Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Enginyeria Informàtica

Apunts

Grau en Matemàtiques

Curs 2023-2024 / Setè Semestre

Anàlisi Matemàtica (ANMA)

Autor:
Mario Vilar

Professor/a:
Dra. Maria del Carmen Cascante

Presentació de l'assignatura

L'assignatura aborda la construcció dels nombres reals i propietats associades, aprofundeix en la continuïtat a espais mètrics, successions, sèries de funcions, l'espai de les funcions contínues, sèries de potències i sèries de Fourier, explorant teoremes rellevants i aplicacions pràctiques. Inclou temes com criteris de convergència i derivació de sèries de potències. **No estan revisats**.

Classificació AMS (2020): 00-01, 01A75, 00B50, 01A45, 01A50, 01A55, 01A60, 01A61, 01A65, 01A72, 01A73, 01A74, 01A75, 11-03, 30-03, 33-03, 34-03, 49-03.

Índex

Introducció

> *Tuvimos, hombre, tiempo para que nuestra sed fuera saciándose, el ancestral deseo de enumerar las cosas y sumarlas, de reducirlas hasta hacerlas polvo, arenales de números. Fuimos empapelando el mundo con números y nombres, pero las cosas existían, se fugaban del número, enloquecían en sus cantidades, se evaporaban dejando su olor o su recuerdo y quedaban los números vacíos.*
>
> Pablo NERUDA, *Oda a los números*

Primer de tot, trobareu que hi ha un índex, on hi distingim els diferents apartats ordenats seguint el meu propi criteri i, de tant en tant, seguint l'ordre cronològic del curs. Hi ha capítols, seccions, subseccions (i fins i tot subsubseccions). Us faig cinc cèntims de com he organitzat els encapçalaments de cada pàgina:

1. el número de l'últim capítol/secció/subsecció, depèn de la profunditat que hi hagi definida en aquell moment, figurarà en cada cantonada superior de pàgina parella (per exemple, *1.2*);
2. el nom del capítol es trobarà a la part dreta de la capçalera de les pàgines parelles (per exemple, «Divisibilitat i nombres primers»);
3. el nom de l'última secció/subsecció de la pàgina, a la cantonada dreta superior de les pàgines parelles (per exemple, «Polinomis: algorisme d'Euclides»);
4. el número de l'últim teorema, definició... de la pàgina en qüestió es trobarà a les pàgines senars, a la cantonada superior dreta, *destacat en el color de la seva capçalera corresponent* (per exemple, **1.2.3**).

A més, hi ha una taula, la taula de continguts. En aquest sentit, tal com acabem de dir, es veu fàcilment que s'ha seguit una mena de *sorting-by-color* per poder treballar de manera més eficient amb els diferents tipus d'enunciats matemàtics. D'aquesta manera, si busqueu una definició, un teorema... podreu distingir que estan destacats amb colors diferents (ara els introduïm) i trobar-los molt ràpidament:

1. Teoremes, proposicions, lemes, corol·laris, propietats, conjectures, processos i exercicis tindran aquest format (capçalera destacada amb color gris fosc):

   Teorema. *Compte! L'enunciat del teorema també serà en cursiva! Jove xef, porti whisky amb quinze glaçons d'hidrogen, coi!*

2. Les definicions i notacions tindran aquest format (capçalera de color gris clar):

   Definició. Aqueix betzol, Jan, comprava whisky de figa.

3. Les remarques i exemples tindran aquest format:

   Observació. Zel de grum: quetxup, whisky, cafè, bon vi; ja!

Després de molts anys fent-ho malament, ara sol quedaran numerades aquelles equacions a les quals em referiré més endavant. És la *filosofia dominant* en la majoria de textos matemàtics (té nom i tot, es diu la *regla d'Occam*).

Per últim, m'estalviaré de comentar l'índex terminològic perquè el seu propòsit és clar i, en efecte, paral·lel al de l'organització d'aquest document: poder facilitar-vos al màxim la feina per localitzar qualsevol concepte que desitgeu. Espero que us serveixin d'alguna cosa aquests apunts, els he fet amb tot l'amor del món. Sort!

Mario VILAR
Sitges, Barcelona
22 de gener de 2024

Taula de continguts

Capítol 1

Capítol 2

I

Els nombres reals

1.1 Conceptes previs

Demostrem l'existència i unicitat d'un cos ordenat, arquimedià i complet per successions, els reals, a partir de les successions de Cauchy de nombres racionals.

Definició 1.1.1 (Relació d'ordre). Una relació d'ordre $\leq$ en un conjunt A és reflexiva ($x \leq x$ per a tot $x \in A$), antisimètrica (si $x \leq y$ i $y \leq x$ aleshores $x = y$) i transitiva (si $x \leq y$ i $y \leq z$, $x \leq z$). És total si, a més, $x \leq y$ o bé $y \leq x$ per a qualssevol $x, y \in A$.

Definició 1.1.2 (Cos totalment ordenat). Un cos $(\mathbb{K}, \leq)$ és totalment ordenat si té una relació d'ordre total tal que:

1. Si $x, y, z \in K$, $x \leq y$, aleshores $x + z \leq y + z$.
2. Si $x, y \in K$ amb $0 \leq x$ i $0 \leq y$, aleshores $0 \leq xy$.

Propietat 1.1.3. *Sigui K un cos commutatiu totalment ordenat i $x, y \in K$. Aleshores:*

1. $|x| \leq y$ *si, i només si,* $-y \leq x \leq y$.
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(desigualtat triangular).*
3. $-|x - y| \leq |x| - |y|$, $|x| \leq |y| + |x - y|$ *i* $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Teorema 1.1.4. *Sigui $K \neq \{0\}$ un cos commutatiu totalment ordenat. Existeix una aplicació $\Phi : \mathbb{Q} \longrightarrow K$ injectiva amb:*

1. $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$,
2. $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ *i si* $x < y$, *llavors* $\Phi(x) < \Phi(y)$ *(Φ conserva l'ordre).*

Identificant $\mathbb{Q}$ amb $\Phi(\mathbb{Q})$, tenim $\mathbb{Q} \subset K$

Definició 1.1.5 (Suprem i ínfim). Definim el suprem d'un conjunt A com la mínima de les cotes superiors d'A, i el denotem per $\sup A$. Anàlogament, si existeix el màxim de les cotes inferiors d'A l'anomenem ínfim d'A i el denotem per $\inf A$.

1. k és suprem d'A si, i només si, k és cota superior d'A i si $j \neq k$ també ho és, $k \leq j$. Anàlogament per a l'ínfim.
2. Si un conjunt ordenat té màxim o mínim, aquest és *únic*.

1.2
Construcció

Definició 1.2.1 (Cos arquimedià). Un cos totalment ordenat K es diu arquimedià si el conjunt dels números naturals $\mathbb{N}$ no està acotat superiorment en K. És a dir, per a tot $x \in K$ existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.

Definició 1.2.2 (Successió convergent). Una successió $(a_n)_n$ és convergent a $\ell \in K$ (K commutatiu totalment ordenat) si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $|a_n - \ell| < \varepsilon$, per a tot $n \geq n_0$. En tal cas, posem $\lim_n a_n = \ell$.

Propietat 1.2.3.

1. *Si una successió té límit, aquest és únic.*
2. *Tota successió convergent és acotada.*
3. *Si $a_n \to a$, $b_n \to b$, llavors $a_n + b_n \to a + b$ i $a_n \cdot b_n \to ab$.*

Proposició 1.2.4 (Successió de Cauchy). *Sigui K un cos commutatiu totalment ordenat. Si $(a_n)_n \subset K$ és convergent, aleshores per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $|a_n - a_m| < \varepsilon$, per a tot $n, m \geq n_0$. Aquesta successió pren el nom de successió de Cauchy.*

Definició 1.2.5 (Complet per successions). Un cos totalment ordenat K és *complet per successions* si tota successió de Cauchy és convergent en K.

Hi ha successions de nombres racionals que són de Cauchy però no són convergents en $\mathbb{Q}$, és a dir, $\mathbb{Q}$ no és complet per successions, a diferència de $\mathbb{R}$.

Definició 1.2.6 (Cos dels reals, $\mathbb{R}$). És un cos commutatiu, totalment ordenat, arquimedià i complet per successions.[1]

Teorema 1.2.7. *Existeix un cos totalment ordenat, arquimedià i complet per successions; a més, és únic llevat d'isomorfisme.*

Teorema 1.2.8 (Propietat del suprem, de l'ínfim). *Tot conjunt $A \subset \mathbb{R}$ no buit acotat superiorment té suprem. Anàlogament, tot conjunt A diferent del buit acotat inferiorment té ínfim.*

Teorema 1.2.9 (Teorema dels intervals encaixats). *Sigui $(I_n)_n \subset \mathbb{R}$ una successió d'intervals* ***tancats****, diferents del buit*[2]*, complint que:*

1. *Per a tot n, $I_{n+1} \subset I_n$.*
2. *$(l(I_n))_n \to 0$, on $l(I_n)$ denota la longitud de l'interval I_n.*

[1] Equivalentment, per definir $\mathbb{R}$ es pot demanar un cos commutatiu, totalment ordenat que compleixi la propietat del suprem, 1.2.8.
[2] És important perquè $l(\{x\}) = l(\emptyset) = 0$.

Llavors, existeix $x \in \mathbb{R}$ i $\bigcap_n I_n = \{x\}$.

Demostració. Per a tot $n \in \mathbb{N}$ triem $c_n \in I_n$. Comprovem que la successió $(c_n)_n$ és una successió de Cauchy. Sigui $m \geq n$. Donat que, per una banda, $c_n \in I_n$ i per l'altra $c_m \in I_m \subset I_n$. Tenim que $|c_n - c_m| \leq l(I_n) \to 0$ si $n \to \infty$. Per tant, donat $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $l(I_n) < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. En particular, deduïm que si $m, n \geq n_0$, llavors $|c_n - c_m| < \varepsilon$ i $(c_n)_n$ és una successió de Cauchy i, per tant, convergent. Sigui, doncs, $x \in \mathbb{R}$ tal que $(c_n)_n \to x$.

