{3.2.6}$$

i per tant les gràfiques de g i p tenen un contacte d'ordre superior a 1 en un entorn de l'origen. Com que p és una recta, deduïm que l'existència de $D_v f(a)$ implica l'existència d'una recta tangent per a g. O el que és el mateix, la restricció de f a la recta $a + t\vec{v}$ té una recta tangent ben definida, d'equació $p(t) = g(0) + g'(0)t = f(a) + D_v f(a)t$. Tal com passa en una variable, $D_v f(a)$ indueix una funció

$$\begin{array}{rccc} D_v f : & A & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & a & \longmapsto & D_v f(a), \end{array} \tag{3.2.7}$$

que assigna a cada punt a el valor de la seva derivada direccional $D_v f(a)$. El domini A de $D_v f$ és el subconjunt de punts de $a \in D$ tals que $D_v f(a)$ està ben definit. En general, $A \subset D$.

Observació 3.2.1. Recordem la definició de diferenciabilitat en un punt: sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt i $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció, i sigui $a \in D$ un punt interior a D. Es diu que f és diferenciable al punt a si existeix una aplicació lineal $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a) - L(x - a)|}{\|x - a\|} = 0. \tag{3.2.8}$$

Quan això passa, L s'anomena diferencial de f al punt a, i es denota $L = Df(a)$.

La propietat de ser diferenciable requereix que $f(x)$ i $g(x) = f(a) + L(x - a)$ tinguin un contacte d'ordre major o igual que 1 al punt $x = a$. Adonem-nos que g és un polinomi de primer grau en $x_1, \ldots, x_n$, i per tant seva gràfica $G(g)$ és un hiperplà de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$G(g) := \left\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_{n+1} = f(a) + L(x - a)\right\},$$

que passa pel punt $(a, f(a))$. Es pot dir, doncs, que ser diferenciable equival a tenir un hiperplà tangent al punt $x = a$.

3.3

Derivades successives

Definició 3.3.1 (Derivades d'ordre superior). Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable a tot D tal que existeix $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ per a tot $j \in \{1, \ldots, n\}$ i per a tot $a \in D$.

Observació 3.3.2. Pot passar que les funcions $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ siguin diferenciables. Aleshores, existeixen les derivades parcials

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) \implies \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}. \tag{3.3.1}$$

Lema 3.3.3 (Lema de Schwarz). *Sigui $f \in \mathcal{C}^2(D)$ (totes les segones derivades són contínues). Aleshores,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a). \tag{3.3.2}$$

Podem derivar amb l'ordre més convenient, ja que el resultat final serà el mateix. N'hi ha prou amb què cadascuna de les derivades parcials sigui diferenciable.

Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció per a la qual existeixen les derivades parcials $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \forall a \in D$. Aleshores, $\frac{\partial f}{\partial x} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si existeix la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$, la denotem per:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a). \tag{3.3.3}$$

Propietat 3.3.4 (La derivació és «commutativa»). *Si $\frac{\partial f}{\partial x_j}, j = 1 \div n$, són diferenciables a un punt $a \in D$. Aleshores,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a),\ \forall j, k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.3.4}$$

L'ordre de les derivades creuades, no influeix en la derivació.

Definició 3.3.5 (Matriu hessiana). Sigui f per a la qual $\frac{\partial f}{\partial x}$ són diferenciables a $a \in D$ (per exemple, $f \in \mathcal{C}^2(D)$. Aleshores, la matriu hessiana d'f al punt a:

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{(\partial x_n)^2} \end{pmatrix},\ Hf(a) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ és simètrica.} \tag{3.3.5}$$

Exemple 3.3.6. Sigui $f(x, y) = x^3y^2 - \sin(xy)$. Podem calcular algunes derivades parcials:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2y^2 - y\cos(xy), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2x^3 + x\cos(xy). \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

A la vegada, podem fer la segona derivada parcial per a cadascuna de les variables, en funció de les dues equacions anteriors, (3.3.6); d'aquesta manera, n'obtindrem quatre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 6xy^2 - y^2\sin(xy), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 6x^2 + \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2x^3 - x^2\sin(xy), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 6x^2 + \cos(xy) - xy\sin(xy) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Definició 3.3.7 (Funció de classe $\mathcal{C}^k$)**.** Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Diem que f és de classe $\mathcal{C}^k$, o bé $f \in \mathcal{C}^k(D), k \in \mathbb{N}$, si existeixen totes les derivades d'ordre k:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}, \; i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\} \text{ i són contínues a } D. \tag{3.3.8}$$

Definició 3.3.8 (Diferenciabilitat al punt a)**.** Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Diem que f és diferenciable al punt a si existeix $L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - L_a(x-a)|}{\|x - a\|} = 0. \tag{3.3.9}$$

A posteriori,

$$\begin{array}{rccc} L_a: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & L_a(y) = \nabla f(a) y, \end{array} \tag{3.3.10}$$

on tenim una bijecció (o una identificació) entre $Df_a \longleftrightarrow \nabla f(a)$. Ara, tenim si f és diferenciable a tot D:

$$\begin{array}{rccc} Df: & \Omega \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \\ & a & \longmapsto & Df(a) \longleftrightarrow \nabla f(a). \end{array} \tag{3.3.11}$$

Se segueix que Df és diferenciable al punt a si existeix $\Lambda_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|Df(x) - Df(a) - \Lambda_a(x-a)\|}{\|x - a\|}. \tag{3.3.12}$$

Quan $\Lambda_a \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, podem definir-la de la següent forma:

$$\begin{array}{rccc} \Lambda_a: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ & y & \longmapsto & \Lambda_a(y) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Lambda_a(y): & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \Lambda_a(y)(x) \end{array} \tag{3.3.13}$$

Per tant, podem trobar un element així:

$$\Lambda_a(y)(x) = x^T \cdot Hf(a) \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x_1)^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{(\partial x_n)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{3.3.14}$$

Exemple 3.3.9. Ens donen una funció f de dues variables, definida a trossos:

$$f(x,y) \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{3.3.15}$$

Si $(x,y) \neq (0,0)$, les derivades creuades coincideixen. En canvi, a priori no podem dir el mateix sobre el punt $(x,y) = (0,0)$. Existeix $D((x_0,y_0),r)$ entorn de $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ on $x^2+y^2 \neq 0$ (en particular, $(0,0) \notin D$). Aleshores, $f(x,y) \in \mathcal{C}^\infty(D((x_0,y_0),r))$. Això és perquè en tota derivada posterior podem reescriure el resultat de manera que el denominador sigui una potència de x^2+y^2.
És $\frac{\partial f}{\partial x}$ diferenciable als punts $(x_0,y_0) \neq (0,0)$? És $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ contínua al $(0,0)$? f és de classe $\mathcal{C}^1$ a $\mathbb{R}^2$ si, i només si:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y(x^2-y^2)+2x^2y)(x^2+y^2) - xy(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)} = \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^3)}{(x^2+y^2)^2}. \tag{3.3.16}$$

Notem que per a calcular derivades en el punt $(0,0)$ no podem usar una expressió coneguda, sinó que cal usar la definició:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0. \tag{3.3.17}$$

Per veure que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ és contínua al $(0,0)$ i, per tant, de classe $\mathcal{C}^1$, hem d'aplicar la definició de continuïtat: $0 < \|x-a\| < \delta \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{y(x^4-y^4)+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq \frac{|y(x^4-y^4)|}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2|y|^3}{(x^2+y^2)^2} &\leq \frac{|y|(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2|y|^3}{(x^2+y^2)^2} \\ &\leq |y| + 4|y| = 5|y|. \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

On hem usat les acotacions següents:

$$\begin{gathered} \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \\ (x^2+y^2)^2 \leq 2(x^4+y^4) \end{gathered} \tag{3.3.19}$$

Fixem-nos que, en aquest cas, $f(x,y) = -f(y,x)$. Per tant:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-y^4)-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{3.3.20}$$

Per determinar que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no és contínua a $(0,0)$, volem veure que les derivades creuades no coincideixen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \frac{h-0}{h} = 1. \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = -1. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

I, amb tot, ja hem acabat.

Exemple 3.3.10. Sigui $f(x,y,z) = x\cos(z) + ye^z + z^2(\log(1+y^2))$ i un punt a pertanyent al domini d'f, $a = (1,1,0) \in \mathbb{R}^3$. Com veiem, $\vec{v}$ i $\nabla f(p)$ estan alineats:

$$D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(p)\| \cdot \cos(\theta), \text{ màxim quan } \theta = 0. \tag{3.3.22}$$

Calculem el gradient en $(1,1,0)$:

$$\nabla f(p) = \left(\cos(z), e^z + z^2\frac{2y}{1+y^2}, -x\sin(z) + ye^z + 2z\log(1+y^2)\right)_{(1,1,0)} = (1,1,1). \quad (3.3.23)$$

Prenem el vector $\vec{v}$ com la normalització del gradient: $v = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

3.4 Exercicis finals

Exercici 3.4.1. *Sigui $f(x,y)$ definida a trossos de la següent forma:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases} \quad (3.4.1)$$

1. *f és contínua.*

Demostració. Apliquem la definició de continuïtat i veiem que $\forall (x,y) \neq (0,0)$, f és contínua en (x,y) perquè és producte i divisió de contínues tal que el denominador no s'anul·la; per a $(x,y) = (0,0)$:

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0, \text{ quan } (x,y) \to (0,0). \quad (3.4.2)$$

Pel lema del Sandwich, existeix $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ i f és contínua al $(0,0)$. Al segon apartat, en $(0,0)$ existeixen totes les derivades direccionals d'f; en efecte, per definició:

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{tv_1|tv_2|}{\sqrt{t^2v_1^2+t^2+v_2^2}}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t|t|\cdot v_1|v_2|}{t|t|\sqrt{(v_1^2+v_2^2)}} = v_1|v_2|. \quad (3.4.3)$$

Per tant, per a tot $v = (v_1, v_2)$ tal que $\|v\| = 1$, existeix $D_v f(0,0) = v_1|v_2|$. Com que f no és lineal, f no és diferenciable al $(0,0)$: si f fos diferenciable al $(0,0)$, l'aplicació $L(v) = D_v f(0,0)$ seria lineal (de fet, $D_v f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot v$).

Observació 3.4.2. Alternativament, ho podríem argumentar per definició:

$$f \text{ és diferenciable al } (0,0) \iff \exists \nabla f(0,0) \text{ i } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0. \quad (3.4.4)$$

Hem usat que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. En més detall:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &\implies \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &\implies \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Quan posem $y = mx$ podem reescriure el límit de (3.4.5) de la següent manera:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot |m||x|}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{|m|}{1+m^2}\frac{|x|}{x} \begin{cases} \frac{|m|}{1+m^2}, & \text{si } x \to 0^+ \\ -\frac{|m|}{1+m^2}, & \text{si } x \to 0^- \end{cases} \tag{3.4.6}$$

El signe del valor del límit canvia en funció de si l'x s'aproxima per la dreta o per l'esquerra. Per tant, no existeix el límit en una direcció i, en conseqüència, no existeix el límit global.

■

Exercici 3.4.3. *Sigui $\alpha > 0$. Volem determinar la diferenciablilitat al (0,0) de la següent funció:*

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+xy^2+x^4}{(x^2+y^2)^\alpha}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si\ (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{3.4.7}$$

Demostració.

1. Estudiem l'existència de $\nabla f_\alpha(0,0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x,0) - f_\alpha(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3+0+x^4}{(x^2)^\alpha}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^4}{x(x^2)^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1+x)}{x|x|^{2\alpha}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x|^2(1+x)}{|x|^{2\alpha}} = \lim_{x\to 0} |x|^{2-2\alpha}(1+x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = 1 \\ 0, & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty, & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Hem vist, doncs, que $\exists \nabla f_\alpha(0,0) \iff \alpha \leq 1$ i, per tant, $f_\alpha$no és diferenciable per a tot $\alpha > 1$.

2. Acotem el resultat, analitzant el cas que $0 < \alpha < 1$. Hem d'obtenir $\nabla f_\alpha(0,0) = (0,0)$.

$$\begin{aligned} f_\alpha \text{ diferenciable al } (0,0) \iff & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f_\alpha(0,0) - \nabla f_\alpha(0,0)(x-0, y-0)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0 \\ \iff & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+xy^2+x^4}{(x^2+y^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}} \stackrel{?}{=} 0. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Anem a veure si, en efecte, es compleix:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^3+xy^2+x^4}{(x^2+y^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}} \right| &\leq \frac{|x|^3 + |x|\cdot|y|^2 + |x|^4}{(x^2+y^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}} \leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + (x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}} \\ &= (x^2+y^2)^{1-\alpha}(2+\sqrt{x^2+y^2}) \to 0 + 2 = 0. \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Hem usat que $1 - \alpha > 0$ (recordem, $0 < \alpha < 1$; altrament, no podríem dir que el límit és zero). Pel lema del Sandwich, existeix el límit i és zero. Per tant, $f_\alpha(0,0)$ és diferenciable al $(0,0)$ per a tot $0 < \alpha < 1$.

3. Acotem el resultat, analitzant $\alpha = 1$:

$$f_\alpha \text{ diferenciable al } (0,0) \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f_\alpha(0,0) - \nabla f_\alpha(0,0)(x-0, y-0)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$$
$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3+xy^2+x^4}{(x^2+y^2)} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cdots = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.4.11}$$

Podem acotar-lo amb el valor absolut:

$$0 \leq \left| \frac{x^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \to 0. \tag{3.4.12}$$

Pel lema del Sandwich, existeix el límit, val 0 i f_α és diferenciable al $(0,0)$.