Escrivim $I_n = [a_n, b_n]$. Donat que $I_{n+1} \subset I_n$, es compleix que $a_n \leq a_{n+1}$ i $b_{n+1} \leq b_n$ (els a i els b es van apropant). A més, per a tot $m \geq n$, $a_n \leq c_m \leq b_n$, prenem límits cap a l'infinit sobre m obtenim $a_n \leq x \leq b_n$, de manera que $x \in \bigcap_n I_n$. Finalment, si $x, y \in \bigcap_n I_n$ llavors $|x - y| \leq l(I_n) \to 0$ i, per tant, $x = y$. ■

Observació 1.2.10 (Repàs de successions)**.** Prenem un cos commutatiu, totalment ordenat i arquimedià K. Tota successió convergent hi és acotada, i tota successió de Cauchy també, acotada. En canvi, si K *no* és complet per successions *no* podem dir que:

1. Una successió de K és convergent si, i només si, és de Cauchy (la condició necessària no es compleix sempre).
2. Tota successió monòtona i acotada de K és convergent.

Teorema 1.2.11 (de Bolzano-Weierstrass)**.** *Tota successió acotada de nombres reals té una parcial convergent.*

Definició 1.2.12 (Sèries de nombres reals)**.** Sigui $(a_n)_n$ una successió de nombres reals. Una sèrie $\sum_n a_n$ és convergent si la successió de sumes parcials $(s_n)_n$ definida per $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és convergent. Una sèrie $\sum_n a_n$ de nombres reals es diu *absolutament convergent* si $\sum_n |a_n|$ és convergent.

Proposició 1.2.13. *Si la sèrie $\sum_n a_n$ és convergent, llavors $a_n \to 0$.*

Proposició 1.2.14. *En el context d'una successió de nombres reals, absolutament convergent implica convergent. És a dir, tota sèrie de nombres reals absolutament convergent és convergent.*

II

Continuïtat en espais mètrics

2.1 Espais mètrics

Definició 2.1.1 (Espai mètric). Un conjunt X es diu *espai mètric* si hi ha una aplicació $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ complint que:

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
2. per a tot $x, y \in X$ tenim $d(x,y) = d(y,x)$,
3. per a tots $x, y, z \in X$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (desigualtat triangular).

L'aplicació d és la *distància* o *mètrica* i denotem l'espai mètric per (X,d).

Exemple 2.1.2 (Espai de les funcions contínues). Per $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sigui $\mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ és contínua}\}$. Llavors, $(\mathcal{C}([a,b], d)$ és un espai mètric amb la *distància del suprem* definida per:

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Definició 2.1.3 (Boles oberta i tancada). Sigui (X,d) un espai mètric, $p \in X$ i $R > 0$.

1. La bola oberta de centre p i radi R, $B(p,R)$, és el conjunt $B(p,r) = \{q \in X \mid d(p,q) < R\}$.
2. La bola tancada de centre p i radi R, $B'(p,R)$, és el conjunt $B'(p,r) = \{q \in X \mid d(p,q) \leq R\}$.

Definició 2.1.4 (Punt interior, adherent).

1. Sigui $E \subset X$ i $p \in X$. p és un punt interior a E si existeix $\delta > 0$ tal que $B(p,\delta) \subset E$. Un obert és aquell en què tot punt d'E és interior ($\mathring{E} = E$).
2. Sigui $E \subset X$ i $p \in X$. p és un punt adherent a E si per a tot $\delta > 0$ es compleix que $B(p,\delta) \cap E \neq \emptyset$. Un tancat és aquell en què tots els punts adherents a E són d'E ($\overline{E} = E$).

Definició 2.1.5 (Acotat). Un subconjunt $E \subset X$ és acotat si existeix $p \in X$ i $R > 0$ complint que $E \subset B(p,R)$.

2.2 Successions en espais mètrics

Definició 2.2.1 (Successió convergent en un espai mètric). Sigui (X,d) un espai mètric. Una successió $(x_n)_n \subset X$ és convergent en X si existeix $x \in X$ tal que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$, es compleix $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Observació 2.2.2. Anàlogament, una successió $(x_n)_n \subset X$ **no** és convergent en X cap a $x \in X$ si *existeix* un $\varepsilon > 0$ tal que *per a tot* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existeix* un $n \geq n_0$ tal que $d(x_n, x) \geq \varepsilon$.

Propietat 2.2.3 (Propietats de les successions).

1. *Si $(x_n)_n$ és convergent, llavors el límit és únic.*
2. *Si $(x_n)_n$ és convergent, $(x_n)_n$ és acotada. El recíproc, en general,* ***no*** *és cert.*

Definició 2.2.4 (Successió de Cauchy). Una successió $(x_n)_n \subset X$ és una successió de Cauchy en X si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que **per a tot** $m, n \geq n_0$ es dona que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ (la cua de la successió, en particular, els seus punts, disten pocs entre ells). També,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n \geq n_0, d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Observació 2.2.5. Una successió *no* és de Cauchy si existeix $\varepsilon > 0$ tal que per a tot $n_0 \in \mathbb{N}$ existeixen $m, n \geq n_0$ complint que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$.

Propietat 2.2.6.

1. *Si $(x_n)_n \subset X$ és de Cauchy, $(x_n)_n$ és acotada.*
2. *Tota successió $(x_n)_n \subset X$ convergent és de Cauchy en X, però no tota successió de Cauchy és convergent.*
3. *Sigui $(x_n)_n \subset X$ tal que per a tot $n \geq 0$ tenim $d(x_{n+1}, x_n) < 2^{-n}$. Aleshores, la successió $(x_n)_n$ és de Cauchy.*
4. *Sigui $(x_n)_n$ una successió de Cauchy tal que té una parcial convergent a x; llavors, $(x_n)_n$ té límit x.*

Definició 2.2.7 (Espai mètric complet). Diem que un espai mètric (X, d) és complet si tota successió compleix la propietat 2.2.6, apartat 2., que a priori no era certa; és a dir, si tota successió de Cauchy en X és convergent en X. D'aquesta manera tenim certs espais amb una condició necessària i suficient entre ser de Cauchy i convergència.

Proposició 2.2.8 (Equivalència entre tancat i tancat per a successions). *Sigui (X, d) un espai mètric i $E \subset X$. Són equivalents:*

1. *E és tancat i*
2. *E és tancat per a successions, és a dir, si $(x_n)_n \to x \in X$, llavors $x \in E$.*

Demostració.

$\boxed{\Rightarrow}$ Suposem que $(x_n)_n \subset E$ tal que $x_n \to x$, $x \notin E$; és a dir, $x \in X \setminus E$. Com estem suposant E tancat, es verifica $X \setminus E$ obert i, per tant, existeix $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset X \setminus E$. Però com $(x_n)_n \to x$, existeix n_0 tal que per a tot $n \geq n_0$ tenim $d(x_n, x) < \varepsilon$ i $x_n \in B(x, \varepsilon) \subset X \setminus E$, però $(x_n)_n \subset E$ per hipòtesi, contradicció. Per tant, $x \in E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suposem que E és tancat per a successions. Volem veure que E és tancat o, equivalentment, $X \setminus E$ és obert. Si $X \setminus E$ no és obert, llavors existeix un punt $x \in X \setminus E$ que no és interior. Tenim, aleshores, que per a cada $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$. En particular, triant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, existeix $(x_n)_n$ determinada per $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap E$, amb el que $x_n \in E$ i com $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$, $(x_n)_n \to x$. Per hipòtesi estem suposant que E és tancat per successions, i es verifica que $x \in E$, contradicció amb la suposició que x no és interior. ■

Observació 2.2.9. Si (X, d) és un espai mètric i $E \subset X$, $x \in \overline{E}$ si, i només si, existeix una successió $(x_n)_n \subset E$ tal que $(x_n)_n \to x$.

Teorema 2.2.10. *Sigui $E \subset \mathbb{R}$ no buit. Llavors E és obert si, i només si, E és unió finita o numerable d'intervals oberts.*

2.3 Compactes

Definició 2.3.1 (Compacte). Sigui (X, d) un espai mètric. Un conjunt $K \subset X$ és compacte si de tot recobriment (no necessàriament finit) *per oberts* de K en podem extreure un subrecobriment finit.

Proposició 2.3.2. *Si (X, d) és un espai mètric i $K \subset X$ és compacte, llavors:*

1. *K és acotat i tancat. La implicació contrària no es compleix a priori.*
2. *Tot subconjunt F tancat de K és compacte.*

Demostracions, no entren a examen.

1. Provem que K és acotat. Per a cada $x \in K$, considerem $B(x, 1)$. Llavors, es compleix que $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, 1)$. Com per hipòtesi K és compacte, existeixen $x_1, \ldots, x_k \in K$ tals que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1)$. Però observem que per a tot $j = 1, \ldots, n$ es compleix que $B(x_j, 1) \subset B(x_1, 1 + d(x_j, x_1))$, donat que si $y \in B(x_j, 1)$, aleshores:

   $$d(y, x_1) \leq d(y, x_j) + d(x_j, x_1) < 1 + d(x_j, x_1).$$

   Prenent $M = 1 + \max_{j \in \{1, \ldots, n\}} d(x_1, x_j)$, tenim que $K \subset B(x_1, M)$; és a dir, K és acotat. Veiem ara que K és tancat. Sigui $(x_n)_n \subset K$ tal que $(x_n)_n \to x$. Volem veure que $x \in K$. Suposem $x \notin K$ i arribem a contradicció. En particular, per a tot $z \in K, d(z, x) > 0$. Prenem per a tot $z \in K$, $\eta_z = \frac{1}{2} d(z, x) > 0$. Llavors es verifica que $K \subset \bigcup_{z \in K} B(z, \eta_z)$. Com que K és compacte, existeixen $z_1, \ldots, z_n \in K$ complint que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, \eta_{z_i})$. Ara bé, donat que $\bigcup_n \{z_n\} \subset K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, \eta_{z_i})$, existeix i tal que el conjunt $\{n \mid x_n \in B(z_i, \eta_{z_i})\}$ és infinit. Per tant, podem construir una parcial $(x_{n_k})_k$ de la successió $(x_n)_n$ complint que $(x_{n_k})_k \subset B(z_i, \eta_{z_i})$. Donat que $(x_n)_n \to x$, llavors també $(x_{n_k})_k \to x$. Per tant, existeix $k_0 \geq 1$ tal que, per a tot $k \geq k_0, d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2}d(z_i, x)$. En particular, si $k \geq k_0$ fixat, tenim

$$d(z_i, x) \leq d(z_i, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \eta_{z_i} + \frac{1}{2}d(z_i, x) = \frac{1}{2}d(z_i, x) + \frac{1}{2}d(z_i, x) = d(z_i, x),$$

que ens porta a contradicció.

2. Siguin $(G_i)_i$ oberts continguts en X tals que $F \subset \bigcup_i G_i$. Com F és tancat, $X \setminus F$ és obert i $K \subset \bigcup_i G_i \cup X \setminus F$. Com K és compacte, tenim $i_1, \ldots, i_m$ tals que $K \subset \bigcup_{j=1}^m G_{i_j} \cup X \setminus F$. En particular, $F \subset \bigcup_{j=1}^m G_{i_j}$ i, per tant, F és compacte. ■

Definició 2.3.3 (Compacte per successions). Sigui (X, d) és un espai mètric i $K \subset X$. Es diu que K és compacte per successions si tota successió $(x_n)_n \subset K$ té una parcial convergent en K.

Proposició 2.3.4. *Sigui (X, d) un espai mètric i $K \subset X$. K és compacte per successions si, i només si K és compacte.*

Corol·lari 2.3.5 (Producte cartesià de compactes). *Siguin (X, d) i (Y, d') espais mètrics i $K \subset X$, $J \subset Y$ compactes. Llavors, $K \times J$ és un compacte en $X \times Y$.*

Demostració. Sigui $(x^n)_n \subset K \times J$[1] una successió en $K \times J$, on $x^n = (x_1^n, x_2^n)$. Donat que $(x_1^n)_n$ és una successió en el compacte K, existeix una parcial $(x_1^{n_k})_k$ de la successió $(x_1^n)_n$ i un punt $x_1 \in K$ tal que $(x_1^{n_k})_k \to x_1$ quan $k \to \infty$. Ara tenim que $(x_2^{n_k})_k$ és una successió en el compacte J. Per tant, existeix una parcial $(x_2^{n_{k_j}})_j$ de la successió $(x_2^{n_k})_k$ i un punt $x_2 \in J$ tal que $(x_2^{n_{k_j}})_j \to x_2$ quan $j \to \infty$. Llavors, es compleix que $(x^{n_{k_j}})_j \to (x_1, x_2)$ quan $j \to \infty$. Deduïm, en particular, aplicant inducció, que $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$ és un compacte en $\mathbb{R}^m$. ■

Teorema 2.3.6 (de Heine-Borel). *Sigui $K \subset \mathbb{R}^n$. Llavors, K és compacte* ***si, i només si****, K és tancat i acotat.*

Demostració. Ja hem vist que si K és compacte, K és tancat i acotat, i volem veure el recíproc. Suposem que $K \subset \mathbb{R}^n$ és tancat i acotat. Donat que és acotat, existeixen $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ tals que $K \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ és un compacte. Llavors, K és un tancat inclòs en el compacte $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ i, en conseqüència, K és compacte. ■

2.4 Espais normats

Definició 2.4.1 (Espai normat). Un espai normat $(E, \|\cdot\|)$ és un espai vectorial E juntament amb una aplicació (norma) $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ complint:

1. $\|x\| = 0$ si, i només si, $x = 0$.

[1] Canviem de notació aquí perquè utilitzarem els subíndexs per a denotar cadascuna de les dues components.

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ per a tot $x \in E$ i per a tot escalar λ.
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per a tot $x, y \in E$.

Si E és un espai normat, llavors $d(x,y) = \|x-y\|$ és una distància en E, amb el que (E,d) és un espai mètric.

Exemple 2.4.2 (L'espai de les funcions contínues). També, $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ és un espai normat amb la següent norma:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \ f \in \mathcal{C}([a,b]).$$

Exemple 2.4.3 (ℓ^p). Per a $0 < p < \infty$, denotem per ℓ^p l'espai de successions $\ell^p = \{x = (x_n)_n \subset \mathbb{R} \mid \|x\|_p < +\infty\}$, tal que:

$$\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Es pot comprovar[2] que per a $1 \leq p < +\infty$, $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ és un espai normat.

Teorema 2.4.4 (Desigualtat de Hölder). *Sigui* $1 < p < +\infty$. *Llavors:*

$$\sum_n |x_n| \cdot |y_n| \leq \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_n |y_n|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

on p' *és l'exponent conjugat que ve determinat per la relació* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demostració. Posem $x = \{x_n\}$ i $y = \{y_n\}$, i podem suposar que $0 < \|x\|_p, \|y\|_{p'} < +\infty$. Definim $z = \{z_n\}$ i $w = \{w_n\}$, on $z_n = \frac{x_n}{\|x\|_p}$ i $w_n = \frac{y_n}{\|y\|_{p'}}$. Observem que $\|z\|_p = 1$ i $\|w\|_{p'} = 1$, de manera que només ens cal provar que $\sum_n |z_n w_n| \leq 1$. A partir de la desigualtat:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}, \ a, b > 0, \tag{2.1}$$

obtenim:

$$\sum_n |z_n w_n| \leq \frac{1}{p}\sum_n |z_n|^p + \frac{1}{p'}\sum_n |w_n|^{p'} = \frac{1}{p}\|z\|_p^p + \frac{1}{p'}\|w\|_{p'}^{p'} \overset{3}{=} \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

Ens ha faltat, però, provar (2.1). Solament cal fer-ho per als casos $a, b > 0$. Utilitzant que l'exponencial és convexa, i que $0 < \frac{1}{p}, \frac{1}{p'} \leq 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, obtenim:

$$ab = e^{\log a + \log b} = e^{\left(\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'}\right)} \leq \frac{1}{p}e^{\log a^p} + \frac{1}{p}e^{\log b^{p'}} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'}.$$ ■

[2] ℓ^p és un espai vectorial, per a $p \geq 1$ tenim que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ és un espai normat i, per a $p < 1$, (ℓ^p, d_p) és un espai mètric.

[3] Hem usat que $\|z\|_p^p, \|w\|_{p'}^{p'} = 1$, ja que hem vist abans que $\|z\|_p, \|w\|_{p'} = 1$.

Teorema 2.4.5 (Desigualtat de Minkowskii, o desigualtat triangular de ℓ^p). *Sigui* $1 < p < +\infty$, *i* $x, y \in \ell^p$. *Llavors,* $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Demostració. Ja sabem que $\|x+y\|_p < \infty$. Tenim:

$$\|x+y\|_p^p = \sum_n |x_n+y_n|^p = \sum_n |x_n+y_n|^{p-1} \cdot |x_n+y_n| \leq \sum_n |x_n+y_n|^{p-1} \cdot |x_n| + \sum_n |x_n+y_n|^{p-1} \cdot |y_n|.$$

Posant $a_n = |x_n|$ i $b_n = |x_n + y_n|^{p-1}$, i observant que $p'(p-1) = p$[4], apliquem la desigualtat de Hölder:

$$\sum_n |x_n| \cdot |x_n+y_n|^{p-1} \leq \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_n |x_n+y_n|^{p'(p-1)} \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\sum_n |x_n+y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{p}{p'}}$$

I aquest últim producte equival a $\|x\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p/p'}$. Anàlogament, trobem:

$$\sum_n |y_n| \cdot |x_n+y_n|^{p-1} \leq \left(\sum_n |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_n |x_n+y_n|^{p'(p-1)} \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_n |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\sum_n |x_n+y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{p}{p'}},$$

que és $\|y\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p/p'}$. Per tant, hem vist que

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{p/p'} \iff \|x+y\|_p^{p-\frac{p}{p'}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Si usem que $p - \frac{p}{p'} = p(1 - \frac{1}{p'}) = 1$, obtenim finalment:

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

■

Exemple 2.4.6 (Espais de funcions). Els espais de funcions $\mathcal{L}^p[a,b]$. Per $0 < p < \infty$, definim $\mathcal{L}^p[a,b]$ com l'espai de funcions $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables amb

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Per tal que $\|f\|_p = 0$ impliqui que $f \equiv 0$ cal identificar com iguals dues funcions que coincideixen a tot arreu excepte un conjunt de mesura nul·la. La desigualtat de Hölder en aquest cas ens diu que si $1 < p < \infty$, llavors

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^{p'}\, dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Llavors, de la mateixa manera que abans, es té que $(\mathcal{L}^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ és un espai normat si $1 \leq p < \infty$. En canvi, per $0 < p < 1$ és un espai mètric amb la distància $d(f,g) = \|f-g\|_p^p$.

[4] El p' de 2.4.4, el complementari de p o, en altres paraules, aquell que complia $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

2.5 Límits i continuïtat

Definició 2.5.1 (Punt d'acumulació). Sigui X un espai mètric i $E \subset X$. Un punt $p \in X$ és d'acumulació en E si per a tot $\varepsilon > 0$ tenim $(B(p,\varepsilon)\setminus\{p\})\cap E \neq \emptyset$. Un punt d'acumulació també rep el nom de punt límit d'E, i és equivalent a dir que hi ha una successió $(x_n)_n \subset E \setminus \{p\}$ amb $x_n \to p$.