■

Exercici 3.4.4. *Siguin $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definides per:*

$$f(x,y,z) = (x + \log(1+xyz), \sin(\pi(x+y+z))), \quad g(x,y) = (x^2+y^2, \cos(xy)). \tag{3.4.13}$$

1. *Calculeu la matriu diferencial de f al punt $(1,0,0)$.*
2. *Calculeu la matriu diferencial de g al punt $(1,0)$.*
3. *Calculeu la matriu diferencial de la composició $g \circ f$ al punt $(1,0,0)$.*

Demostració. Dividim f, g en quatre funcions diferents: f_1, f_2, g_1, g_2, una per cada coordenada:

$$\begin{matrix} f_1(x,y,z) = x + \log(1+xyz) & g_1(x,y) = x^2+y^2 \\ f_2(x,y,z) = \sin(\pi(x+y+z)) & g_2(x,y) = \cos(xy) \end{matrix} \tag{3.4.14}$$

Se'ns demana calcular $Df(1,0,0)$:

$$Df(1,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\pi & -\pi & -\pi \end{pmatrix}. \tag{3.4.15}$$

Hem hagut de calcular prèviament les expressions de les derivades parcials en un punt genèric per, després, poder substituir el punt $(1,0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) &= 1 + \frac{1}{1+xyz}(yz) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{1}{1+xyz}(xz) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{1}{1+xyz}(xy) \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Figura 3.1: Derivades parcials per f_1.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) \cos(\pi(x+y+z))\pi \\ &\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) \cos(\pi(x+y+z))\pi \\ &\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \cos(\pi(x+y+z))\pi \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

Figura 3.2: Derivades parcials per f_2.

La resta de l'exercici es deixa per al lector.

Indicacions: El següent apartat es fa de manera anàloga per g i, en l'últim, cal usar la regla de la cadena, obtenint $D(g \circ f)(1,0,0) = Dg(1,0) \cdot Df(1,0,0)$. ■

Exercici 3.4.5. *Siguin $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ i $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ les funcions*

$$F(x, y, z) = \left(x + y^2, x^2 + xz\right), \quad G(x, y) = \left(xy, x^2 + y\right). \tag{3.4.18}$$

Calcula la matriu diferencial de la composició $G \circ F$ al punt $(1, 1, -1)$.

Demostració. Tenim que $D(G \circ F)(1, 1, -1) = DG(F(1, 1, -1)) \cdot DF(1, 1, -1) = DG(2, 0) \cdot DF(1, 1, -1)$. Per tant:

$$\begin{gathered} DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 2x + z & 0 & x \end{pmatrix} \implies DF(1, 1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ G(x, y) = (xy, x^2 + y) \implies DG(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \implies DG(2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3.4.19}$$

■

Exercici 3.4.6. *Sigui $\alpha > 0$ i sigui la funció a $\mathbb{R}^2$ definida per*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \tag{3.4.20}$$

Digueu per a quins α f és contínua al $(0, 0)$. f és diferenciable al punt $(0, 0)$?

Demostració. f és contínua al $(0, 0)$ si, i només si,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid 0 \leq \|(x, y)\| < \delta \implies \left| \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right| < \varepsilon. \tag{3.4.21}$$

Fem una sèrie d'acotacions per determinar el límit mitjançant el lema del Sandwich:

$$0 < \left| \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right| \leq \frac{|x| \cdot |y|}{(x^2 + y^2)^\alpha} \leq (x^2 + y^2)^{1-\alpha} \to \begin{cases} 1, & \alpha = 1 \\ 0, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha > 1 \end{cases} \tag{3.4.22}$$

Les fites utilitzades han sigut les següents:

$$\begin{aligned} |\sin(t)| &\leq 1, \\ |x| &\leq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ |y| &\leq \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

Com hem vist, cal estudiar cada cas d'α per determinar la continuïtat de la funció de manera acurada:

1. $0 < \alpha < 1$: Com que $(x^2 + y^2)^{1-\alpha} \to 0$ quan $(x, y) \to (0, 0)$, pel lema del Sandwich $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$. I, així, f és contínua per a tot $0 \leq \alpha < 1$.

2. $\alpha \geq 1$: Apliquem límits per rectes, ja que veurem que no existeixen. Sigui $y = mx$ i posem $f(x, mx)$:
$$f(x, mx) = \frac{m}{(1+m^2)^\alpha}|x|^{2(1-\alpha)} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2(1+m^2)}}\right). \tag{3.4.24}$$
Si $\alpha = 1$, $f(x, mx)$ oscil·la infinitament al voltant de $x \to 0$ i, per tant no existeix. Trobem el mateix comportament quan $\alpha > 1$. Per tant, f no pot ser contínua al $(0, 0)$.

Per veure que f és diferenciable al $(0, 0)$, han d'existir $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ i que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0)(x - 0, y - 0)}{\|(x, y) - (0, 0)\|} = 0. \tag{3.4.25}$$
Primerament, veiem que:
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0. \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0. \end{aligned} \tag{3.4.26}$$
Per tant, existeix $\nabla f(0, 0)$ i val $(0, 0)$, per a tot $0 < \alpha < 1$. Amb això:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - 0 - (0, 0)(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right). \tag{3.4.27}$$
Agafem les mateixes fites que abans i obtenim:
$$0 < \left|\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right| \leq \frac{|x| \cdot |y|}{(x^2 + y^2)^\alpha} \leq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha} \to \begin{cases} 1, & \alpha = \frac{1}{2} \\ 0, & \alpha < \frac{1}{2} \\ \infty, & \alpha > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.4.28}$$
I l'estudi és anàleg al que hem fet anteriorment amb tota rigorositat: per a $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, trobem que el límit val 0 i, per tant, pel teorema del Sandwich, f és diferenciable al $(0, 0)$ per a tot $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. En canvi, per a $\alpha \geq \frac{1}{2}$, f_α no és diferenciable al $(0, 0)$. ■

Exercici 3.4.7. *Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable en tot punt de $\mathbb{R}^n$. Si $f(tx) = t^2 f(x)$ per a tot $t > 0$ i tot $x \in \mathbb{R}^n$, demostreu $\nabla f(tx) = t\nabla f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$ i $t > 0$.*

Demostració. N'hi ha prou amb veure que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(tx) = t\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$ i $t > 0$. Per simetria es demostren les altres parcials i, en conseqüència, el gradient. Notem que:
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(tx + h) - f(tx)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{t^2(f(x + \frac{h}{t}) - f(x))}{h} \\ &= t \lim_{h\to 0} \frac{(f(x + \frac{h}{t}) - f(x))}{\frac{h}{t}} = t\frac{\partial f}{\partial x_1}(x). \end{aligned} \tag{3.4.29}$$
Per demostrar, ara, que $\nabla f(x) \cdot x = 2f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$, sigui $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, t > 0$. Aleshores, definim $F(t) = f(tx)$. Com que $F(t) = t^2 f(x)$, deduïm que $F(t) = 2tf(x)$. Per altra banda,

al ser f diferenciable i $t \longmapsto tx$ lineal (i per tant diferenciable), aplicant la regla de la cadena obtenim:

$$DF(t) = Df(tx) \cdot x = \nabla f(tx) \cdot x = t\nabla f(x) \cdot x. \tag{3.4.30}$$

Quan $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tenim que $DF(t) = F(t)$, i obtenim que $2tf(x) = t\nabla f(x) \cdot x$, tal i com volíem veure. Per altra banda, si $x = 0$, volem veure que $f(0) = 0$. Però això és conseqüència directa de la continuïtat de f a l'origen, que es deriva de la seva diferenciabilitat. ■

Part

II

Aproximació, funcions i extrems

IV

Aproximació polinomial

4.1

FORMES MULTILINEALS

No hem fet aquest apartat a classe, així que es deixaran els enunciats sense demostrar.

Recordem que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ denota l'espai vectorial d'aplicacions lineals $\mathcal{L}:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Aquest espai és isomorf a l'espai de matrius $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ i, per tant té dimensió nm. En particular, quan $m=1$, l'espai $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ admet la base $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$, on $\omega_i:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és l'aplicació lineal determinada per $\omega_i(e_j)=\delta_{ij}$. Per extensió, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ denota l'espai de formes bilineals.

Definició 4.1.1 (Forma bilineal). Una forma bilineal és una aplicació $\eta:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que per a tot $u,v,w\in\mathbb{R}^n$ i $\lambda\in\mathbb{R}$, es compleix:

$$\begin{aligned}\eta(u+v,w)&=\eta(u,w)+\eta(v,w), & \eta(\lambda u,w)&=\lambda\eta(u,w)\\ \eta(u,v+w)&=\eta(u,v)+\eta(u,w) & \eta(u,\lambda w)&=\lambda\eta(u,w)\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Altre cop, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ té estructura d'espai vectorial real (la suma d'aplicacions bilineals i el producte per escalars es defineixen de manera natural). Una base de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ és $\{\omega_i\otimes\omega_j\}_{i,j=1\dots n}$, on

$$\omega_i\otimes\omega_j:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \tag{4.1.2}$$

és la única aplicació bilineal tal que $\omega_i\otimes\omega_j(e_p,e_q)=\delta_{ip}\delta_{jq}$. En particular, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ té dimensió n^2.

Similarment, $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ denotarà l'espai de formes k-lineals $\eta:\mathbb{R}^n \overset{(k)}{\cdots} \times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, i una base d'aquest espai és $\{\omega_{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{i_k}\}_{i_1,\dots,i_k=1,\dots,n}$, on

$$\omega_{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{i_k}:\mathbb{R}^n \overset{(k)}{\cdots} \times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \tag{4.1.3}$$

amb $\omega_{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega_{i_k}(e_{j_1},\dots,e_{j_k})=\delta_{i_1,j_1}\dots\delta_{j_k,j_k}$. La dimensió de $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ és n^k.

Definició 4.1.2 (Aplicació simètrica). Direm que una aplicació k-lineal $\eta\in\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ és simètrica si per a tota permutació $\sigma\in S_k$ es té $\eta\left(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(k)}\right)=\eta\left(e_1,\overset{\dots}{(k)},e_k\right)$.

Lema 4.1.3. *Tota forma k-lineal simètrica $\eta\in\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ queda determinada per la seva acció sobre k-tuples de vectors repetits, i.e. pel conjunt $\{\eta(u,\cdots u);u\in\mathbb{R}^n\}$*

Si η és una forma bilineal, llavors existeixen coeficients a_{ij} tals que $\eta=\sum_{ij}a_{ij}\omega_i\otimes\omega_j$. En particular, η és simètrica si, i només si, $\eta(e_i,e_j)=\eta(e_j,e_i)$ o, equivalentment, $a_{ij}=a_{ji}$, per a tot i, j. Així doncs, donats dos vectors $x = \sum_j x_j e_j$ i $y = \sum y_k e_k$, la imatge $\eta(x, y)$ es pot representar mitjançant el següent producte tensorial:

$$\begin{aligned}\eta(x,y) &= \eta\left(\sum_j x_j e_j, \sum_k y_k e_k\right) = \sum_j x_j \eta\left(e_j, \sum_k y_k e_k\right) = \sum_{j,k} x_j y_k \eta e_j, e_k = \sum_{j,k} x_j y_k a_{jk} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

En particular, usant el lema anterior, ens adonem que l'expressió:

$$\eta(x, x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \tag{4.1.5}$$

és un polinomi homogeni de grau 2 en les variables $x_1, \dots, x_n$ que determina η de manera única. Es diu homogeni perquè tots els seus sumands són monomis de grau 2. Així, tota forma bilineal simètrica queda unívocament determinada per un polinomi homogeni de segon grau.
De la mateixa manera, si $k = 3$ tota forma trilineal simètrica $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ queda determinada per un polinomi homogeni de grau 3. Explícitament, $\eta(x, x, x) = \sim_{i,j,k} a_{ijk} x_i x_j x_k$ on $a_{ijk} = \eta(e_i, e_j, e_k)$. La seva acció sobre tres vectors es pot calcular mitjançant el producte de la seva matriu. El general, tota forma k-lineal simètrica queda unívocament determinada pel seu polinomi homogeni de grau k associat, i la seva acció està determinada per un tensor k-dimensional. *En endavant, serà d'utilitat la següent identificació*: $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}))$.

Observació 4.1.4. Aquesta identificació associa a tota forma k-lineal $\eta \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ una aplicació lineal $L_\eta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ definida per:

$$\begin{aligned} L_\eta(x) : \quad \mathbb{R}^n \times \overset{(k-1)}{\cdots} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x^1, \dots, x^{k-1}) & \longmapsto L_\eta(x)(x^1, \dots, x^{k-1}) = \eta(x, x^1, \dots, x^{k-1}). \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Efectivament tenim $L_\eta \in \mathcal{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Més encara, la correspondència $\eta \longmapsto L_\eta$ és lineal i bijectiva, donat que si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathcal{L}^{k-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}))$ aleshores l'aplicació η_L definida per

$$\eta_L(x^1, \dots, x^k) = L(x^1)(x^2, \dots, x^k) \tag{4.1.7}$$

és una forma k-lineal, que satisfà per motius obvis $L_{\eta_L} = L$ i $\eta_{L_\eta} = \eta$.

4.2
Polinomi de Taylor

Definició 4.2.1 (Polinomi de Taylor). Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ i sigui $a \in \Omega$. Anem a desenvolupar el polinomi de Taylor en diverses variables, és a dir, per a diverses n. Per a $n = 1$, on n

és el nombre de variables, sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, amb $a \in \Omega$. El polinomi de Taylor de f de grau k al punt a és:

$$p_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i. \tag{4.2.1}$$

Definició 4.2.2 (Terme complementari de Lagrange i ordre de contacte)**.** A més, hem de tenir en compte que aquest polinomi té un residu que ha d'assolir per a coincidir amb f. En diem el *terme complementari de Lagrange* ($\mathcal{R}$):

$$\begin{gathered} f(x) = p_k(x) + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)}(x-a)^{k+1}, \ \mathcal{R} = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)}(x-a)^{k+1}. \\ f(x) = p_k(x) + o(|x-a|^k) \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)-p_k(x)}{|x-a|^k} = 0. \end{gathered} \tag{4.2.2}$$

Si el límit de (4.2.2) existeix i val zero, diem que el polinomi té ordre de contacte k.