Definició 2.5.2 (Punt aïllat). En cas que $(B(p,\varepsilon) \setminus \{p\}) \cap E = \emptyset$, tenim un punt aïllat.

Definició 2.5.3 (Límit). Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) espais mètrics, $E \subset X$ i $f : E \longrightarrow Y$, p punt d'acumulació.

$$\lim_{x\to p} f(x) = \ell \iff \text{Per a } \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \;\Big|\; 0 < d_X(x,p) < \delta,\ x \in E \implies d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Proposició 2.5.4. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) espais mètrics, $E \subset X$ i $f : E \longrightarrow Y$, p punt d'acumulació.*

$$\lim_{x\to p} f(x) = \ell \iff (x_n)_n \subset E \setminus \{p\} \;\Big|\; \lim_n x_n = p \text{ i } \lim_n f(x_n) = \ell.$$

Definició 2.5.5 (Funció contínua). Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) espais mètrics, $E \subset X$ i $f : E \longrightarrow Y$, $x_0 \in E$. f és contínua en x_0 si:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(x_0, \varepsilon) \;\Big|\; 0 < d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,\ \forall x \in E.$$

Equivalentment, si per a tota successió $(x_n)_n \subset E$ amb $\lim_n x_n = x_0$, $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$. Una funció (tota ella) és contínua si, i només si, és contínua per a tot $x_0 \in E$.

Exemple 2.5.6. $F : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1])$ definida per $F(f) = f^2$ és contínua. En efecte, sigui $f \in \mathcal{C}([0,1])$ i posem $M_f = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Sabem que M_f és finit, ja que tota funció contínua en el compacte $[0,1]$ (en qualsevol compacte de la recta real a tal efecte) és acotada. Per $g \in \mathcal{C}([0,1])$ tenim:

$$d(F(f), F(g)) = d(f^2, g^2) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)^2 - g(x)^2|.$$

Per a $x \in [0,1]$ tenim:

$$\begin{aligned}|f(x)^2 - g(x)^2| &= |f(x) - g(x)| \cdot |f(x) + g(x)| \overset{5}{\leq} d(f,g) \cdot |f(x) + g(x)| \\ &\leq d(f,g)(|g(x) - f(x)| + 2|f(x)|) \leq d(f,g)(d(f,g) + 2M_f).\end{aligned}$$

Aleshores, donat $\varepsilon > 0$ si prenem $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{1+2M_f})$ (que en aquest cas depèn de f) podem definir $g \in \mathcal{C}([0,1])$ amb $d(f,g) < \delta$ tal que:

$$d(F(f), F(g)) \leq d(f,g)(d(f,g) + 2M_f) \leq d(f,g)(1 + 2M_f) < \varepsilon,$$

amb el que hem provat que F és contínua.

[5] Per $d(f,g)$ s'entén que prenem la distància del suprem, $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. En qualsevol cas, és evident que amb aquesta definició $|f(x) - g(x)| \leq d(f,g)$.

Definició 2.5.7 (Funció acotada)**.** Sigui (X, d_X) un espai mètric, $E \subset X$ i $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Diem que f és acotada si existeix $M > 0$ tal que per a tot $x \in E$, $|f(x)| \leq M$. Una manera menys habitual (i, per tant, més rellevant) d'enunciar-ho és: si existeix $M > 0$ tal que $\sup_{x\in E} |f(x)| \leq M$, o bé $f(E) \subset \overline{B(0, M)}$.

Proposició 2.5.8. *Siguin $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ espais mètrics, $E \subset X$. Siguin $f : E \longrightarrow Y$, contínua en $p \in E$ i $g : f(E) \longrightarrow Z$, contínua en $f(p)$, respectivament. Llavors, $g \circ f : E \longrightarrow Z$ és contínua en p.*

Demostració, no entra.

1. Donat que g és contínua en $f(p)$, per a cada $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que per a tot $y \in f(E)$ amb $d_Y(y, f(p)) < \delta$, es compleix que $d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon$.
2. Donat que f és contínua en p, donat aquest $\delta > 0$ (*per a tot* $\delta > 0$; en particular, el de l'apartat anterior) existeix $\eta > 0$ tal que per a tot $x \in E$, $d_X(x, p) < \eta$, es compleix que $d_Y(f(x), f(p)) < \delta$ i, per l'apartat anterior, $d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon$.

Tot plegat ens dona que $g \circ f$ és contínua en p. ■

Teorema 2.5.9. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) espais mètrics i $f : X \longrightarrow Y$, són equivalents:*

1. *f és contínua en X.*
2. *Per a tot $\mathcal{T}$ tancat en Y, $f^{-1}(\mathcal{T})$ és tancat en X.*
3. *Per a tot $\mathcal{U}$ obert en Y, $f^{-1}(\mathcal{U})$ és obert en X.*

Teorema 2.5.10. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) espais mètrics i $f : X \longrightarrow Y$, $f \in \mathcal{C}(X)$. Si X és compacte, $f(X)$ és un compacte d'Y.*

Demostració, no entra. Provarem que $f(X)$ és compacte, comprovant que és compacte per successions. Sigui $(y_n)_n \subset f(X)$. Llavors, per a cada $n \geq 1$ existeix $x_n \in X$ complint que $f(x_n) = y_n$. Donat que, per hipòtesi, X és compacte, existeix una parcial $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ i un punt $x \in X$ tals que $(x_{n_k})_k \to x$. La continuïtat de f ens dona que $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(X)$. Per tant, el conjunt $f(X)$ és compacte. ■

Ara hem de tenir present què era una funció acotada, 2.5.7.

Corol·lari 2.5.11. *Sigui (X, d_X) espais mètrics i $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (compte perquè (Y, d_Y) ja no és un espai mètric qualsevol), $f \in \mathcal{C}(X)$. Aleshores, f és acotada.*

Demostració, no entra. Donat que X és un compacte i f és contínua en X, per 2.5.10 tenim que $f(X)$ és compacte i, en particular, és un conjunt acotat. És a dir, $f(X) \subset \overline{B(0, M)}$. ■

Corol·lari 2.5.12. *Sigui (X, d_X) espai mètric compacte i $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua i sigui $M = \sup_{x\in X} f(x)$ i $m = \inf_{x\in X} f(x)$. Llavors, existeixen $p, q \in X$ tals que $f(p) = M$ i $f(q) = m$. S'assoleixen el suprem i l'ínfim: existeixen el màxim i el mínim.*

Demostració. Per 2.5.10, donat que X és compacte i f és contínua en X, tenim que $f(X)$ és compacte i, en particular, $f(X)$ és un subconjunt tancat i acotat d'$\mathbb{R}$. Per la propietat del suprem existeixen $m, M \in \mathbb{R}$ tals que $M = \sup_{x \in X} f(x)$ i $m = \inf_{x \in X} f(x)$. Com M és un suprem i per a tot $n \geq 1$, $M - \frac{1}{n} < M$, tenim que $M - \frac{1}{n}$ no és una cota superior de $f(X)$, amb el que existeix una successió $(x_n) \subset X$ i, per tant, $x_n \in X$, complint que $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$; per tant, $\lim_n f(x_n) = M$ i, com per a cada $n \geq 1$ tenim $f(x_n) \in f(X)$, $f(X)$ tancat, tenim que $M \in f(X)$. Anàlogament per a $m \in f(X)$: com m és un ínfim i per a tot $n \geq 1$, $m + \frac{1}{n} > m$, tenim que $m + \frac{1}{n}$ no és una cota inferior de $f(X)$, amb el que existeix $x_n \in X$ complint que $m + \frac{1}{n} > f(x_n) \geq m$; per tant, $\lim_n f(x_n) = m$ i, com per a cada $n \geq 1$ tenim $f(x_n) \in f(X)$, $f(X)$ tancat, tenim que $m \in f(X)$. ■

Teorema 2.5.13. *Sigui (X, d_X) espai mètric compacte i (Y, d_Y) espai mètric i $f : X \longrightarrow Y$ una funció contínua i bijectiva. Llavors $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ és contínua.*

Demostració, no entra. Per veure que f^{-1} és contínua, veurem que per a tot subconjunt tancat F d'X, aleshores $f(F)$ és també un tancat[6], en aquest cas d'Y. Donat que $F \subset X$ és tancat i X és compacte, en particular F és compacte. Per tant, $f(F)$ és compacte en Y; $f(F)$, doncs, és tancat i acotat en Y. ■

Definició 2.5.14 (Uniformement contínua)**.** Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) dos espais mètrics. Una funció $f : X \longrightarrow Y$ és uniformement contínua si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta = \delta(\varepsilon)$ (δ només depèn d'ε) tal que per a tot $x, y \in Y$ amb $d_X(x, y) < \delta$, llavors es compleix que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

1. Si $f : X \longrightarrow Y$ és uniformement contínua en X i $A \subset X$, llavors f també és uniformement contínua en A.
2. Si $f : X \longrightarrow Y$ és uniformement contínua en X, llavors f és contínua en X. El recíproc en general, però, no és cert.

Observació 2.5.15. f no és uniformement contínua si, i només si, existeix $\varepsilon > 0$ tal que per a tot $\delta > 0$ existeixen $p, q \in X$ tals que $d_X(p, q) < \delta$ i $d_Y(f(p), f(q)) \geq \varepsilon$. Equivalentment, si existeix $\varepsilon > 0$ i $(x_n)_n, (y_n)_n \subset X$ tals que $(d_X(x_n, y_n))_n \to 0$ i $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.