Teorema 4.2.3. *Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, en concret, sigui $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ i sigui $a \in \Omega$. Existeix un únic polinomi $p_k(x_1, \ldots, x_n)$ de grau $\leq k$ tal que:*

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)-p_k(x)|}{\|x-a\|^k} = 0. \tag{4.2.3}$$

A més, $f(x) = p_k(x) + o(\|x-a\|^k)$ i té la forma:

$$p_k(x) = f(a) + \nabla f(a)(x-a) + \frac{1}{2!}D^2 f(a)(x-a, x-a) + \cdots + \frac{1}{k!}D^k f(a)(x-a, \overset{k}{\ldots}, x-a). \tag{4.2.4}$$

Això és:

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} D^i f(a) \frac{(x-a, \overset{(i)}{\ldots}, x-a)}{i!} \tag{4.2.5}$$

Aleshores:

$$\begin{gathered} f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} D^i f(a)(x-a, \overset{j}{\cdots}, x-a) + \frac{1}{(k+1)!} D^{(k)} f(\xi)(x-a, \overset{k}{\ldots}, x-a), \\ \xi = (1-t)a + tx, t \in [0,1]. \end{gathered} \tag{4.2.6}$$

Demostració. Sigui $p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} D^i f(a) \frac{(x-a, \overset{(i)}{\ldots}, x-a)}{i!}$. Volem veure que $\lim_{x\to a} \frac{|f(x)-p_k(x)|}{\|x-a\|^k} = 0$. És suficient veure que si posem x com $x = a + tv$, el límit tendeix a zero uniformement en $\vec{v}$. Considerem $g_v(t) = f(a+tv)$ i $g_v(0) = f(a)$. Tenim:

$$\begin{aligned} g_v'(t) &= Df(a+tv)\cdot v & g_v'(0) &= Df(a)\cdot v \\ g_v^{(j)}(t) &= D^j f(a+tv)(v, \overset{j}{\ldots}, v) & g_v^{(j)}(0) &= D^j f(a)(v, \overset{j}{\ldots}, v) \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Una vegada obtenim això, volem veure que el límit que donarem a continuació és 0 uniformement en $\vec{v}$:

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x=a+tv}} \left| \frac{f(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j f(a)(x-a, \overset{(j)}{\ldots}, x-a)t^j}{\|x-a\|^k} \right| = \lim_{t\to 0} \left| \frac{g_v(t) - \sum_{j=0}^{t} \frac{g_v^{(j)}(0)}{j!} t^j}{t^k} \right|. \tag{4.2.8}$$

Per al cas $k = 1$, tenim:

$$\lim_{t\to 0} \frac{g_v(t) - (g_v(0) + g_v'(0)t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g_v'(t) - g_v'(0)}{1} = \lim_{t\to 0} g_v'(t) - g_v'(0). \tag{4.2.9}$$

Volem veure que l'expressió no depèn de $\vec{v}$ (ja que n'és independent, volem que sigui uniformement contínua). En altres paraules, volem veure que $\forall \varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$ aleshores:

$$\begin{aligned} &|g_v'(t) - g_v'(0)| = |Df(a+tv) - Df(a)v| = |\nabla f(a+tv)v - \nabla f(a)v| \\ =& \left| \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+tv) - \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \cdot v_j \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+tv) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| \leq \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon, \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

on hem usat, en la última desigualtat, que $|t| < \delta$. L'uniformitat ve donada per la continuïtat de les derivades parcials, és a dir, $\frac{\partial f}{\partial x}$ són funcions contínues: per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \delta$ implica que:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{n}. \tag{4.2.11}$$

Com $x = a + tv$, $\|x - a\| < \delta \iff |t| < \delta$. Per a la resta de $k \in \mathbb{N}$, haurem de fer k vegades L'Hôpital i acabarem obtenint derivades k-èsimes. L'argument se sostendria de manera similar. ■

Observació 4.2.4. El cas $k = 1$, ja el coneixem. Per la definició de diferenciabilitat:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0. \tag{4.2.12}$$

Això ens diu que $p_1(x) = f(a) + \nabla f(a)(x-a)$ és el polinomi de Taylor és l'única aplicació lineal per la qual es compleix aquest límit.
Per al cas $k = 2$, $p_2(x) = f(a) + \nabla f(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)Hf(a)(x-a)$.
Per al cas $n = 2$, hem de fer:

$$\begin{aligned} p_2(x,y) &= f(a_1,a_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) (x - a_1, y - a_2) \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(a) \end{pmatrix} (x - a_1, y - a_2) \\ &= f(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2) \right) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a)(x-a_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)(x-a_1)(y-a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(a)(y-a_2)^2 \right). \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

I, generalitzant, podem escriure el polinomi de Taylor de la següent forma:

$$\begin{aligned} p_k(x) &= f(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j) + \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)(x_j - a_j)(x_k - a_k) \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(a)(x_j - a_j)(x_k - a_k)(x_l - a_l) \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Exemple 4.2.5. Sigui $f(x,y) = 5x^4 + 4x^2y + y^2 + 7$, $a = (1,0)$. Calculem $p_3(x,y)$ amb els càlculs previs pertinents:

$$\begin{array}{ccc} f(1,0) = 12 & & \\ f_x = 20x^3 + 8xy & f_{xx} = 60x^2 + 8y & f_{xxx} = 120x \\ f_y = 4x^2 + 2y & f_{yy} = 2 & f_{xxy} = 8 \\ & f_{xy} = 8x & f_{xyy} = 0 \\ & & f_{yyy} = 0 \end{array} \tag{4.2.15}$$

De manera que obtenim:

$$\begin{aligned} p_3(x,y) = 12 + 20(x-1) + 4y + \frac{1}{2!}\left(60(x-1)^2 + 2\cdot 8(x-1)y + 2y^2\right) \\ + \frac{1}{3!}(120(x-1)^3 + 3\cdot 8(x-1)^2y). \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Hi ha un únic polinomi de grau 3 que tingui aquest ordre de contacte per a $n = 2$ al voltant del punt $(1,0)$.

Observació 4.2.6. El polinomi de Taylor és únic. Sigui $f(x,y) = \sin(x+y)$ i calculem $p_3(x,y)$ al punt $(0,0)$:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots = t - \frac{t^3}{3!} + o(|t|^3) \iff \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t) - \left(t - \frac{t^3}{3!}\right)}{t^3}. \tag{4.2.17}$$

En el cas de la funció que ens toca estudiar, en dues variables, tenim que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y) - \left((x+y) - \frac{(x+y)^3}{3!}\right)}{(x+y)^3} = 0. \tag{4.2.18}$$

Com veiem, podem convertir el polinomi de Taylor de dues variables en un estudi totalment equivalent d'un polinomi de Taylor d'una variable, tal com hem vist.

Observació 4.2.7. Sigui v amb $\|v\| = 1$ i considerem $g(t) = f(a+tv)$. Aquesta funció g manté la regularitat d'f, de manera que tenim $g \in \mathcal{C}^k$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t) - \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} t^j}{|t|^k} = 0. \tag{4.2.19}$$

Aplicant la regla de la cadena, obtenim que $g'(t) = D(f + atv)v$ i, en general, $g^{(k)}(t) = D^k f(a + tv)(v, \overset{k}{\cdots}, v)$ (és un k-vector perquè l'aplicació és k-lineal). Ara, si prenem $x = a + tv \iff v = \frac{x-a}{t}$:

$$g^{(j)}(0) = D^j f(a)(v, \overset{j}{\cdots}, v) = D^j f(a)(x-a, \overset{j}{\cdots}, x-a)t^{-j}. \tag{4.2.20}$$

D'aquí, si el límit per la dreta és 0 uniformement en v ja hem acabat.

Corol·lari 4.2.8 (Teorema del valor intermig). *Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable i sigui D un domini convex (és a dir, que per a dos punts qualssevol del domini el segment entre ells també pertany al domini). Siguin $x, y \in D$ i sigui $z(t) = (1-t)x + ty, t \in [0,1]$. Existeix $t \in (0,1)$ tal que:*

$$f(x) - f(y) = \nabla f(z(t))(x-y) \iff f(x) = f(y) + \nabla f(z(t))(x-y). \tag{4.2.21}$$

Observació 4.2.9. Per a l'expressió $z = x + t(y - x)$ amb $t \in [0, 1]$, es descriu el segment entre x i y, on z és un determinat punt intermig que depèn directament de t.

4.3 Extrems relatius

4.3.1 Definicions i nous conceptes

Definició 4.3.1 (Màxim relatiu). Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funció a D, D obert. Diem que $a \in D$ és un màxim relatiu si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ sempre que $x \in B(a, \varepsilon)$.

Definició 4.3.2 (Mínim relatiu). Anàlogament, sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funció a D, D obert. Diem que $a \in D$ és un màxim relatiu si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(a)$ sempre que $x \in B(a, \varepsilon)$.

En dimensió 1 ($n = 1$), ja sabem que hem de mirar els punts amb derivada 0; dit més formalment, si $a \in D$ és un extrem relatiu, aleshores $f'(a) = 0$. A més a més, $f''(a) > 0 \implies a$ mínim (si la segona derivada és positiva, és un mínim) i $f''(a) < 0 \implies a$ màxim (si la segona derivada és negativa, és un màxim).

Teorema 4.3.3. *Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Si a és un extrem relatiu (o punt estacionari), aleshores $\nabla f(a) = 0$ (dit d'una altra manera, les primeres derivades amb totes les variables són 0).*

Demostració. Sigui v amb $\|v\| = 1$ i considerem $g(t) = f(a + tv)$. Aquesta g té un extrem relatiu a $t_0 = 0$; així, tenim $g(t) \leq g(0)$ i $f(a + tv) \leq f(a)$.

$$0 = g'(0) = \nabla f(a) \cdot v. \tag{4.3.1}$$

Com $\nabla f(a) \cdot v = 0$ per a tot vector v, necessàriament $\nabla f(a) \equiv 0$. També podríem dir que totes les derivades direccionals de f han de ser 0. ■

Definició 4.3.4 (Punt crític). Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funció a D, D obert. Diem que $a \in D$ és un punt crític si les derivades parcials són simultàniament nul·les; això és, si $\nabla f(a) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \nabla f(a)(x-a) + \frac{1}{2!} D^2 f(a)(x-a, x-a) + o(\|x-a\|^2) \\ \iff f(x) - f(a) &= \frac{1}{2}(x-a) Hf(a)(x-a) + o(\|x-a\|^2). \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Definició 4.3.5 (Matriu definida positiva). Sigui M una matriu $n \times n$ simètrica. Diem que M és definida positiva si:

$$v^T \cdot M \cdot v \geq 0, \ \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{4.3.3}$$

Teorema 4.3.6 (Punt de sella). *Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funció a D de classe $\mathcal{C}^2(D)$. Sigui a punt crític ($\nabla f(a) = 0$). Si $Hf(a)$ és estrictament definida negativa, a és un màxim relatiu. Anàlogament, si $Hf(a)$ és estrictament definida positiva, a és un mínim relatiu. Si $v^T Hf(a) v$ pren valors positius i negatius (segons v), diem que a és un punt de sella.*

4.3.2 Com sabem com està definida una matriu

El cas fàcil és el següent: sigui una matriu diagonal M

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{4.3.4}$$

Aleshores, el producte $e_j^T M e_j = \lambda_j$, per a tot $j = 1 \div n$. D'aquesta manera, tenim que M és definida positiva si, i només si, $\lambda_j > 0$ per a tot $j = 1 \div n$.

Propietat 4.3.7. *Sigui M una matriu $n \times n$. Sigui Δ_j el primer menor d'ordre j, $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ i $\Delta_n = \det M$ (els menors orlants).*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.3.5}$$

1. *Si $\Delta_j > 0$ per a tot j, M és definida estrictament positiva.*
2. *Si Δ_j és negativa per a j senar i si A_j és positiva per a j parell, aleshores M definida estrictament negativa.*

Exemple 4.3.8. Sigui $f(x,y,z) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2 + z^2$ i $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Volem veure per a quins valors $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ i, després, $Hf(x,y,z)$ serà diagonal i l'avaluarem en cadascun dels punts en què tenim conflicte.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^2 + 6x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6y^2 + 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z = 0. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Obtenim que els punts en qüestió són: $(1,0,0), (0,0,0), (0,-1,0), (1,-1,0)$. Hauríem de calcular la matriu Hessiana de cadascun, però solament ho farem per al primer cas; la resta, els deixarem com a exercici per al lector.

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x-6 & 0 & 0 \\ 0 & 12y+6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies Hf(1,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4.3.7}$$

que és definida positiva.

Exercici 4.3.9. *Calculeu el polinomi de Taylor d'ordre 2 de la funció $f(x,y) = \cos(x^2+y)$ a l'entorn del punt $p = (0,0)$. Expresseu el polinomi $p(x,y) = -4 + 5x + 4y - 4xy - y^2 + xy^2$ com a combinació de potències de $(x-1)$ i $(y-2)$.*

Demostració. Hem d'aplicar la fórmula ja coneguda, (4.2.14), i ens queda:

$$p_2(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2!}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2). \quad (4.3.8)$$

Hem de calcular $f_x, f_y, f_{xy}, f_{xx}, f_{yy}$ i avaluar-ho corresponentment al $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \sin(x^2+y)2x \quad & f_{xx}(x,y) &= -\cos(x^2+y)2x2x - \sin(x^2+y)2 \\ & & f_{xy}(x,y) &= -\cos(x^2+y)2x \\ f_y(x,y) &= -\sin(x^2+y) & f_{yy}(x,y) &= -\cos(x^2+y) \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

De manera que obtenim:

$$p_2(x,y) = 1 - \frac{1}{2}y^2. \quad (4.3.10)$$

Ara, resolem el segon apartat. Volem avaluar $p_3(x,y)$ al voltant del punt $p = (1,2)$:

$$\begin{aligned} p_3(x,y) = {} & p(1,2) + p_x(1,2)(x-1) + p_y(1,2)(y-1) \\ & + \frac{1}{2!}\left(p_{xx}(1,2)(x-1)^2 + 2p_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) + p_{yy}(1,2)(y-2)^2\right) \\ & + \frac{1}{3!}(p_{xxx}(1,2)(x-1)^3 + 3p_{xxy}(1,2)(x-1)^2(y-2) \\ & + 3p_{xyy}(1,2)(x-1)(y-2)^2 + p_{yyy}(1,2)(y-2)^3). \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Resolem les derivades parcials i ens queda:

$$p(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-2)^2. \quad (4.3.12)$$

I amb això ja hem acabat. ■

Exercici 4.3.10. *Calculeu el polinomi de Taylor d'ordre 4 de la funció* $f(x,y) = \sin(\pi x - y^2)$ *en el punt* $p = (1,0)$.

Demostració. Busquem un polinomi P de grau més petit o igual que 4 tal que

$$f(x,y) = P(x-1,y) + o_{(x,y)\to(1,0)}\left(\|(x-1,y)\|^4\right). \quad (4.3.13)$$

Quan el tinguem, per unicitat, P serà el polinomi de Taylor. Una opció sempre és escriure l'expressió general

$$\begin{aligned} P(x-1,y) = {} & f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)y \\ & + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(1,0)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,0)(x-1)y + f_{yy}(1,0)y^2\right] \\ & + \frac{1}{3!}\left[f_{xxx}(1,0)(x-1)^3 + 3f_{xxy}(1,0)(x-1)^2y + 3f_{xyy}(1,0)(x-1)y^2 + f_{yyy}(1,0)y^3\right] \\ & + \frac{1}{4!}\left[f_{xxxx}(1,0)(x-1)^4 + 4f_{xxxy}(1,0)(x-1)^3y + 6f_{xxyy}(1,0)(x-1)^2y^2 \right. \\ & \left. +4f_{xyyy}(1,0)(x-1)y^3 + f_{yyyy}(1,0)y^4\right] \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

i calcular les derivades. Una altra opció, més ràpida en aquest cas, és utilitzar el desenvolupament de $\sin t$ (en una variable) i la unicitat del polinomi de Taylor. Primer manipulem la funció per obtenir una expressió en termes de $x-1$ i y:

$$\sin\left(\pi x - y^2\right) = \sin\left(\pi(x-1) - y^2 + \pi\right) = -\sin\left(\pi(x-1) - y^2\right). \tag{4.3.15}$$

Ara fem el canvi $t = \pi(x-1) - y^2$ al desenvolupament de Taylor de $-\sin(t)$ a l'entorn de $t_0 = 0$. Per veure fins a quin ordre necessitem aquest desenvolupament, acotem $|t|$ per $C\|(x-1,y)\|^\delta$:

$$|t| = \left|\pi(x-1) - y^2\right| \leq \pi\|(x-1,y)\| + \|(x-1,y)\|^2 \leq (\pi+1)\|(x-1,y)\| \tag{4.3.16}$$

per (x,y) propers a $(1,0)$. Per tant, en tindrem prou amb el polinomi de Taylor de $-\sin(t)$ a 0 d'ordre 4:

$$-\sin(t) = -t + \frac{t^3}{3!} + o_{t\to 0}\left(|t|^4\right). \tag{4.3.17}$$

■

Exercici 4.3.11. *Escriviu $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy^2$ com a combinació de potències de $(x-1)$ i $(y-2)$.*

Demostració. Volem calcular $p_3(x,y)$ al voltant de $p = (1,2)$. Primer, calculem les derivades parcials avaluades en $p = (1,2)$:

$$\begin{array}{rr} f_x(x,y) = 2x + y^2 & f_{xx}(x,y) = 2 \\ f_y(x,y) = 2y + 2yx & f_{yy}(x,y) = 2 + 2x \\ & f_{xy}(x,y) = 2y \end{array} \tag{4.3.18}$$

■

Exercici 4.3.12. *Sigui $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ a un entorn del 0 i amb $f(0) = 0$. Definim la funció de dues variables $g(x,y) = \phi(ax+by)$. Demostreu que el polinomi de Taylor de g de grau q a l'entorn del punt $(0,0)$ és:*

$$P_q(x,y) = \sum_{m=0}^{q} \frac{\phi^{(m)}(0)}{m!} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (ax)^{m-j}(by)^j. \tag{4.3.19}$$

Demostració. Sabem que el polinomi de Taylor de grau q d'una funció composada amb una funció lineal és de la següent forma:

$$P_q(x,y) = \sum_{m=0}^{q} \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m g}{\partial x^{m-j}\partial y^j}(0,0) x^{m-j} y^j \tag{4.3.20}$$

Per la regla de la cadena cada vegada que derivem respecte x afegim una derivada a ϕ i multipliquem pel factor a i, de manera similar, cada vegada que derivem respecte y afegim una derivada a ϕ i multipliquem pel factor b. Ens queda:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \phi'(ax+by)a & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x} = a^2\phi''(ax+by) \\ & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = ab\phi''(ax+by) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \phi(ax+by)b & \end{array}\right\} \implies \frac{\partial^m g}{\partial x^{m-j}\partial y^j} = \phi^{(m)}(ax+by)a^{m-j}b^j. \tag{4.3.21}$$

Substituint a l'expressió del polinomi, ens queda:

$$p(x,y)=\sum_{m=0}^{q}\frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\phi^{(m)}(0)a^{m-j}b^{j}x^{m-j}y^{j}=\sum_{m=0}^{q}\frac{\phi^{(m)}(0)}{m!}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(ax)^{m-j}(by)^{j} \quad (4.3.22)$$

Per a aquest problema és útil imaginar el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \arrow[r, "L"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & ax+by \arrow[r, "\phi"] & \phi(ax+by)
\end{tikzcd}$$

Figura 4.1: Diagrama de funcions del problema

I amb això ja hem demostrat que les expressions coincideixen. ■

Exercici 4.3.13. *Sigui $f(x,y)=x^3+3x^2-15x-12y$. Calculeu els seus extrems relatius.*

Demostració. Determinem quan la primera derivada s'anul·la i mirem el signe de la segona (en aquest cas, haurem de mirar la matriu hessiana).

$$\begin{aligned} f_x(x,y)=3x^2+3y^2-15=0 &\xrightarrow{y=\frac{2}{x}} 3x^2+3\tfrac{4}{x^2}-15=0 \implies x=\pm 2,\pm 1. \\ f_y(x,y)=6xy-12=0 \iff xy=2 &\xrightarrow{x=0 \text{ no és solució}} y=\tfrac{2}{x} \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

D'aquesta manera, els quatre punts que en són solució són: $p_1=(2,1),p_2=(-2,-1),p_3=(1,2),p_4=(-1,-2)$. Com $f(x,y)\in\mathcal{C}^\infty$, $f_{xy}=f_{yx}$. La matriu hessiana és la següent:

$$H(x,y)=\begin{pmatrix}6x & 6y\\ 6y & 6x\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}$$
$$\implies\begin{cases} H(2,1)=6\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \implies \Delta_1=12,\Delta_2=12^2-36>0 \text{ (màxim)}\\ H(2,1)=6\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix} \implies \Delta_1=-12,\Delta_2=12^2-36>0 \text{ (mínim)}\\ H(1,2)=6\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \implies \Delta_2=36-12^2<0 \text{ (punt de sella)}\\ H(-1,-2)=6\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix} \implies \Delta_2<0 \text{ (punt de sella)}\end{cases} \quad (4.3.24)$$

■

Exercici 4.3.14. *Calculeu els extrems relatius de $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$. Sigui $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ funció. Per a cada vector $v\in\mathbb{R}^2$ es defineix la funció restringida $g_v(t)=f(tv)$. Demostreu que si f té un extrem relatiu a $(0,0)$, aleshores g_v té un extrem relatiu a o per a tot $v\neq 0$. Penseu si és cert el recíproc.*

Demostració. Volem aplicar un raonament anàleg al que fèiem per una variable: determinem quan la primera derivada s'anul·la i estudiem la segona. Mirem a quins punts les primeres derivades donen 0:

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y^2 \\ f_y = -4xy + 4y^3 - 5y^4 \end{cases} \tag{4.3.25}$$

La primera equació dóna $x = y^2$, i substituint a la segona tenim $y = 0$. Per tant l'únic punt crític és el $(0,0)$. Mirem la matriu de segones derivades per saber quina natura té aquest punt:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4y \\ -4y & -4x + 12y^2 - 20y^3 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.3.26}$$

Aquesta matriu no és definida positiva ni negativa (de fet és semidefinida positiva), per tant no podem decidir si $(0,0)$ és extrem o no. Per fer-ho apliquem directament la definició. Observem en primer lloc que $f(x,y) = (x - y^2)^2 - y^5$.

Per a veure que $(0,0)$ no és màxim és suficient trobar punts (x,y) arbitràriament propers a $(0,0)$ i tals que $f(x,y) > f(0,0)$. És clar que $f(x,0) = x^2 > 0 = f(0,0)$, i per tant $(0,0)$ no és màxim. Intentant $f(0,y)$ veiem que $f(0,y) = y^4 - y^5$, que canvia de signe quan ens apropem al 0.

Anàlogament, per a veure que $(0,0)$ no és mínim és suficient trobar punts (x,y) arbitràriament propers a $(0,0)$ i tals que $f(x,y) < f(0,0)$. És clar que $f(t^4, t^2) = -t^{10} < 0 = f(0,0)$ i, per tant, $(0,0)$ tampoc no és mínim.

Segon apartat: Si $(0,0)$ és un màxim de f existeix $r > 0$ tal que

$$f(x,y) \leq f(0,0) \text{ si } \|(x,y)\| < r. \tag{4.3.27}$$

En particular, $f(tv_1, tv_2) \leq f(0,0)$ si $\|(tv_1, tv_2)\| = |t|\|v\| < r$, és a dir $g_v(t) \leq g_t(0)$ si $|t| \leq r/\|v\|$, i per tant 0 és màxim de g_v. En cas que $(0,0)$ sigui mínim es fa anàlogament. El recíproc és fals. La funció $f(x,y) = x^2 - y^2$ restringida a rectes dóna

$$g_v(t) = t^2 \left(v_1^2 - v_2^2\right), \tag{4.3.28}$$

que té sempre un extrem relatiu a 0 (un màxim si $v_1^2 \geq v_2^2$ i un mínim en cas contrari). En canvi el punt $(0,0)$ és un punt de sella d'f. ■

Exercici 4.3.15. *Calculeu el polinomi de Taylor fins el terme d'ordre 2 de $f(x,y) = e^{y^2-x}$ al voltant del $(0,0)$.*

Demostració. Es veu clarament que haurem de fer un canvi de variable, $t = y^2 - x$. Com volem estudiar el comportament al voltant del zero, no cal modificar més l'expressió. L'expansió de Taylor de e^t quan $t \to 0$ és:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots \xrightarrow{\text{ordre 2}} e^{y^2-x} = 1 + y^2 - x + \frac{(y^2-x)^2}{2} + o(\|x,y\|^2). \tag{4.3.29}$$

Ens queda que $e^{y^2-x} = 1 + y^2 - x + \frac{x^2}{2} + o(\|x,y\|^2)$, menyspreant aquells termes que resulten d'ordre més gran que 2. ■

Exercici 4.3.16. *Calculeu:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2e^{y^2-x} - 2 - 2x - y^2 + 2y^3}{x^2+y^2}. \tag{4.3.30}$$

Demostració. Utilitzant l'exercici anterior, sabem que $e^{y^2-x} = 1 - x + y^2 + \frac{x^2}{2} + o(\|(x,y)\|^2)$. Substituint a l'expressió, ens queda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+2y^3+o(\|(x,y)\|^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 + \frac{2y^3}{x^2+y^2}. \tag{4.3.31}$$

Ens centrem en el límit quan $(x,y)\to(0,0)$ de $\frac{y^3}{x^2+y^2}$: fent límits iterats i per corbes veiem que el candidat a límit és zero. Apliquem el lema del Sandwich:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{1}{2} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\| = 0. \tag{4.3.32}$$

Per tant, el límit resultant és 1. ■

V

Funcions inversa i explícita

5.1 Funció inversa

Per tal que una aplicació lineal $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sigui invertible, cal que $n = m$ i $\det(L) \neq 0$. L'objectiu d'aquesta secció és mirar d'estendre aquest resultat a funcions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ no necessàriament lineals.

En primer lloc, podem observar que si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ són mútuament inverses l'una de l'altra, aleshores per definició $f \circ g = Id_m$ i $g \circ f = Id_n$. Si ara suposem que, a més, f és diferenciable a un punt a, i g és diferenciable al punt $b = f(a)$, aleshores la regla de la Cadena ens diu que

$$\begin{aligned} Df(a) \circ Dg(b) = D(f \circ g)(a) = Id_m \\ Dg(b) \circ Df(a) = D(g \circ f)(a) = Id_n \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

En altres paraules, les aplicacions lineals $Dg(b) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ són mútuament inverses. En conseqüència, tenim les condicions necessàries $m = n$ i $\det(Df(a)) = \frac{1}{\det(Dg(b))} \neq 0$. Per descomptat, això continua essent cert si f només està definida en un entorn de a.

Teorema 5.1.1 (Teorema de la funció inversa). *Sigui $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$, amb Ω obert. Sigui $a \in \Omega$ amb $\det(Df(a)) \neq 0$, és a dir:*

$$\det(Df(a)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{5.1.2}$$

Existeix $\mathcal{U} \subset \Omega$ obert amb $a \in \mathcal{U}$ tal que:

1. *$\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ és un obert.*
2. *$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ és bijectiva.*
3. *$f^{-1} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ és de classe $\mathcal{C}^k$.*

Demostració.