Exemple 2.5.16 (f-Hölder)**.** Si (X, d_X) i (Y, d_Y) són espais mètrics i $f : X \longrightarrow Y$ és una funció complint que existeix $\alpha > 0$ i $M > 0$ tals que $d_Y(f(x), f(y)) \leq M d_X(x, y)^\alpha$, $x, y \in X$, llavors f és uniformement contínua en X. A aquest tipus de funcions se les sol anomenar *f-Hölder*. *A saber*: Per al cas particular $\alpha = 1$, estem davant d'una funció *f-Lipschitz*. Aquestes funcions són importants perquè totes són uniformement contínues (i, per tant, contínues). Si, a més, $M < 1$, són *contraccions*, de les quals parlarem més endavant i ens seran útils per a aplicar el teorema del punt fix de Banach.

[6] Si anomenem $g : Y \longrightarrow X$ a f^{-1}, simplement hem d'agafar un tancat F de X, l'espai d'arribada, i veure que $g^{-1}(F) = f(F)$ és tancat. Hem usat que $(f^{-1})^{-1} = f$ (la operació està ben definida perquè f és bijectiva).

Teorema 2.5.17 (Continuïtat uniforme i compactes). *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) espais mètrics, X compacte i $f : X \longrightarrow Y$ contínua en X. Llavors, f és uniformement contínua.*

Demostració. Sigui $\varepsilon > 0$. Com f és contínua en X, per a tot $p \in X$, existeix $\delta_p > 0$ tal que per a tot $q \in X$ que compleix $d_X(p, q) < \delta_p$, aleshores $d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donat que $X \subset \bigcup_{p \in X}\{p\} \subset \bigcup_{p \in X} B(p, \frac{\delta_p}{2})$ i, per hipòtesi, X és compacte, existeixen $p_1, \ldots, p_n \in X$ tals que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(p_i, \frac{\delta_{p_i}}{2})$. Definim $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{p_1}, \ldots, \delta_{p_n})$. Siguin $p, q \in X$ tals que $d_X(p, q) < \delta$. Llavors existeix $1 \leq m \leq n$ tal que $p \in B(p_m, \frac{\delta_{p_m}}{2})$ i, conseqüentment:

$$d_X(q, p_m) \leq d_X(p, q) + d_X(p, p_m) < \delta + \frac{\delta_{p_m}}{2} \leq \frac{\delta_{p_m}}{2} + \frac{\delta_{p_m}}{2} \leq \delta_{p_m}.$$

Per tant, $d_Y(f(q), f(p_m)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalment:

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(p_m), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Observació 2.5.18 (Conseqüència important de 2.5.17). Com que $[a, b]$ és un compacte de $\mathbb{R}$, tota funció $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$ és uniformement contínua en $[a, b]$.

Exemple 2.5.19. Si $E \subset \mathbb{R}$ no és compacte, existeix $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no acotada. En efecte, si E és no acotat, només cal considerar $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x) = x$. Si E és acotat, llavors E no és tancat. Per tant, existeix $x_0 \in \overline{E} \setminus E$ i podem considerar $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x) = \frac{1}{x - x_0}$.

Proposició 2.5.20 (Determinant continuïtat uniforme).

1. *Sigui $f \in \mathcal{C}((a, b))$, $-\infty < a < b < +\infty$. f és uniformement contínua en (a, b) si, i només si, existeix $\lim_{x \to a^+} f(x)$ i $\lim_{x \to b^-} f(x)$.*
2. *Sigui $f \in \mathcal{C}([a, +\infty))$, $-\infty < a < +\infty$. Suposem que existeix $\ell \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$. Llavors, f és uniformement contínua en $[a, +\infty)$. El recíproc no és cert en general.*
3. *Siguin $a \in \mathbb{R}$ i $\varphi : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que existeixen els límits finits $\lim_{x \to a^+} \varphi(x)$ i $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$, llavors f és uniformement contínua en $(a, +\infty)$.*

2.6 Conjunts connexos i continuïtat

Definició 2.6.1 (Conjunt connex). Sigui (X, d) un espai mètric. Un conjunt $E \subset X$ és connex si no es pot posar com a unió de dos oberts relatius[7] disjunts no buits. És a dir, si $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ són dos oberts tals que $E = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ és connex, o bé $\mathcal{U} = \emptyset$ o bé $\mathcal{V} = \emptyset$.

Proposició 2.6.2.

[7] Un conjunt A és un obert relatiu si existeix un obert B tal que $A = B \cap X$.

1. *Sigui (X, d) un espai mètric i $E \subset X$. E és connex si, i només si, els únics clopen d'E són E i el buit.*
2. *Ara, sigui $E \subset \mathbb{R}$ (no val per un (X, d) qualsevol). $E \neq \emptyset$ és connex si, i només si, E és un interval.*

Teorema 2.6.3. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) espais mètrics i $f : X \longrightarrow Y$ contínua en X. Si $E \subset X$ és connex, aleshores $f(E)$ també ho és.*

Teorema 2.6.4 (de Bolzano). *Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua en $[a, b]$. Si $f(a) < c < f(b)$, aleshores existeix $x \in (a, b)$ i $f(x) = c$.*

Demostració. Donat que f és contínua en $[a, b]$ i $[a, b]$ és connex (per exemple, perquè és un interval de $\mathbb{R}$, cf. 2.6.2), es compleix per 2.6.3 que $f([a, b])$ és un connex de $\mathbb{R}$ i, per tant, un interval. Però com $f(a), f(b) \in f([a, b])$, es dedueix que $c \in f([a, b])$. ■

2.7 Banach

Havíem dit que algunes f-Hölder (cf. 2.5.16) especials eren aplicacions contractives, i que aquestes jugaven un paper essencial en el teorema del punt fix de Banach. Anem a veure-ho en més detall.

Definició 2.7.1 (Aplicació contractiva). Sigui X un espai mètric i T una aplicació $T : X \longrightarrow X$. T es diu contractiva si hi ha una constant $k \in (0, 1)$ tal que $d(T(x), T(y)) \leq k(d, y)$, per a tot $x, y \in X$.

Teorema 2.7.2 (del punt fix de Banach). *Sigui X un espai mètric complet. Tota aplicació $T : X \longrightarrow X$ contractiva té un únic punt fix.*

Demostració. Prenem $x_1 \in X$ i definim la successió $(x_n)_n$ donada per $x_{n+1} = T(x_n)$. Passem a veure que per a $n \geq 1$ es compleix que $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^{n-1} d(x_1, x_2)$. Ho provem *per inducció.*

$n = 1$ En aquest cas, tenim una igualtat.

HI $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^{n-1} d(x_1, x_2)$.

$n + 1$ Volem provar $d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k^n d(x_1, x_2)$. Fent servir que T és contractiva, tenim:

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(T(x_n), T(x_{n+1}) \leq kd(x_n, x_{n+1}) \leq k \cdot k^{n-1} d(x_1, x_2).$$

Ara passem a provar que la successió $(x_n)_n$ és de Cauchy. Podem suposar que $x_1 \neq x_2$ (ja que, si no, el resultat és trivial al ser sempre $x_n = x_1$). Siguin n, m tals que $m > n$. Per la desigualtat triangular, i usant $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^{n-1} d(x_1, x_2)$, tenim:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) = \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq d(x_1, x_2) \sum_{j=n}^{m-1} k^{j-1},$$

que tendeix a zero quan ambdues $m, n \to \infty$, al ser la cua de la sèrie geomètrica $\sum_j k^{j-1}$, que és convergent al ser $k < 1$. Llavors, donat $\varepsilon > 0$ hi ha $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a $n, m \geq n_0$ es compleix:

$$\sum_{j=n}^{m-1} k^{j-1} < \frac{\varepsilon}{d(x_1, x_2)} \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon,\ n, m \geq n_0 \implies (x_n)_n \text{ és de Cauchy.}$$

Al ser X complet, i com $(x_n)_n$ és de Cauchy, tenim que també és convergent. Per tant, existeix $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Seguidament, observem que la condició $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$ implica la continuïtat de T, amb el que obtenim:

$$x = \lim_n x_{n+1} = \lim_n T(x_n) = T\left(\lim_n x_n\right) = T(x) \implies x \text{ és punt fix de } T.$$

Finalment, n'hem de comprovar la unicitat. Si $y \in X$ és també un punt fix de T, tenim que $d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$; com $k < 1$, necessàriament $d(x, y) = 0$ i, per tant, $x = y$. ■

Si $T : X \longrightarrow X$ i $k \in \mathbb{N}$ posem $T^k(x) = T^{k-1}(T(x))$.

Corol·lari 2.7.3. *Sigui X espai mètric complet. Si $T : X \longrightarrow X$ és una aplicació de manera que és contractiva per a algun $k \in \mathbb{N}$, llavors T té un únic punt fix.*

Demostració. Aplicant el teorema del punt fix de Banach a T^k se segueix que T^k té un únic punt fix x_0. Llavors:

$$T^k(T(x_0)) = T^{k+1}(x_0) = T(T^k(x_0)) = T(x_0).$$

Per tant, $T(x_0)$ també és punt fix de T^k, amb el que $T(x_0) = x_0$ i x_0 és punt fix de T. Pel que fa a la unicitat, si y_0 és un altre punt fix de T,

$$T^k(y_0) = T^{k-1}(T(y_0)) = T^{k-1}(y_0) = y_0 \implies y_0 \text{ és punt fix de } T^k \implies y_0 = x_0.$$ ■

Aquesta última demostració no entra formalment, però ho fa indirectament, ja que si se'ns demana provar que T té un únic punt fix haurem d'usar el raonament anterior.

III

Successions i sèries de funcions

3.1 Conceptes previs

Definició 3.1.1 (Convergència puntual). Siguin X, Y espais mètrics i $f_n : X \longrightarrow Y$ una funció que forma part de $(f_n)_n$, una successió de funcions. Diem que $(f_n)_n$ convergeix puntualment a una funció $f : X \longrightarrow Y$ si $f(x) = \lim_n f_n(x)$ per a tot $x \in X$. En aquest cas, f s'anomena *límit puntual de* $(f_n)_n$.