1. Hi ha un entorn d'a (una bola) on f és injectiva: siguin $a \in \Omega$ i $\varepsilon > 0$ tal que existeix $B(a, \varepsilon)$. Comprovem la condició d'injectivitat ($f(x) = f(y) \implies x = y$):

$$f(x) = f(y) \iff 0 = f_j(x) - f_j(y) = \nabla f_j(\xi)(x - y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\xi_j)(x_k - y_k) \tag{5.1.3}$$

Per tant, tenim un sistema d'n equacions amb n incògnites i de matriu:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi_1) & \cdots & \frac{\partial f_1}{x_n}(\xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\xi_n) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\xi_n) \end{pmatrix} \tag{5.1.4}$$

on $\xi_1, \dots, \xi_n$ són coordenades d'un punt intermig entre x i y. En concret, si ε és prou petit, $x, y \in B(a, \varepsilon)$ i el $\det(M) \neq 0$. Aleshores, $x_k - y_k = 0$ per a tot k. D'aquesta manera, $x = y$.

2. Sigui $\delta < \varepsilon$. Aleshores, $f|_{\overline{B(a,\delta)}}$ és injectiva i de classe $\mathcal{C}^k$. Considerem:

$$m = \min_{x \in B(a,\delta)} (\|f(x) - f(a)\|) > 0, \text{ tal que } \|x - a\| = \delta. \tag{5.1.5}$$

Amb tot, veurem que $B(f(a), \frac{m}{2}) \subset f(B(a, \delta))$. En efecte, sigui $y \in B(f(a), \frac{m}{2})$ un punt qualsevol. Aquest punt compleix, per definició, que $\|y - f(a)\| < \frac{m}{2}$. Volem veure que existeix $x \in \overline{B(a, \delta)}$ tal que $f(x) = y$; en altres paraules, volem veure que la funció $d : B(a, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ assoleix el valor 0 per a $d(x) = \|f(x) - y\|^2$. Pel teorema de Weierstrass, $d(x)$ assoleix un mínim $x_0 \in \overline{B(a, \delta)}$. Hem de distingir casos en funció d'aquest mínim:

1. Si $x_0 \notin \partial B(a, \delta)$, ens queda:

$$\|f(x_0) - y\| \geq \|f(x_0) - f(a)\| - \|f(a) - y\| > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} > \|f(a) - y\|. \tag{5.1.6}$$

2. En canvi, si $x_0 \in B(a, \delta)$, és un extrem relatiu. Si prenem tot $k = 1 \div n$:

$$0 = \frac{\partial d}{\partial x_k}(x_0) = \sum_{j=1}^{n} 2(f_j(x_0) - y_j) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) \implies f_j(x_0) - y_j = 0, \forall j \implies f(x_0) = y. \tag{5.1.7}$$

Com hem provat que és exhaustiva, ja hem acabat.

3. Definim $\mathcal{V} = B(f(a), \frac{m}{2})$ i, per tant, $\mathcal{U} = f^{-1}(B(f(a), \frac{m}{2}))$. La inversa $f^{-1} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ és de classe $\mathcal{C}^k$. Pel fet que $f^{-1}(f(x)) = x$ (és bijectiva), $Df^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1} = Id$ i $Df^{-1}(f(a))Df(a) = Id$.

■

Observació 5.1.2. L'enunciat anterior porta associades algunes particularitats:

- Es tracta d'un teorema d'existència; és a dir, es dona una condició suficient per a l'existència d'inversa, però no sabem qui és aquesta inversa: només sabem que existeix i té una certa regularitat.
- Es tracta d'un teorema local; és a dir, es garanteix que f és injectiva en un entorn $\mathcal{U}$ del punt a. Lluny de l'entorn $\mathcal{U}$ *no sabem què passa*. A més, tampoc sabem si $\mathcal{U}$ és gran o petit.
- Demanar que $Df(a)$ sigui un isomorfisme és equivalent a demanar que $\det(Df(a)) \neq 0$. Aquest determinant és precisament el determinant de la matriu jacobiana de f al punt a.

Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$, aleshores:

$$\det(Df(a)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}. \tag{5.1.8}$$

Aquest determinant s'anomena el *jacobià de f al punt a* i sovint es denota per:

$$J(a, f) = \det(Df(a)) = \det\left(\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right)(a), \tag{5.1.9}$$

amb la intenció de destacar les funcions que es deriven i en quines variables es deriven, en particular.

- El teorema garanteix que si f té jacobià no nul a un punt, aleshores f és una funció bijectiva a $\mathcal{U}$, i la seva inversa g és tal que $g \in \mathcal{C}^r(f(\mathcal{U}))$.

Exemple 5.1.3. Sigui $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) \longmapsto \psi(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$. Mirem a quins punts (x_0, y_0) hi ha una inversa local:

$$\det(D\psi(x, y)) = \begin{vmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{vmatrix} = e^x \neq 0. \tag{5.1.10}$$

Com $\det(D\psi(x_0, y_0)) \neq 0$, tenim que ψ té una inversa local a l'entorn de cada punt $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Aleshores, $\psi^{-1} : \mathcal{V}_a \longrightarrow \mathcal{U}_a$. En particular, $\psi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V}_a)$. Si $a = (0, 0)$, que té $\psi(0, 0) = (1, 0)$:

$$D\psi^{-1}(1, 0) = (D\psi(0, 0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = Id. \tag{5.1.11}$$

5.2

Funció implícita

Tal com acabem de veure, si $A \subset \mathbb{R}^n$ és un obert i $f : A \to \mathbb{R}^n$ és diferenciable amb jacobià no nul al punt $x = a$, aleshores f és invertible en un entorn de a i la inversa $g = f^{-1}$ és igual de bona que f. Equivalentment, a l'equació $f(x) - y = 0$ hem pogut aïllar x com una funció diferenciable de y. És a dir, existeix un entorn $V \subset \mathbb{R}^n$ de $f(a)$, i una funció $g : V \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, tal que

$$f(g(y)) - y = 0 \quad \text{per a tot } y \in V. \tag{5.2.1}$$

El que això diu és que si $F(x, y) = f(x) - y$ aleshores el conjunt de nivell $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : F(x, y) = 0\}$, que per construcció és la gràfica de f, també coincideix amb la gràfica de g, almenys en un entorn del punt $(x, y) = (a, f(a))$. Si escrivim l'equació $f(x) - y = 0$ en coordenades, ens adonarem que en el fons és un sistema de n incògnites i n equacions, no necessàriament lineals,

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{5.2.2}$$

que només admet solució x quan y cau dintre del recorregut de f. Quan això passa, tota solució x ve representada per n nombres reals $x_1, \dots, x_n$, que variaran si y varia. Per tant, podem escriure $x_i = g_i(y)$. Les funcions g_i no són altra cosa que les components de $f^{-1} = (g_1, \dots, g_n)$. En el fons, és un cas particular de

$$\begin{cases} F_1\left(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}\right) = 0 \\ \vdots \\ F_n\left(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}\right) = 0 \end{cases} \tag{5.2.3}$$

que també té n equacions, tot i que ara hi ha $n+p$ incògnites (abans teníem $p = n$). Moralment, això ens diu que hi ha p graus de llibertat, és a dir, sobren p variables. Això hauria de permetre aïllar, d'entre les $n+p$ variables existents, un total de n variables (que passarien a ser variables dependents), en funció de les p variables restants (que seguirien essent variables independents), cosa que donaria lloc a n funcions de p variables cadascuna; això és, una funció entre entorns de $\mathbb{R}^p$ i $\mathbb{R}^n$. Això és fàcilment visible en el cas que F sigui lineal i no degenerada.
El Teorema de la Funció Implícita té l'objectiu de dir sota quines condicions un sistema d'equacions no lineals permet aïllar unes variables en funció d'unes altres, i com de regular n'és la funció resultant. Equivalentment, volem representar en forma de gràfica un determinat conjunt de nivell d'una funció. Tal i com acabem de veure en el cas lineal, caldrà alguna hipòtesi que garanteixi que el sistema és *no degenerat.*

Teorema 5.2.1 (Teorema de la funció implícita). *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ obert, i sigui $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$. Sigui $(x^0, y^0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Si*

$$\det\left(\frac{\partial F_j}{\partial y_k}\right)_{\substack{j=1\div m\\k=1\div m}}(x^0,y^0) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x^0,y^0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(x^0,y^0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(x^0,y^0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x^0,y^0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x^0,y^0) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n}(x^0,y^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(x^0,y^0) & \frac{\partial F_n}{\partial y_2}(x^0,y^0) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x^0,y^0) \end{pmatrix}_{(x^0,y^0)} \neq 0, \tag{5.2.4}$$

aleshores existeixen W entorn de (x^0, y^0), $\mathcal{U}$ entorn de x^0 i $g_j : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tals que

$$\{(x,y) \in W \mid F(x,y) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathcal{U}\},\ g_j(x^0) = y_j,\ j = 1 \div m. \tag{5.2.5}$$

Estem dient que existeix un entorn $(x, g(x))$ tal que es correspon amb els punts de W que fan que $F(x,y) = 0$. Quan això passa, tenim m igualtats que defineixen implícitament les funcions $g_1, \dots, g_m$.

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, g_1(x), \dots, g_m(x)) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, g_1(x), \dots, g_m(x)) &= 0 \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Tenim que, a més, $g_j \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U}_a)$.

Idea de la demostració. Definim $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ tal que $H \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $H(x,y) = (x, F(x,y))$ i $H(a,b) = (a, 0)$. Comprovem que H té inversa a l'entorn de $(a, 0)$. Pel teorema de la funció inversa, hi ha una inversa local de classe $\mathcal{C}^k$ si

$$\det(DH(a,b)) = \left|\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{array}\right| \neq 0 \tag{5.2.7}$$

$$\left.\begin{array}{l} H(x,y) = (x_1,\dots,x_n,F_1(x,y),\dots,F_m(x,y)) \\ H_1(x,y) = x_1,\dots,H_n(x,y) = x_n \\ \tilde{H}_1(x,y) = F_1(x,y),\dots,\tilde{H}_m = F_m(x,y) \end{array}\right\} \text{ i } \left\{\begin{array}{l} H^{-1}(x,0) = (x,\tilde{H}^{-1}(x,0)) \\ y = \tilde{H}^{-1}(x,0) = g(x) \end{array}\right.$$

Existeixen $\mathcal{U}_{(a,b)}$ i $\mathcal{V}_{(a,b)}$ oberts de $\mathbb{R}^{n+m}$ tals que $H : \mathcal{U}_{(a,b)} \longrightarrow \mathcal{V}_{(a,0)}$ és un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^k$. Existeix, per a $(x,y) \in \mathcal{V}_{(a,0)}$:

$$H^{-1}(x,y) = (H_1^{-1}(x,y),\dots,H_n^{-1}(x,y),\tilde{H}_1^{-1}(x,y),\dots,\tilde{H}_m^{-1}(x,y)). \tag{5.2.8}$$

H i $\tilde{H}$ indiquen que H és per les n components d'$\mathbb{R}^n$ i $\tilde{H}$ és per les m components d'$\mathbb{R}^m$. Definim: $g(x) = (\tilde{H}_1^{-1}(x,0),\dots,\tilde{H}_m^{-1}(x,0)) = \tilde{H}^{-1}(x,0)$. Queda per demostrar que en aquest entorn $F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $F(x,y) = 0$ implica que $H(x,y) = (x,0)$ i $(x,y) = H^{-1}(x,0)$ i $y = \tilde{H}^{-1}(x,0) = g(x)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $F(x,g(x)) = F(x,\tilde{H}^{-1}(x,0)) = F(H^{-1}(x,0)) = 0$.

■

Observació 5.2.2.

- Es tracta d'un teorema d'existència local. Globalment no es pot dir res.
- La funció g rep el nom de *funció implícita*, i se'n sap l'existència i la regularitat, però no la seva forma explícita.
- L'aplicació $z \longmapsto (g(z),z) = G(0,z)$ definida per a $z \in C$ amb valors $A \cap \{F = 0\}$ és contínua i bijectiva a C.

Exemple 5.2.3. Sigui $F(x,y) = y - x^2$. F és de classe $\mathcal{C}^\infty$ a $\mathbb{R}^2$ (en particular, és diferenciable amb derivada contínua una vegada, és a dir, de classe $\mathcal{C}^1$). Donats $F(x,y) = 0$ i $F(1,1) = 0$, *podem posar y com a funció de x a l'entorn del punt $x = 1$?*

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial y_k}\right)(1,1) = \frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 1 \neq 0 \implies y = g(x)\ (= x^2). \tag{5.2.9}$$

En general, $g(x)$ queda definida per aquesta igualtat en un entorn del punt $x_0 = 1$: $F(x,g(x)) = 0$. *Podem posar x com a funció de y?* Podem posar $x = h(y)$ a l'entorn de $y_0 = 1$ de la següent manera:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = (-2x)_{(1,1)} \neq 0 \tag{5.2.10}$$

i F queda definida per la següent igualtat: $F(h(y), y) = 0$. En canvi, a l'entorn del $(0,0)$ no tenim un determinant nul, i no podem garantir que la regularitat de la funció es mantingui.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = (-2x)_{(0,0)} = 0. \tag{5.2.11}$$

Exemple 5.2.4. Sigui el sistema següent:

$$\begin{aligned} F_1(x,y,u,v) &= xu^6 + y^2v^3 + 1 = 0 \\ F_2(x,y,u,v) &= xy^3 + uv^2 = 0 \\ F(0,1,0,-1) &= 0 \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Aquestes equacions defineixen $u = g_1(x,y), v = g_2(x,y)$, amb $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^\infty$ (les funcions F_1, F_2 també ho són, és una aplicació del teorema de la funció inversa) a un entorn (x,y) de $(0,1)$. Avaluem el determinant de la matriu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6xu^5 & 3y^2v^2 \\ v^2 & 2uv \end{vmatrix}_{(0,1,0,-1)} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \tag{5.2.13}$$