Per tal de definir el límit puntual d'una sèrie de funcions, ens cal considerar una successió de funcions $(f_n)_n$, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definició 3.1.2 (Suma puntual). f és la suma puntual de la sèrie $\sum_{n\geq 1} f_n$ si per a tot $x \in X$ es compleix:

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

Observació 3.1.3.

1. El límit puntual de funcions contínues no és, en general, una funció contínua.
   Per exemple, considerem per $n \in \mathbb{R}$ la successió de funcions contínues $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per $f_n(x) = x^n$. Clarament tenim que $\lim_n f_n(x)$ és una f que val 0 si $0 \leq x < 1$ i 1 si $x = 1$, que no és contínua.
2. Una sèrie de funcions contínues no és, en general, contínua.

Exemple 3.1.4. Considerem la successió de funcions $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definides per $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$. Les funcions f_n són contínues i, per tant, integrables en $[0,1]$. Per altra banda, $f_n(0) = n^2 \cdot 0 \cdot 1^n = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$; anàlogament, $f_n(1) = n^2 \cdot 1 \cdot 0^n = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per a $x \in (0,1)$:

$$\lim_{n\to\infty} n^2x(1-x^2)^n = \lim_{n\to\infty} x\frac{n^2}{(1-x^2)^{-n}} = 0,$$

ja que l'exponencial domina sobre la quadràtica, i $(1-x^2)^{-n} \to +\infty$ quan $n \to \infty$. Per tant, per a tot $x \in [0,1]$ es té que $f(x) = \lim_n f_n(x) = 0$. En particular, tenim que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Ara bé:

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^2 \int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = \frac{n^2}{2n+2} \to \infty.$$

Per tant, en aquest cas,

$$\int_0^1 \lim_n f_n(x)\,dx \neq \lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx\,.$$

3.2 Convergència uniforme

Suposarem X, Y espais mètrics, $(f_n)_n$ una successió de funcions $f_n : X \longrightarrow Y$ i $f : X \longrightarrow Y$ una funció qualsevol.

Definició 3.2.1 (Convergència uniforme, *successió* de funcions)**.** Diem que $(f_n)_n$ convergeix a f uniformement en X si *donat* (per a tot) $\varepsilon > 0$ hi ha $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $n \geq n_0$ es compleix que $d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, per a tot $x \in X$.

Es podria dir que *les successives funcions es van acostant indefinidament cap a f*. La convergència uniforme és més forta que la puntual (uniforme implica puntual, però puntual no implica pas uniforme).

Definició 3.2.2 (Convergència uniforme, *sèrie* de funcions)**.** Suposem ara que $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Diem que una sèrie de funcions $\sum_{k \geq 1} f_k$ convergeix uniformement en X si la successió de funcions $(s_n)_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ convergeix uniformement en X.

Teorema 3.2.3. *Sigui X espai mètric i $(f_n)_n$ successió de funcions tal que $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Són equivalents:*

1. *La successió $(f_n)_n$ convergeix uniformement en X.*
2. *La successió $(f_n)_n$ és uniformement de Cauchy; és a dir, donat $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n, m \geq n_0$ es compleix $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ per a tot $x \in X$.*

Demostració.

$\boxed{\Rightarrow}$ Suposem que hi ha $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que $f_n \to f$ uniformement en X. Per la definició de convergència uniforme, tenim que, donat $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $n \geq n_0$ tenim $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ per a tot $x \in X$. Aleshores tenim que, donat $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $m, n \geq n_0$ es compleix:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Per tant, la successió $(f_n)_n$ és de Cauchy.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si la successió és uniformement de Cauchy, per a tot $x \in X$, la successió $(f_n(x))_n$[1] és una successió de Cauchy de $\mathbb{R}$ i, per tant, convergent ($\mathbb{R}$ és un espai complet per successions). Llavors, existeix $f(x)$ amb $\lim_m f_m(x) = f(x)$. Ara, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$, tenim:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \xrightarrow{m \to \infty} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Per tant, la convergència és uniforme. ■

[1] Podem pensar-la com una successió $(y_n)_n$ en què tenim $y_n = f(x_n)$, $y_n \in \mathbb{R}$ i no en X, com podríem erròniament creure.

Exercici 3.2.4. *Siguin X, Y espais mètrics tal que Y és complet. Sigui $(f_n)_n$, $f_n : X \longrightarrow Y$ una successió de funcions. Són equivalents:*

1. *La successió de funcions $(f_n)_n$ convergeix uniformement en X.*
2. *Donat $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n, m \geq n_0$ es compleix que $d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ per a tot $x \in X$.*

Demostració. Molt senzill, ja que si Y és complet, tota successió uniformement convergent és uniformement de Cauchy, que és justament la segona condició. ■

Ara dos resultats *molt* útils en convergència uniforme de successions.

Proposició 3.2.5 (Demostrant convergència uniforme). *Siguin X, Y espais mètrics, $(f_n)_n$, $f_n : X \longrightarrow Y$ una successió de funcions i $f : X \longrightarrow Y$ una funció de manera que $f(x) = \lim_n f_n(x)$ per a tot $x \in X$. Sigui:*

$$M_n = \sup_x d_Y(f_n(x), f(x)).$$

Aleshores, $(f_n)_n$ convergeix a f uniformement en X si, i només si, $M_n \to 0$.

Exemple 3.2.6. Considerem la successió de funcions $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f_n(x) = \sqrt{n}x(1-x)^n$. Passem a provar que f_n convergeix a zero uniformement en $[0,1]$. Per la proposició anterior, ens cal provar que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \to 0.$$

Com que les funcions f_n *són positives*, ens cal provar que $\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) \to 0$. En ser les funcions f_n contínues i l'interval $[0,1]$ compacte, sabem que f_n té un màxim absolut en $[0,1]$. Per tant, *el suprem és un màxim*, i per tant hem de provar que $\max_{x\in[0,1]} f_n(x) \to 0$. En ser f_n *derivables*, podem calcular els punts crítics

$$f_n'(x) = \sqrt{n}(1-x)^n - \sqrt{n}xn(1-x)^{n-1} = \sqrt{n}(1-x)^{n-1}((1-x)-nx) = 0 \iff x = 1,\ x = \frac{1}{n+1}.$$

Com que en els extrems de l'interval $x = 0$ i $x = 1$ la funció f_n val zero, el màxim absolut s'assoleix en el punt $x = \frac{1}{n+1}$ i, per tant:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\sqrt{n}}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n,$$

que tendeix a zero ja que:

$$\lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e};$$

i clarament $\frac{\sqrt{n}}{(n+1)} \to 0$.

Teorema 3.2.7 (Criteri M de Weierstrass). *Sigui X espai mètric i $(f_n)_n$ una successió de funcions tal que $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Suposem que $|f_n(x)| \leq M_n$ per a tot $x \in X$ (tota funció de la successió està acotada). Si $\sum_n M_n < +\infty$, aleshores la sèrie $\sum_n f_n$ convergeix uniformement en X.*

Exemple 3.2.8. Anem a provar que la sèrie de funcions $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$ convergeix uniformement en $[-a,a]$ per a tot $a > 0$. En aquest cas, $f_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$. Si fem servir l'estimació trivial $\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq 1$, obtindríem $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ que no ens serveix ja que la sèrie $\sum_n \frac{1}{n}$ és divergent. Ens cal fer servir una millor estimació. Fent servir la desigualtat $|\sin y| \leq |y|$, que és vàlida per a tot $y \in \mathbb{R}$, obtenim

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{a}{n^2}, \text{ per } |x| \leq a \xrightarrow{M_n = \frac{a}{n^2}} \sum_{n\geq 1} M_n = a \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Pel criteri M de Weierstrass, la sèrie $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$ convergeix uniformement en $[-a,a]$.

3.3 Convergència uniforme i continuïtat i acotació

Teorema 3.3.1 (Convergència uniforme i continuïtat). *Siguin X, Y espais mètrics i $f : X \longrightarrow Y$ una funció. Sigui $(f_n)_n$ una successió de funcions amb $f_n : X \longrightarrow Y$ contínua que convergeixen a f uniformement en X. Aleshores, f és contínua.*

Demostració. Sigui $a \in X$. Volem provar que f és contínua en a. Sigui $\varepsilon > 0$, com que $f_n \to f$ uniformement en X, existeix $n_1 \in \mathbb{N}$ de manera que per a $n \geq n_1$ es compleix que $d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$, per a tot $x \in X$. Com f_n és contínua en a, per a aquest $\varepsilon > 0$ existeix $\delta_{a,n} > 0$ tal que si $d_X(x,a) < \delta_{a,n}$, aleshores $d_Y(f_n(x), f_n(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Fixant $n_2 \geq n_1$, tenim que si $d_X(x,a) < \delta_{a,n_2}$, aleshores:

$$d_Y(f(x), f(a)) \leq d_Y(f(x), f_{n_2}(x)) + d_Y(f_{n_2}(x), f_{n_2}(a)) + d_Y(f_{n_2}(a), f(a)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

En conseqüència, f és contínua en el punt a. ■

Teorema 3.3.2. *$\mathcal{C}([a,b])$ amb la distància del suprem és un espai mètric tancat.*

Demostració. Recordem que $\mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ contínues}\}$ és un espai mètric amb la distància del suprem,

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Recordem també que una successió $(f_n)_n \subset \mathcal{C}([a,b])$ convergeix a f en $\mathcal{C}([a,b])$ si $d_\infty(f_n, f) \to 0$. És a dir, si $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$. Per tant, el fet que $f_n \to f$ en $\mathcal{C}([a,b])$ és equivalent a què f_n convergeixi a f uniformement en $[a,b]$. Ens queda veure que és complet. Sigui $(f_n)_n$ una successió de Cauchy de $\mathcal{C}([a,b])$. Hem de provar que existeix $f \in \mathcal{C}([a,b])$ de manera que $f_n \to f$ en $\mathcal{C}([a,b])$.