Què sabem de $g_1(x,y), g_2(x,y)$? Sabem que $g_1(0,1) = 0$ i $g_2(0,1) = -1$ (són les igualtats $u = g_1(x,y), v = g_2(x,y)$ en el punt en concret). A més, a un entorn $\mathcal{U}$ del punt $(0,1)$ val:

$$\left.\begin{aligned} x(g_1(x,y))^6 + y^2(g_2(x,y))^3 + 1 = 0 \\ xy^3 + g_1(x,y)(g_2(x,y))^2 = 0 \end{aligned}\right\}, \ (x,y) \in \mathcal{U}. \tag{5.2.14}$$

Tot i que no podem conèixer les expressions explícites de g_1, g_2, es tenen moltes aplicacions. Una d'aquestes és el càlcul del polinomi de Taylor. Per exemple, calculem el polinomi de Taylor d'ordre 2 en aquest punt:

$$\begin{aligned} p_1(x,y) = {} & g_1(0,1) + \frac{\partial g_1}{\partial x}(0,1)x + \frac{\partial g_1}{\partial y}(0,1)(y-1) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}(0,1)x^2 + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial y}(0,1)x(y-1) + \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2}(0,1)(y-1)^2\right) \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Si volguéssim trobar aquesta expressió, ho podríem fer calculant totes les derivades parcials. Per simplicitat, derivarem una sola vegada sobre x per a obtenir $\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,1)$ i $\frac{\partial g_2}{\partial x}(0,1)$. La resta de termes es deixen com a exercici.

$$\begin{aligned} (g_1(x,y))^6 + 6x(g_1(x,y))^5\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)\right) + 3y^2(g_2(x,y))^2\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)\right) &= 0. \\ y^3 + \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)(g_2(x,y))^2 + 2g_1(x,y)g_2(x,y)\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)\right) &= 0. \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Una vegada calculades les expressions, substituïm els valors d'x, y i recordem $g_1(0,1) = 0$ i $g_2(0,1) = -1$:

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)\right) = 0 &\iff \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = 0. \\ 1 + \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = 0 &\iff \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = -1. \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Exemple 5.2.5. L'equació

$$x^2y + xy^2 + \sin(xy) + e^y - 1 + 2y + 2x = 0 \tag{5.2.18}$$

se satisfà al punt $(0,0)$. D'altra banda, la funció definidora $F(x,y) = x^2y + xy^2 + \sin(xy) + e^y - 1 + 2y + 2x$ satisfà

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy + x\cos(xy) + e^y + 2, \tag{5.2.19}$$

i en particular $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 3 \neq 0$. Pel Teorema de la Funció Implícita, en aquesta equació podem aïllar y en funció de x, en un entorn de $x = 0$, i obtenir una funció $y = g(x)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ en aquest entorn, tal que $g(0) = 0$. La forma explícita de g és desconeguda, i només sabem que existeix. Però li podem trobar la derivada al 0, tot derivant l'equació definidora implícitament respecte de x. Per a fer-ho, abusarem de la notació i identificarem $g(x) = y(x)$, de manera que també $y' = g'$. Per a tot x en l'entorn de definició de g tenim

$$2xy + x^2y' + y^2 + x2yy' + \cos(xy)\,(y + xy') + e^y y' + 2y' + 2 = 0, \tag{5.2.20}$$

en particular, si $x = 0$, llavors $y(0) = g(0) = 0$ i, per tant:

$$0 + 0 + 0 + 0 + \cos(0)(0+0) + e^0y'(0) + 2y'(0) + 2 = 0, \tag{5.2.21}$$

d'on $'(0) = -\frac{2}{3}$. Si tornem a derivar, podem obtenir $g''(0)$. En efecte,

$$\begin{aligned} 2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' + 2yy' + 2yy' + x2y'y' + x2yy'' - \sin(xy)\,(y + xy')^2 + \\ + \cos(xy)\,(y' + y' + xy'') + e^y y'y' + e^y y'' + 2y'' = 0, \end{aligned} \tag{5.2.22}$$

i si ara prenem $x = 0$ i recordem que $y(0) = 0, y'(0) = -\frac{2}{3}$, obtenim

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - \sin(0)(0+0)^2 + \\ + \cos(0)\,(y'(0) + y'(0) + 0) + e^0y'(0)^2 + e^0y''(0) + 2y''(0) = 0, \end{aligned} \tag{5.2.23}$$

d'on $2y'(0) + y'(0)^2 + 3y''(0) = 0$ i, per tant, $y''(0) = \frac{8}{27}$. Això ens permet trobar una aproximació de g fins al segon ordre, a través dels polinomis de Taylor quan $x \to 0$,

$$g(x) = -\frac{2x}{3} + \frac{4x^2}{27} + o(|x|^2), \tag{5.2.24}$$

fet que seria impossible d'obtenir intentant aïllar y explícitament en l'equació. Naturalment, es poden obtenir termes d'ordre superior derivant implícitament de manera successiva.

Exemple 5.2.6. A $\mathbb{R}^2$, l'equació $x^2 + y^2 = 1$ permet aïllar y com a funció de x en un entorn del punt $A = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. En efecte, la funció definidora $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ satisfà $F(A) = 0$ i $\frac{\partial F}{\partial y}(A) \neq 0$. De fet, en aquest cas tenim explícitament $y = g_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ per tot x en un entorn de $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. En un entorn del punt $B = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ es pot aplicar el mateix argument i obtenim una funció diferent $y = g_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. El teorema de la funció implícita garanteix que g_1, g_2 són de classe $\mathcal{C}^\infty$ a un entorn del punt $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Es pot dir, doncs, que F defineix en un entorn de $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ no només una, sinó dues funcions implícites.

Exercici 5.2.7. *Demostreu que l'equació $e^{x+y} + y - x = 0$ determina y com a funció de x en un entorn del punt $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Trobeu les derivades primera i segona de la funció implícita $\varphi(x)$ al punt $\frac{1}{2}$ i mireu si aquest punt és un extrem.*

Demostració. Sigui $F(x, y) = e^{x+y} + y - x$, que és de classe $\mathcal{C}^\infty$ a tot $\mathbb{R}^2$. Pel teorema de la funció implícita és suficient veure que $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \neq 0$. Tenim

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} + 1, \tag{5.2.25}$$

i per tant efectivament $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = 2 \neq 0$. Tenim doncs $y = \varphi(x)$, amb $\varphi(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, definida per la igualtat

$$e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - x = 0. \tag{5.2.26}$$

Derivant,

$$e^{x+\varphi(x)} (1 + \varphi'(x)) + \varphi'(x) - 1 = 0, \tag{5.2.27}$$

i per tant $\varphi'(\frac{1}{2}) = 0$. Tornant a derivar

$$e^{x+\varphi(x)} (1 + \varphi'(x))^2 + e^{x+\varphi(x)}\varphi''(x) + \varphi''(x) = 0, \tag{5.2.28}$$

i així $\varphi''(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$. ■

Exercici 5.2.8. *2. Sigui l'equació $x^2 + y^2 + z^2 = f(ax + by + cz)$ a $\mathbb{R}^3$, on $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. Suposant que $c \neq 0$:*

1. *Proveu que la igualtat anterior defineix z com a funció de x i y en un entorn de $(0, 0, 0)$.*
2. *Sigui $z = z(x, y)$ donada per l'apartat anterior. Proveu que el vector $(c, c, -(a + b))$ és tangent a la gràfica de z al punt $(0, 0, 0)$.*
3. *Preneu $a = 0, b = 0, c = 1$ i $f(t) = e^t - 1$. Trobeu el desenvolupament de Taylor fins a l'ordre 2 de la funció $z = z(x, y)$ corresponent.*

Demostració. Com que totes les funcions són de classe $\mathcal{C}^1$, el teorema de la funció implícita assegura que és suficient demostrar que $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) \neq 0$, essent

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - f(ax + by + cz). \tag{5.2.29}$$

Tenim

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z - f'(ax + by + cz)c, \tag{5.2.30}$$

i per tant

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) = 0 - f'(0)c = -c \neq 0. \tag{5.2.31}$$

El pla tangent a la gràfica de $z = z(x, y)$ al punt $(0, 0)$ té la forma

$$z = z(0, 0) + \nabla z(0, 0) \cdot (x - 0, y - 0) = z(0, 0) + z_x(0, 0)x + z_y(0, 0)y \tag{5.2.32}$$

Derivant l'equació $F(x,y,z(x,y)) = x^2 + y^2 + z^2(x,y) - f(ax+by+cz(x,y)) = 0$ tenim:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2z(x,y)z_x(x,y) - f'(ax+by+cz(x,y))\,(a+cz_x(x,y)) = 0 \\ 2y + 2z(x,y)z_y(x,y) - f'(ax+by+cz(x,y))\,(b+cz_y(x,y)) = 0 \end{array} \right. \tag{5.2.33}$$

Com que $z(0,0) = 0$ (ja que $F(0,0,0) = 0$), substituint obtenim

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 + 0 - f'(0)\,(a + cz_x(0,0)) = 0 \\ 0 + 0 - f'(0)\,(b + cz_y(0,0)) = 0 \end{array} \right. \tag{5.2.34}$$

i, per tant, $z_x(0,0) = -\frac{a}{c}$, $z_y(0,0) = -\frac{b}{c}$. Amb això podem agafar un vector d'aquest pla amb $x = y = c$ i obtenim que

$$\vec{v} = \left(c, c, -\frac{a}{c}c - \frac{b}{c}c \right) = (c, c, -a-b) \tag{5.2.35}$$

és tangent a la gràfica de z en un entorn del punt $(0,0,0)$. El polinomi de Taylor demanat té la forma

$$p_2(x,y) = z(0,0) + z_x(0,0)x + z_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left[z_{xx}(0,0)x^2 + 2z_{xy}(0,0)xy + z_{yy}(0,0)y^2\right] \tag{5.2.36}$$

on la funció $z(x,y)$ està definida per la igualtat

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2(x,y) - e^{z(x,y)} + 1 = 0 \tag{5.2.37}$$

Tenim $z(0,0) = 0$ i

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2z(x,y)z_x(x,y) - e^{z(x,y)}z_x(x,y) = 0 \\ 2y + 2z(x,y)z_y(x,y) - e^{z(x,y)}z_y(x,y) = 0 \end{array} \right. \tag{5.2.38}$$

d'on veiem, com abans, que $z_x(0,0) = 0$, $z_y(0,0) = 0$. Derivant un cop més tenim

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 2\left(z_x(x,y)\right)^2 + 2z(x,y)z_{xx}(x,y) - e^{z(x,y)}\left(z_x(x,y)\right)^2 + e^{z(x,y)}z_{xx}(x,y) = 0 \\ 2z_y(x,y)z_x(x,y) + 2z(x,y)z_{xy}(x,y) - e^{z(x,y)}z_x(x,y)z_y(x,y) - e^{z(x,y)}z_{xy}(x,y) = 0 \\ 2 + 2\left(z_y(x,y)\right)^2 + 2z(x,y)z_{yy}(x,y) - e^{z(x,y)}\left(z_y(x,y)\right)^2 + e^{z(x,y)}z_{yy}(x,y) = 0 \end{array} \right. \tag{5.2.39}$$

d'on veiem que

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 0 + 0 - e^0 0 + e^0 z_{xx}(0,0) = 0 \\ 0 + 0 - e^0 0 - e^0 z_{xy}(0,0) = 0 \\ 2 + 0 + 0 - e^0 0 + e^0 z_{yy}(0,0) = 0 \end{array} \right. \tag{5.2.40}$$

i per tant

$$z_{xx}(0,0) = z_{yy}(0,0) = -2, \quad z_{xy}(0,0) = 0. \tag{5.2.41}$$

En definitiva:

$$p_2(x,y) = 0 + 0x + 0y + \frac{1}{2}\left[(-2)x^2 + 0xy + (-2)y^2\right] = -\left(x^2 + y^2\right) \tag{5.2.42}$$

■

VI

Extrems condicionats

En el moment de buscar extrems de funcions d'una variable, cal disposar de la funció en qüestió i el domini on aquesta ha de ser optimitzada. Per garantir l'existència d'extrems, n'hi ha prou amb què aquest domini sigui un interval tancat i fitat. Quan això passa, els seus extrems o bé són locals (i per tant són punts de tangent horitzontal, si la funció és prou regular) o bé cauen a la frontera de l'interval (que és un conjunt finit). Quan la funció té diverses variables, però, la situació és sensiblement diferent. El motiu és que sovint les funcions han de ser optimitzades sobre conjunts compactes que tenen interior buit i no són finits. Per exemple, els extrems d'una funció sobre una bola tancada, quan cauen a la bola oberta es localitzen mitjançant la condició de ser punts estacionaris, però quan cauen a l'esfera localitzar-los pot ser molt complicat si no es disposa de les eines adients. Aquest capítol té per objectiu donar aquestes eines.

6.1 Varietats diferenciables a $\mathbb{R}^n$

Definició 6.1.1 (Subvarietat diferenciable)**.** Diem que $M \subset \mathbb{R}^n$ és una subvarietat diferenciable de classe $\mathcal{C}^k$ i dimensió m (els graus de llibertat que queden després d'imposar una sèrie de condicions) si per a cada $p \in M$ existeix un entorn de p, $\mathcal{U}$, i existeixen $n-m$ funcions (el nombre de condicions que hem fixat) $g_1, \dots, g_{n-m} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, g_j \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U}_p)$ tals que

$$M \cap \mathcal{U}_p = \{x \in \mathcal{U}_p \bigm| g_1(x) = \cdots = g_{n-m}(x) = 0\}, \tag{6.1.1}$$

i les funcions $g_1, \dots, g_m$ són *diferents*: $\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_{n-m}(p)$ són vectors linealment independents.

Observació 6.1.2. $M \cap \mathcal{U}_p$ és dins de conjunts de nivell de les funcions g_j, $\nabla g_i(p)$, són perpendicular a les corbes de nivell. Més endavant veurem que podem pensar una subvarietat diferenciable de dimensió k com un obert *localment* de $\mathbb{R}^m$.

Definició 6.1.3 (Espai normal i espai tangent)**.** Diem espai normal a M al punt p a l'espai generat per tots els vectors gradient, que són perpendiculars a la corba en el punt p. El denotem per:

$$N_p(M) = \langle \nabla g_1(p), \dots, g_{n-m}(p)\rangle,\ \dim(N_p(M)) = n-m. \tag{6.1.2}$$

Diem espai tangent a M en el punt p a:

$$T_p(M) = \langle \nabla g_1(p), \dots, \nabla g_{n-m}(p)\rangle^{\perp},\ \dim(T_p(M)) = m. \tag{6.1.3}$$

Teorema 6.1.4. *Sigui M una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^n$ de dimensió m i de classe $\mathcal{C}^k$. Per a cada punt $p \in M$ existeix un entorn de p $\mathcal{U}_p$, un obert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^m$ i $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}^k(\mathcal{V})$ amb diferencials de rang m tals que estableixen un homeomorfisme en $\mathcal{U}_p \cap M$.*

Demostració. Sabem que en un entorn de p els punts d'M són els zeros de $n-m$ funcions $f_{m+1},\dots,f_n$ de classe $\mathcal{C}^k$ amb diferencials linealment independents. Suposem, per exemple, que

$$\frac{\partial(f_{m+1},\dots,f_n)}{\partial(x_{m+1},\dots,x_n)}(p)\neq 0. \tag{6.1.4}$$

Pel teorema de la funció implícita, existeixen entorns $\mathcal{U}$ de $p=(p_1,\dots,p_n)$ en $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{V}$ de $(p_1,\dots,p_m)$ en $\mathbb{R}^m$ i funcions $g_{m+1},\dots,g_n\in\mathcal{C}^k(\mathcal{V})$ tals que l'aplicació de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{U}\cap M$ que assigna a $(x_1,\dots,x_k)$ el punt $(x_1,\dots,x_m,g_{m+1}(x_1,\dots,x_m),\dots,g_n(x_1,\dots,x_m))$ és un homeomorfisme. Les funcions que estableixen el teorema són, doncs, $g_i(x_1,\dots,x_m)=x_i$ per a $i=1\div m$ juntament amb les ja definides $g_{m+1},\dots,g_n$. Clarament, les seves diferencials són de rang m, ja que les diferencials de les primeres m funcions coincideixen amb elles mateixes i són, òbviament, independents. ■

Definició 6.1.5 (Parametrització). Sigui M una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^n$ de dimensió m i de classe $\mathcal{C}^k$. Donat un entorn $\mathcal{U}_p$ de p els punts de $M\cap\mathcal{U}_p$ són els zeros d'una funció $F:\mathcal{U}_p\longrightarrow\mathbb{R}^{n-m}$ de classe $\mathcal{C}^k(\mathcal{U}_p)$ amb DF de rang $n-m$ a tot punt d'$\mathcal{U}_p$. Si per les derivades parcials $\frac{\partial}{\partial x_{m+1}},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ tenim $\det(\frac{\partial(F_1,\dots,F_{n-m})}{\partial(x_{m+1},\dots,x_n)})\neq 0$, aleshores hem trobat una *parametrització* $G=(Id_m,g)$ on $Id_m:\mathcal{U}_p\to\mathcal{U}_p$ és la identitat, i g és la funció resultant d'aplicar el teorema de la funció implícita. En particular, G^{-1} és la projecció en les coordenades $x_1,\dots,x_m$.

Observació 6.1.6. El teorema ens assegura l'existència local d'una parametrització de la varietat. Si en $\mathcal{U}\cap M$ existeix una parametrització, cadascun dels seus punts queda determinat pel seu corresponent element en el conjunt de paràmetres $\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^m$. És per aquesta raó que és natural anomenar *sistema de coordenades* a la correspondència que associa a cada element d'$\mathcal{U}_p\cap M$ el seu punt en el conjunt dels paràmetres.

Observació 6.1.7. La condició $\nabla g_1(p),\dots,\nabla g_{n-m}(p)$ ens diu que:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(p)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_n}(p)\end{pmatrix}=n-m. \tag{6.1.5}$$

Per tant, tenim un menor $n-m$ diferent de zero. Per alleugerir la notació, suposarem que aquest menor és el primer, tot i que podria ser qualsevol altre.

$$\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-m}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{n-m}}{\partial x_{n-m}}\end{vmatrix}\right|_p\neq 0. \tag{6.1.6}$$

Pel teorema de la funció implícita, $x_1,\dots,x_{n-m}$ es poden posar com a funció de les restants, $x_{n-m+1},\dots,x_n$; és a dir, que existeixen funcions $h_1,\dots,h_{n-m}$ en un subentorn de $\mathcal{U}_p$, $\mathcal{V}_p$, tal que $\mathcal{V}_p\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tals que:

$$\begin{aligned}x_1&=h_1(x_{n-m+1},\dots,x_n),\\ &\vdots\\ x_{n-m}&=h_{n-m}(x_{n-m+1},\dots,x_n).\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

Exemple 6.1.8.

1. Sigui $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ l'esfera de centre $(0, 0, 0)$ i radi 1. Posem posar $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. En efecte, $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq 0$ sempre que $(x, y, z) \in \mathbb{S}$. Clarament, $\mathbb{S}$ és una subvarietat diferenciable. En concret, suposem $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}$ tal que
$$\frac{\partial g}{\partial z}(p) = 2z_0 \neq 0,\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = h(x, y). \tag{6.1.8}$$
Aleshores, $\exists \mathcal{U}_p$ tal que $z = h(x, y)$ i
$$M \cap \mathcal{U}_p = \{(x, y, z) \in \mathcal{U}_p \mid (x, y, h(x, y))\}. \tag{6.1.9}$$

2. Sigui $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 0\}$. Podem escriure dues funcions, g_1, g_2 amb els seus respectius gradients:
$$\left.\begin{array}{r} g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ g_2(x, y, z) = x + y + z = 0 \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{c} \nabla_{g_1} = (2x, 2y, 0) \\ \nabla_{g_2} = (1, 1, 1) \end{array}\right\} \tag{6.1.10}$$
Ara, en calculem el rang i calculem el determinant de la matriu de derivades parcials respecte y, z (les variables lliures) en el punt $(x_0, y_0, z_0) \in C$, tal que $y_0 \neq 0$.
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \text{ i } \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0 \tag{6.1.11}$$
Pel teorema de la funció implícita, podem posar y, z com expressions implícites; és a dir, $y = h_1(x), z = h_2(x)$ i $\mathcal{U}_p$ un entorn de p
$$C \cap \mathcal{U}_p = \{(x, y, z) \in \mathcal{U}_p \mid y = h_1(x), z = h_2(x)\} = \{(x, h_1(x), h_2(x)) \in \mathcal{U}_p\}. \tag{6.1.12}$$
En altres paraules, estem fent una *parametrització de la corba.*

Teorema 6.1.9. *Sigui A un obert de $\mathbb{R}^m$ i siguin $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{C}^k(A)$ amb diferencials de rang m. Per a cada punt $a \in A$ existeix un entorn $\mathcal{U} \subset A$ tal que $g = (g_1, \ldots, g_n)$ sobre $\mathcal{U}$ és un homeomorfisme amb la seva imatge $g(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$. Aquesta és una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^n$ de dimensió m.*

Teorema 6.1.10. *Sigui M una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^n$, de dimensió m i classe $\mathcal{C}^k$. Suposem que existeix un obert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $M \cap U = \{x \in \mathcal{U} \mid F(x) = 0\}$ per alguna funció $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $\mathbb{C}^r(U)$, i que DF té rang $n - k$ a tot punt de U. Aleshores, $T_p(M) = \ker(DF(p))$ per tot punt $p \in U$.*

6.2 El mètode de multiplicadors de Lagrange

Donada una funció escalar f, definida en un obert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ a valors a $\mathbb{R}$, i una subvarietat diferenciable $M \subset U$ de classe $\mathbb{C}^k$ i dimensió $m < n$, s'anomena extrem de f condicionat per M a tot punt $p \in M$ tal que la restricció de f a M té, en el punt p, un extrem local.

Tot sovint ens trobarem que f no està definida només als punts de M, sinó que en realitat $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, però només ens interessa optimitzar els valors que pugui prendre f sobre M. Quan això passa, convé tenir present que $M \subset \mathbb{R}^n$ és una varietat diferenciable de dimensió $m < n$, i per tant M és localment homeomorfa a un obert de $\mathbb{R}^m$. En particular, M té interior buit (per la topologia de $\mathbb{R}^n$) i per tant els extrems relatius de f condicionats per M podrien caure en punts no necessàriament estacionaris. Dit d'una altra manera, si p és un màxim local de f a M, la desigualtat $f(x) \leq f(p)$ se satisfà a tots els punts x d'algun entorn $B(p, \varepsilon) \cap M$, però podria no satisfer-se als punts de $B(p, \varepsilon) \setminus M$.
Heurísticament, tota varietat diferenciable $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensió m admet una parametrització $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Així, els extrems relatius que una funció $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ pugui tenir sobre M poden trobar-se amb l'ajut de la composició

$$f \circ \varphi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{6.2.1}$$

i l'ús de la teoria d'extrems locals de funcions diferenciables. Aquest procediment és factible quan es coneix explícitament alguna manera de parametritzar M. A la pràctica, però, trobar parametritzacions no sempre és fàcil i sovint només es coneix M a través d'un sistema d'equacions no lineals. És en aquest context quan el següent teorema de Lagrange resulta útil.

Teorema 6.2.1 (Mètode de multiplicadors de Lagrange). *Sigui $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvarietat diferenciable de classe $\mathcal{C}^k$ i dimensió m. És a dir, definim $p \in M$, $\mathcal{U}_p$ entorn de p, $g_j \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U}_p)$ i $j = 1 \div n - m$ tals que:*

$$M \cap \mathcal{U}_p = \{x \in \mathcal{U}_p \mid g_1(x) = \cdots = g_{n-m}(x) = 0\}. \tag{6.2.2}$$

Sigui ara $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ on Ω és un obert que conté M. Els extrems de f restringida a $M \cap \mathcal{U}_p$ es troben entre els punts $x \in \mathcal{U}_p \cap M$ tals que $\nabla f(x) \in \langle \nabla g_1(x), \ldots, \nabla g_{n-m}(x) \rangle$. És a dir, $\nabla f(x)$ és combinació lineal de $\nabla g_i(x)$, existeixen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ tals que:

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \cdots + \lambda_{n-m} \nabla g_{n-m}(x). \tag{6.2.3}$$

Diem que $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m}$ són els multiplicadors de Lagrange.

Observació 6.2.2 (Cas particular, $n - m = 1$). En aquest cas, es dona que $M \cap \mathcal{U}_p = \{x \in \mathcal{U}_p \mid g(x) = 0\}$. Aleshores, $x \in M \cap \mathcal{U}_p$ és un entorn de $f|_{M \cap \mathcal{U}_p}$ i $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$.

Idea de la demostració. Si agafem $M = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ i el conjunt de corbes de nivell $E_C = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$. Sabem que el vector perpendicular a la corba de nivell en un punt és el gradient de ∇f en aquell punt. En M, el vector perpendicular en un punt és, per definició, ∇g. Aleshores, si els vectors són tangents en algun punt, tenim $\nabla f = \lambda \nabla g$. ∎

Exemple 6.2.3. Volem trobar els extrems de $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ restringida a l'esfera $\mathbb{S} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ compacte. Com que també tenim $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $f : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ té màxim i mínim absoluts. A partir de la igualtat descrita per l'expressió d'$\mathbb{S}$, podem definir $g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1$. Pel teorema 6.2.1, els extrems els hem de trobar entre els punts que compleixen:

1. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.
2. Existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ amb $\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \nabla g(x_1, \ldots, x_n)$.

Per tant:

$$\begin{cases} x_2 \cdots x_n = \lambda 2x_1 \\ x_1 \cdot x_3 \cdots x_n = \lambda 2x_2 \\ \vdots \\ x_1 \cdots x_{n-1} = \lambda 2x_n \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 x_2 \cdots x_n = \lambda 2x_1^2 \\ x_1 x_2 \cdot x_3 \cdots x_n = \lambda 2x_2^2 \\ \vdots \\ x_1 \cdots x_{n-1} x_n = \lambda 2x_n^2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2\lambda x_1^2 = \cdots = 2\lambda x_n^2 \\ x_1^2 = \cdots = x_n^2 = \frac{1}{n} \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \\ nx_1^2 = 1 \implies x_1^2 = \frac{1}{n}. \end{cases} \tag{6.2.4}$$

Així, els candidats són: $(\pm\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \pm\frac{1}{\sqrt{n}})$. Avaluem per decidir si són màxims o mínims:

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \pm\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n. \tag{6.2.5}$$

Serà positiu si hi ha un nombre parell de coordenades $-\frac{1}{\sqrt{n}}$, i serà negatiu si hi ha un nombre senar de coordenades $-\frac{1}{\sqrt{n}}$. En altres paraules, el signe depèn de la paritat de n i els signes de les coordenades.

6.3 Exercicis finals

Exercici 6.3.1. *Sigui $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$ i $A = \{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 5, y - x \geq 0, y \geq x\}$. Determina els extrems absoluts de la funció en aquest conjunt.*

Demostració. Aquesta funció té extrems absoluts perquè la funció és contínua i el conjunt que tenim és acotat i tancat (és a dir, és un compacte). Pel teorema de Weierstrass, existeixen màxim i mínim absoluts. Hem de fer una sèrie de passos per resoldre aquests tipus de problemes:

1. **Extrems a l'interior**: Mirem els punts crítics de la funció (derivem i igualem a zero per cada una de les coordenades).

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2xy^2 = 0 \iff 2x(1-y^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x^2y = 0 \iff 2y(1-x^2) = 0 \end{array}\right\} \implies \begin{array}{r} P_1 = (0,0), P_2 = (1,1), P_3 = (-1,1), \\ P_4 = (1,-1), P_5 = (-1,-1) \end{array} \tag{6.3.1}$$

   Descartem $(1,-1)$ perquè no pertany a A.