Pel comentari anterior, això és equivalent a veure que existeix $f \in \mathcal{C}([a,b])$ de manera que $f_n \to f$ uniformement en $[a,b]$. En ser $(f_n)_n$ una successió de Cauchy, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a $n, m \geq n_0$ es compleix que $\sup_x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. És a dir, per a cada $x \in [a,b]$ la successió $(f_n)_n$ és de Cauchy i, per tant, existeix una funció $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que $f_n \to f$ puntualment en $[a,b]$. Però si fixem $n \geq n_0$ i fem tendir $m \to \infty$ en la desigualtat anterior, obtenim que $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, amb el que $(f_n)_n \to f$ uniformement en $[a,b]$. Com les funcions f_n són contínues, pel teorema de convergència uniforme i continuïtat tenim que f també és contínua i, per tant, $\mathcal{C}([a,b])$ és complet. ∎

Corol·lari 3.3.3. *Sigui X espai mètric i $(f_n)_n$, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una successió de funcions contínues. Si $\sum_{n\geq 1} f_n$ convergeix uniformement en X, aleshores $S = \sum_{n\geq 1} f_n$ és contínua.*

Proposició 3.3.4. *Siguin X, Y espais mètrics, $f : X \longrightarrow Y$ una funció, i $(f_n)_n$ una successió de funcions, amb $f_n : X \longrightarrow Y$ contínues. Suposem que $f_n \to f$ uniformement en X, i que $x_n \to x$ en X. Aleshores, $f_n(x_n) \to f(x)$ en Y.*

Teorema 3.3.5 (Convergència uniforme i acotació). *Sigui X espai mètric i sigui $(f_n)_n$ una successió de funcions $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ acotades. Si f_n convergeix uniformement en X cap a una funció $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, aleshores f és una funció acotada.*

Demostració. Com f_n són acotades, existeix K_n amb $|f_n(x)| \leq K_n$ per a tot $x \in X$. Com $f_n \to f$ uniformement en X, existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$[2] tenim $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, i triem $\varepsilon = 1$. Llavors, per a tot $x \in X$ tenim:

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq 1 + K_{n_0} < +\infty \implies f \text{ acotada.}$$ ∎

3.4 Dini

En el cas que l'espai de sortida sigui compacte, una successió de funcions contínues que convergeix puntualment a una funció contínua de manera decreixent, hi convergeix uniformement.

Teorema 3.4.1 (de Dini). *Sigui K un espai mètric* ***compacte****, i $(f_n)_n$ una successió de funcions contínues definida per $f_n : K \longrightarrow \mathbb{R}$ que convergeixen puntualment a una funció contínua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$. Si per a tot n tenim $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ per a tot $x \in K$, aleshores $(f_n)_n$ convergeix uniformement a f en K.*

[2] Prenem la distància del suprem entre f i f_n: $d(f_n, f) = \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$.

Lema 3.4.2. *Sigui X espai mètric finit. Sigui $\{K_n\}_n$ una col·lecció de subconjunts compactes de X de manera que tota subcol·lecció finita $\{K_\alpha\}_\alpha$ té intersecció no buida. Llavors, $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$.*

Demostració. Ho provarem per reducció a l'absurd. Sigui $K_j \in \{K_n\}_n$, i suposem que, per a tot $x \in K_j$ tenim $x \notin \bigcap_n K_n$. Com tot compacte és tancat, tenim que $G_\alpha = K_\alpha^c$ és obert. Aleshores tenim

$$K_j \subset \left(\bigcap_n K_n\right)^c = \bigcup_n K_n^c = \bigcup_n G_n.$$

Per tant, $\{G_n\}_n$ és un recobriment per oberts de K_j. En ser K_j compacte, en podem extreure'n un subrecobriment finit. És a dir, existeixen $n_1, \ldots, n_m$ de manera que $K_j \subset G_{n_1} \cup \cdots \cup G_{n_m}$. Per tant,

$$K_j \cap K_{n_1} \cap \cdots \cap K_{n_m} = \emptyset,$$

en contradicció amb la nostra hipòtesi de que tota subcol·lecció finita té intersecció no buida. Per tant, existeixen j i $x \in K_j$ de manera que $x \in \cap K_n$. ■

Demostració del teorema de Dini, 3.4.1. Prenem $g_n = f_n - f$, ambdues contínues. $f_n - f \searrow 0$, doncs $f_n \searrow f$; així que podem suposar $g_n \equiv 0$. Fixem $\varepsilon > 0$ i definim $K_n = \{x \in K \mid g_n(x) \geq \varepsilon\}$. Clarament, $K_n = g_n^{-1}([\varepsilon, +\infty))$. Llavors K_n és un subconjunt tancat del compacte K, per ser antiimatge d'un tancat per una funció contínua (g_n^{-1} de g_n contínua): com tot subconjunt tancat d'un compacte és compacte, K_n és un compacte per a tot n.

Si $x \in \bigcap_n K_n$, aleshores $g_n(x) \geq \varepsilon$ per a tot n, la qual cosa és una contradicció amb el fet que $g_n(x) \to 0$. Per tant, $\bigcap_n K_n = \emptyset$. Aplicant 3.4.2, sabem que hi ha $n_1, \ldots, n_k$ de manera que:

$$K_{n_1} \cap \cdots \cap K_{n_k} = \emptyset. \tag{3.1}$$

Com les funcions g_n són decreixents, tenim que $K_n \subset K_{n+1}$; amb el que de (3.1) deduïm que hi ha N amb $K_N = \emptyset$ i, per tant, $g_N(x) < \varepsilon$ per a tot $x \in K$. Com la successió $(g_n)_n$ és decreixent ($g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ per a tot $x \in K$), $g_n(x) < \varepsilon$, $n \geq N$, per a tot $x \in K$; és a dir, $g_n \to 0$ uniformement en K. ■

3.5 Derivació

Teorema 3.5.1 (de convergència uniforme i derivació). *Sigui $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una successió de funcions derivables en $[a,b]$. Suposem que:*

1. *Existeix $x_0 \in [a,b]$ amb $f_n(x_0) \to f(x_0)$.*
2. *La successió de derivades $(f_n')_n$ convergeix uniformement en $[a,b]$ a una funció g.*

Aleshores, la successió $(f_n)_n$ convergeix uniformement en $[a,b]$ a una funció f derivable en $[a,b]$. A més a més, $f' = g$.

Demostració, no entra. D'entrada observem que el segon apartat, 2., implica que la successió de derivades $(f'_n)_n$ és uniformement de Cauchy en $[a,b]$. Així doncs, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $n, m \geq n_0$ tenim $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| = |f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Anàlogament:

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \ \forall t \in [a,b].$$

Aplicant el teorema del valor mig a la funció $f_n - f_m$ sabem que per a tot $x \in [a,b]$ existeix un $\xi_x \in [x, x_0]$ amb:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| &= |(f_n - f_m)(x - x_0)| = |(f_n - f_m)'(\xi_x)| \cdot |x - x_0| \\ &\overset{|x-x_0| \leq b-a}{<} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Acabem obtenint, per a tot $x \in [a,b]$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

És a dir, hem provat que la successió $(f_n)_n$ és uniformement de Cauchy en $[a,b]$. Per tant, existeix una funció $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que $f_n \to f$ uniformement en $[a,b]$. Al ser f_n derivable per a tot n, en particular són contínues i pel teorema de convergència uniforme i continuïtat se segueix que $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Queda provar que f és derivable amb $f' = g$. Fixem $x \in [a,b]$ i considerem la successió de funcions $(\phi_n)_n$ tal que $\phi_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per:

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x}, & \text{si } t \neq x, \\ f'_n(x), & \text{si } t = x. \end{cases}$$

ϕ_n és clarament contínua en $t \neq x$, en ser quocient de funcions contínues amb $t \neq x$. Per veure la continuïtat en $t = x$, ens cal veure que $\lim_{t \to x} \phi_n(t) = \phi_n(x)$, per a tot n; és a dir:

$$\lim_{t \to x} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} = f'_n(x),$$

que és cert, al ser f_n derivable per a tot n. Per tant, ϕ_n és contínua en $[a,b]$ per a tot n. A més, el límit puntual de ϕ_n ve donat per:

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x)}{t-x}, & \text{si } t \neq x, \\ g(x) = \lim_n f'_n(x), & \text{si } t = x. \end{cases}$$

Passem a veure que la convergència és, en efecte, uniforme:

$$|\phi_n(x) - \phi_m(x)| = |f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \ m, n \geq n_0$$

Per altra banda, si $t \neq x$, podem aplicar el teorema del valor mig a $(f_n - f_m)$, tenim:

$$\phi_n(t) - \phi_m(t) = \frac{(f_n - f_m)(t) - (f_n - f_m)(x)}{t - x} = (f_n - f_m)'(c), \ c \in [t, x].$$

La successió $(\phi_n)_n$ és, doncs, uniformement de Cauchy en $[a,b]$ i, per tant, convergeix uniformement en $[a,b]$ al seu límit puntual. Com les funcions ϕ_n són totes contínues, pel teorema de convergència uniforme i continuïtat tenim que ϕ també és contínua en $[a,b]$. Per tant, per a $x \in [a,b]$ tenim:

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \phi(t) = \phi(x) = g(x) \implies f \text{ derivable amb } f' = g. \qquad \blacksquare$$

3.6 Integració

Teorema 3.6.1 (Convergència uniforme i integració). *Sigui $(f_n)_n$ una successió de funcions, on $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és integrable Riemann per a tot n. Suposem que $(f_n)_n$ convergeix uniformement en $[a,b]$ cap a una funció $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$; aleshores, $f \in \mathscr{R}([a,b])$ i, a més a més:*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Demostració. Sigui $\varepsilon_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)|$, on $x \in [a,b]$. Sabem que $f_n \to f$ uniformement en $[a,b]$ si, i només si, $\varepsilon_n \to 0$. Clarament tenim que:

$$f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n, \ \forall x \in [a,b].$$