2. **Extrems a la frontera**: Com ja fèiem a la primera part, dividim la frontera en dos conjunts:
   - $y = x$: $f(x,y) = 2x^2 - x^4 = h(x)$. Derivant, $h'(x) = 4x - 4x^3 = 4(1-x^2)$ i tornem a parar a les equacions que ja hem vist abans, de manera que no obtenim cap punt que ens suposi una novetat.
   - $x^2 + 4y^2 = 5$. Aquí farem servir els multiplicadors de Lagrange, amb $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 5$. *Es deixa com a exercici.*
3. Agafar els punts d'intersecció entre les dos trossos de vora.

En definitiva, obtenim els punts $P_1, \ldots, P_5$ i els que trobem amb els multiplicadors de Lagrange, en cas que no es repeteixin amb els anteriors. ■

Exercici 6.3.2. *Sigui $f(x,y) = x^3+y^3+9xy+27$, amb T el triangle de vèrtexs $(-3,3),(-3,-3),(3,-3)$. Troba els extrems absoluts d'aquesta funció en T.*

Demostració. T és un triangle compacte i f és contínua. Pel teorema de Weierstrass, existeixen extrems absoluts de f a T.

1. *Extrems a l'interior de T.* Les derivades respecte x i y són: $f_x = 3x^2 + 9y = 0$ i $f_y = 3y^2 + 9x = 0$. Obtenim que els punts crítics són $(0,0),(-3,-3)$, els quals pertanyen a la frontera de T i no pas a l'interior. Els tindrem en compte més endavant.
2. *Extrems a la frontera de T.* Dividim la frontera en tres trossos, $\partial T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ que definirem de la forma següent:
   - $T_1 = \{(x,-3), x \in [-3,3]\}$. Restringim la funció a T_1 i ens queda:
   $$\begin{aligned} f|_{T_1} = f(x,-3) = x^3 - 27 - 27x + 27 = x^3 - 27x \implies f'|_{T_1} = 3x^2 - 27 = 0 \\ \iff (x,y) = (-3,-3),(3,-3). \end{aligned} \tag{6.3.2}$$
   - $T_2 = \{(x,y) \mid x \in [-3,3], y = -x\}$. Restringim la funció a T_2 i ens queda:
   $$f|_{T_2} = f(x,-x) = -9x + 27 \implies f'|_{T_1} = -18x = 0 \iff (x,y) = (0,0). \tag{6.3.3}$$
   - $T_3 = \{(-3,y) \mid y \in [-3,3]\}$. Restringim la funció a T_3 i ens queda:
   $$\begin{aligned} f|_{T_3} = f(-3,y) = y^3 - 27y \implies f'|_{T_1} = 3y^2 - 27 = 0 \\ \iff (x,y) = (-3,3),(-3,-3). \end{aligned} \tag{6.3.4}$$
3. Calculem les imatges en els punts que ens han sortit:
   $$\begin{aligned} f(-3,-3) &= 54 \\ f(3,-3) &= -54 \\ f(0,0) &= 27 \\ f(-3,3) &= -54 \end{aligned} \tag{6.3.5}$$
   $(-3,3)$ és un màxim absolut i $(3,-3),(-3,3)$ són mínims absoluts.

Nota: si els tres extrems del triangle no ens haguessin sortit amb els càlculs els hauríem d'afegir manualment. ■

Exercici 6.3.3. *Sigui $f(x,y) = x^3+y^3+9xy+27$, amb $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$. Troba els extrems absoluts d'aquesta funció en K.*

Demostració. Com f és contínua i K és compacte tenim, pel teorema de Weierstrass, que existeixen extrems absoluts de f sobre K. Per provar que K és compacte, cal saber que és tancat i acotat:

- K és acotat ja que K està contingut en $\mathbb{S}^1$.

- K és tancat perquè K és intersecció de dos tancats:

$$K = g_1^{-1}((-\infty, 0]) \cap g_2((-\infty, 1]) \text{ tancat, i } g_1(x, y) = y, g_2, (x, y) = x^2 + y^2, \tag{6.3.6}$$

  on els dos són tancats perquè tant g_1 com g_2 són funcions contínues.

Ara, fem un altre cop tres passos:

1. *Els extrems a* $\mathring{K}$ (els punts crítics de f). s'han de calcular a partir de la primera derivada:

$$\left.\begin{aligned} f_x = 2\pi x = 0 \\ f_y = 2y - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \iff P_1 = (0, 1) \in \partial K. \tag{6.3.7}$$

2. *Els extrems a* ∂K. Ho dividirem en dos trossos diferenciats.
   - El tros $K_1 = \{(x, 0) \mid x \in [-1, 1]\}$:

$$f|_{K_1} = h(x) = f(x, 0) = \pi x^2 + \pi^2. \tag{6.3.8}$$

     Busquem extrems amb la derivada $h'(x) = 2\pi x = 0 \iff x = 0$ i n'obtenim $P_1 = (0, 0)$. Afegim extrem de l'interval $x = \pm 1$, que són $P_2 = (-1, 0), P_3 = (1, 0)$.
   - El tros $K_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$:

$$f|_{K_1} = h(x) = f(x, 0) = \pi x^2 + \pi^2. \tag{6.3.9}$$

     Busquem extrems amb la derivada $h'(x) = 2\pi x = 0 \iff x = 0$ i n'obtenim $P_1 = (0, 0)$. Afegim extrem de l'interval $x = \pm 1$, que són $P_2 = (-1, 0), P_3 = (1, 0)$.
3. *Lagrange*: els extrems de f restringida als punts que verifiquen $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, i són els punts crítics de la funció $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$. Busquem-lo:

$$\begin{gathered} \begin{cases} F_x = f_x - \lambda g_x = 2\pi x - 2\lambda x = 0 \\ F_y = f_y - \lambda g_y = 2y - 2 - 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = -g(x, y) = -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x = 0 \\ (1 - \lambda) y = 1 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{o bé} \begin{cases} \lambda = \pi \\ y = \frac{1}{1 - \pi} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff P_4 = (0, 1) \end{gathered} \tag{6.3.10}$$

4. Avaluant, obtenim que:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= \pi^2 \\ f(-1, 0) &= \pi + \pi^2 \\ f(0, 0) &= \pi + \pi^2 \\ f(0, 1) &= \pi^2 - 1 \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

   I ens queda que P_2, P_3 són màxims absoluts i P_4 és un mínim absolut.

■

Exercici 6.3.4. *Trobeu els extrems absoluts de* $f(x, y, z) = xyz$ *a* $K = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0, x + y + 2z \leq 6\}$.

Demostració. No demostrarem que K és compacte ja que clarament es veu que és tancat i acotat. Pel teorema de Weierstrass, existeixen els extrems absoluts de f a K. Tornem a dividir l'exercici en tres passos:

1. **Extrems relatius a l'interior**: Veiem clarament que $f_x = yz, f_y = xz, f_z = xy$, i els punts crítics que volem trobar són iguals de zero dos a dos, és a dir, $P_1 = (0,0,z), P_2 = (0,y,0), P_3 = (x,0,0)$. A més, per la naturalesa de la funció veiem que $f(x,0,0) = f(0,y,0) = f(0,0,z) = 0$ són mínims absoluts. *Hem de trobar els màxims.*
2. **Extrems a la frontera**: Distingim quatre trossos dels tres plans coordenats.
   - $z = 0$ i $A = \{(x,y,z) \mid x,y \geq 0, x+y \leq 6\}$. Clarament, $f(x,y,0) = 0$.
   - $y = 0$ i $B = \{(x,y,z) \mid x,z \geq 0, x+2z \leq 6\}$. Un altre cop, $f(x,0,z) = 0$.
   - $x = 0$ i $C = \{(x,y,z) \mid y,z \geq 0, y+2z \leq 6\}$. En aquest cas, $f(0,y,z) = 0$.
   - Finalment, $x+y+2z = 6$ i $x,y,z \geq 0$. Aquest és el cas més complicat. Aïllant la z, obtenim $z = \frac{6-x-y}{2}$, i podem posar z com a funció implícita de x i y. En efecte:

     $$h(x,y) = f\left(x, y, \frac{6-x-y}{2}\right) = xy\left(\frac{6-x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}xy(6-x-y). \tag{6.3.12}$$

     Mirem els extrems d'aquesta funció a la regió $x,y \geq 0$ i $x+y \leq 6$; en efecte, trobem els punts crítics d'$h(x,y)$:

     $$\begin{aligned} h_x(x,y) &= \frac{1}{2}(6y - 2xy - y^2) = \frac{y}{2}(6-2x-y) = 0 \\ h_y(x,y) &= \frac{1}{2}(6y - 2xy - y^2) = \frac{x}{2}(6-2y-x) = 0 \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

     Resolent aquest sistema obtenim $x = y = 2$ i $P = (2,2,1)$ i $f(2,2,1) = 4$, i aquest és el màxim absolut perquè podem assegurar que existeix, pel teorema de Weierstrass.
3. Afegim els punts d'intersecció entre vores.

Per una manera alternativa de resoldre $x+y+2z = 6$ i $x,y,z \geq 0$, s'aconsella revisar la següent observació. ■

Observació 6.3.5. Anem a resoldre el cas $x+y+2z = 6$ i $x,y,z \geq 0$ amb Lagrange. En efecte, tenim $f(x,y,z) = xyz$ i $M = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = x+y+2z-6 = 0\}$. Els extrems de f restringida a M es trobem entre els punts on $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ per a algun λ. Notem que tenim tantes equacions com incògnites, i que afegim la última equació que correspon a la subvarietat perquè volem restringir l'estudi en aquella regió. A més, $\lambda \neq 0$ perquè $x,y,z \neq 0$ (en cas que no, estaríem en algun punt crític dels anteriors apartats).

$$\left.\begin{aligned} yz &= \lambda \\ xz &= \lambda \\ xy &= 2\lambda \\ x+y+2z &= 6 \end{aligned}\right\} \implies \left\{\begin{aligned} xyz &= x\lambda \\ xyz &= y\lambda \\ xyz &= 2\lambda z \end{aligned}\right\} \implies \left\{\begin{aligned} x = y &= 2z \\ x+x+x &= 6 \end{aligned}\right\} \tag{6.3.14}$$

Per tant, el punt P torna a ser el mateix, $P = (2,2,2)$.

Exercici 6.3.6. *Demostreu que per als punts de l'el·lipsoide $x^2+y^2+3z^2=1$ per a $x,y,z>0$ i $n,m,p\in\mathbb{N}$ es dona la següent desigualtat:*

$$x^{2n}(2y^2)^n(3z^2)^p \leq \frac{n^n m^m p^p}{(n+m+p)^{n+m+p}} \tag{6.3.15}$$

Demostració. Podem suposar que cap de les variables és 0, ja que, en aquest cas, ja es compliria la desigualtat per la sel·lecció $n,m,p\in\mathbb{N}$. Considerem $f(x,y,z)=x^{2n}(2y^2)^m(3z^2)^p$. Per Weierstrass, f té un màxim absolut a M, (x_0,y_0,z_0). Examinem la desigualtat $f(x,y,z)\leq f(x_0,y_0,z_0)$ tal que $(x,y,z)\in M$. Rutinàriament intentaríem aplicar Lagrange directament, però la derivació es complica molt fàcilment. Optarem utilitzar el logaritme perquè ens facilita els càlculs i perquè, al ser monòtona, els extrems de la funció es conserven (tot màxim de f és màxim del logaritme, h). Aleshores, considerem $h(x,y,z)=\log f(x,y,z)$:

$$h(x,y,z)=\log f(x,y,z)=2n\log(x)+2m\log(y)+2p\log(z)+m\log(2)+p\log(3). \tag{6.3.16}$$

Ara sí, fem Lagrange amb $h(x,y,z)$ i $g(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-1$:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{2n}{x}=\lambda 2x \text{ i } \frac{2m}{y}=\lambda 4y \text{ i } \frac{2p}{z}=\lambda 6z \\ x^2+2y^2+3z^2=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lr} x^2+\frac{m}{n}x^2+\frac{p}{n}x^2=1 & x^2=\frac{n}{n+m+p} \\ & 2y^2=\frac{m}{n+m+p} \\ & 3z^2=\frac{p}{n+m+p} \end{array}\right\} \tag{6.3.17}$$

Aleshores, $\lambda=\frac{n}{x^2}=\frac{m}{2y^2}=\frac{p}{3z^2}$ i, equivalentment,

$$\frac{x^2}{n}=\frac{2y^2}{m}=\frac{3z^2}{p}. \tag{6.3.18}$$

En concret, conegudes les expressions d'$x^2,2y^2,3z^2$, podem elevar-les als respectius exponents i multiplicar-les, de manera que acabem obtenint el resultat que volíem.

$$0\leq x^{2n}(2y^2)^n(3z^2)^p \leq \frac{n^n m^m p^p}{(n+m+p)^{n+m+p}}. \tag{6.3.19}$$

Cal tenir en compte que estem parlant que el punt tal que $\frac{x^2}{n}=\frac{2y^2}{m}=\frac{3z^2}{p}$ és el màxim i, per tant, tot valor de la funció es troba acotat per ell; d'aquí, la desigualtat. ■

Bibliografia

[Sal07] Saturnino L. Salas. *Calculus : one and several variables*. eng. 10th ed. New York: John Wiley & Sons, 2007. isbn: 9780471698043.

[Mar18] Jerrold E. Marsden. *Marsden, Jerrold E. [Vector calculus. Castellà]. Cálculo vectorial*. spa. Sexta edición. Madrid: Pearson, 2018. isbn: 9788490355787.

[Pra22] Martí Prats. *Càlcul Diferencial en Diverses Variables*. 1a edició. Vol. 1-1. Universitat de Barcelona, 2022.

Apunts de l'assignatura Càlcul Diferencial en Diverses Variables, impartida per Martí Prats i Xavier Massaneda durant el curs 2022/2023.