Com $f_n \in \mathscr{R}([a,b])$, també $f_n - \varepsilon_n \in \mathscr{R}([a,b])$ i, per tant:

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n) = \underline{\int_a^b} (f_n - \varepsilon_n) \leq \underline{\int_a^b} f.$$

Al seu torn, $f_n + \varepsilon_n \in \mathscr{R}([a,b])$, amb el que:

$$\overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} (f_n + \varepsilon_n) = \int_a^b (f_n + \varepsilon_n).$$

Així doncs, obtenim:

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon) - \int_a^b (f_n - \varepsilon_n) = 2 \cdot \varepsilon_n (b-a).$$

Com que $\varepsilon_n \to 0$ quan $n \to \infty$, obtenim que $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, que prova que $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Finalment, al ser $f \in \mathscr{R}([a,b])$, tenim: $\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, amb el que:

$$\int_a^b f - \varepsilon_n(b-a) \leq \int_a^b f_n \leq \int_a^b f + \varepsilon_n(b-a) \xrightarrow{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f. \qquad \blacksquare$$

Corol·lari 3.6.2. *Siguin $f_n \in \mathscr{R}([a,b])$ de manera que la sèrie $f = \sum_n f_n$ convergeix uniformement en $[a,b]$; llavors, $f \in \mathscr{R}([a,b])$ amb:*

$$\int_a^b f = \sum_n \int_a^b f_n.$$

Teorema 3.6.3 (Criteri de Dirichlet). *Sigui X un espai mètric, $(f_k)_k, (g_k)_k$ dues successions de funcions tals que $f_k, g_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Considerem la sèrie de funcions $\sum_k f_k(x) \cdot g_k(x)$. Posem, també, $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Suposem que:*

1. *$(F_n)_n$ és uniformement acotada, és a dir, existeix $K > 0$ (independent de n) de manera que $\sup_x |F_n(x)| \leq K$ per a tot n (i $x \in X$).*
2. *$g_1(x) \geq g_2(x) \geq \cdots \geq g_k(x)$, per a tot $x \in X$.*
3. *$g_n \to 0$ uniformement en X.*

Aleshores, la sèrie $\sum_k f_k g_k$ convergeix uniformement en X.

Observació 3.6.4. Moltes vegades el criteri de Dirichlet es fa servir quan el criteri M de Weierstrass no ens serveix, normalment degut a què la convergència ve donada per algunes cancel·lacions.

IV

Espai de les funcions contínues

4.1 Conceptes previs

Com a conseqüència del teorema de continuïtat i convergència uniforme, es compleix el següent teorema.

Teorema 4.1.1. *Sigui X un espai mètric compacte. Tenim que $C_{\mathbb{R}}(X)$ amb la distància del suprem és un espai de Banach (espai mètric complet).*

Demostració. Si X és un espai compacte, posem $C_{\mathbb{R}}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}\}$. Al ser X compacte, sabem que tota funció contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ és acotada, amb el que $\|f\| : \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$. També sabem que $C_{\mathbb{R}}(X)$ és un espai mètric amb la distància del suprem:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Recordem que una successió $(f_n)_n \subset C_{\mathbb{R}}(X)$ convergeix a f en $C_{\mathbb{R}}(X)$ vol dir que $d_\infty(f_n, f) \to 0$, és a dir:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Per tant, el fet que $f_n \to f$ en $C_{\mathbb{R}}(X)$ és equivalent a què f_n convergeixi a f uniformement en X. Sigui $(f_n)_n$ una successió de Cauchy de $C_{\mathbb{R}}(X)$. Per tant, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix n_0 tal que per a tot $m > n \geq n_0$ la distància del suprem $\sup_x |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Així, per a tot x tenim $(f_n(x))_n \subset \mathbb{R}$ és una successió de Cauchy que és, en efecte, convergent i hi ha una funció $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que $f_n \to f$ uniformement en X; és a dir, tal que $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Fixem $n \geq n_0$. Per a tot $m > n$ i per a tot $x \in X$ tenim $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$; quan $m \to \infty$ aleshores $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Com tenim $f_n \to f$ uniformement en X i per a tot n f_n és contínua en X, pel teorema de convergència uniforme i continuïtat tenim $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ i $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quan $n \to \infty$. En efecte, $C_{\mathbb{R}}(X)$ és un espai complet. ■

Observació 4.1.2. De la mateixa manera, es pot provar que si X és un espai mètric compacte i Y és un espai mètric complet, aleshores l'espai de les funcions contínues $\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y, f \in \mathcal{C}\}$ amb la distància del suprem $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), f(y))$ és un espai mètric complet. *Moltes vegades posem simplement $\mathcal{C}[a, b] = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$ quan no hi ha confusió.* Denotem per $\mathcal{C}^1[a, b]$ l'espai de totes les funcions $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables amb derivada contínua en $[a, b]$. És fàcil comprovar que:

$$4d(f, g) = d_\infty(f, g) + d_\infty(f', g') = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |f'(x) - g'(x)|$$

és una distància en $C^1([a,b])$.

Teorema 4.1.3. *$\mathcal{C}^1([a,b])$ amb la distància anterior és un espai mètric complet.*

Demostració. Ja hem comentat que és un espai mètric, queda veure que és, en efecte, un espai mètric complet. Sigui $(f_n)_n$ una successió de Cauchy en $\mathcal{C}^1([a,b])$. Volem veure que hi ha $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ de manera que $f_n \to f$ uniformement en $\mathcal{C}^1([a,b])$. Al ser f de Cauchy, donat $\varepsilon > 0$ hi ha $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a $n, m \geq n_0$ tenim:

$$d_\infty(f_n, f_m) + d_\infty(f'_n, f'_m) < \varepsilon.$$

En particular, tenim $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$ i també $d_\infty(f'_n, f'_m) < \varepsilon$, amb el que $(f_n)_n$ és una successió de Cauchy de $\mathcal{C}([a,b])$ i també $(f'_n)_n$ és una successió de Cauchy en $\mathcal{C}([a,b])$. Com que $\mathcal{C}([a,b])$ és complet, hi ha $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ de manera que $f_n \to f$ en $\mathcal{C}([a,b])$ i també $f'_n \to g$ uniformement en $[a,b]$. Pel teorema de derivació i convergència uniforme, se segueix que f és derivable en $[a,b]$ amb $f' = g$. Com que $g \in \mathcal{C}([a,b])$, obtenim que $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Finalment, que $f_n \to f$ en $\mathcal{C}^1([a,b])$ vol dir que $d_\infty(f_n, f) \to 0$ i també que $d_\infty(f'_n, f) \to 0$. És a dir, que $f_n \to f$ uniformement en $[a,b]$ i que $f'_n \to f'$ uniformement en $[a,b]$, que és el que tenim. Per tant, $\mathcal{C}^1([a,b])$ és un espai mètric complet. ■

4.2 Weierstrass

Teorema 4.2.1 (Teorema d'aproximació de Weierstrass). *Sigui $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Hi ha una successió de polinomis $(p_n)_n$ amb $p_n \to f$ uniformement en $[a,b]$.*

Demostració, no entra. Fent el canvi $x \longmapsto \frac{x-a}{b-a}$ podem suposar que $[a,b] = [0,1]$. També podem suposar que $f(0) = f(1) = 0$; en cas contrari, si definim $g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$ tenim $g \in \mathcal{C}([0,1])$, $g(1) = g(0) = 0$ i, a més, $f - g = p$ és un polinomi. Per tant, si tenim provat el cas particular esmentat, sabem que hi ha polinomis q_n amb $q_n \to g$ uniformement en $[0,1]$. Llavors, $p_n = p + q_n$ són polinomis i $p_n \to p + g = f$ uniformement en $[0,1]$. Així doncs, suposem que tenim $f \in \mathcal{C}([0,1])$ amb $f(0) = f(1) = 0$ i volem provar que hi ha polinomis p_n amb $p_n \to f$ uniformement en $[0,1]$.

Estenem f a tot $\mathbb{R}$ definint $f \equiv 0$ en $\mathbb{R} \setminus [0,1]$; llavors, f és uniformement contínua. En efecte, com $f \in \mathcal{C}([0,1])$ i $[0,1]$ és un compacte de la recta real, llavors f és uniformement contínua en $[0,1]$ i, per tant, donat $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ de manera que si $x, y \in [0,1]$ amb $|x - y| < \delta$, aleshores $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Volem veure que això també es compleix per a tot $x, y \in \mathbb{R}$ amb $|x - y| < \delta$. Aquest fet és obvi si $x, y \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ ja que llavors $f(x) = f(y) = 0$. Només ens queda considerar el cas en què $x \in [0,1]$ i $y \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$. En aquest cas, tenim $|f(x) - f(y)| = |f(x)|$. Si $|x - y| < \delta$, aleshores o bé $|x - 0| < \delta$ o bé $|x - 1| < \delta$, amb el que $|f(x)| = |f(x) - f(1)| < \varepsilon$, en el cas en què $|x - 1| < \delta$. El cas $|x - 0| < \delta$ es fa igual.

Per $n \in \mathbb{N}$, definim $Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n$ on c_n és una constant complint que:

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1.$$

Es compleix que $c_n \leq \sqrt{n}$. Aquesta és una afirmació que provarem al final, però que és necessària d'aquí en endavant. Per $0 \leq x \leq 1$ definim:

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)\,dt\,.$$

Fent servir primer $f \equiv 0$ en $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ i després fent el canvi de variable $u = x+t$, tenim:

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,dt = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\,dt = \int_{0}^{1} f(u)Q_n(u-x)\,du = c_n \int_{0}^{1} f(u)(1-(u-x)^2)^n\,du\,.$$

D'aquí veiem que P_n és un polinomi. Hem de veure dues coses: $P_n \to f$ uniformement en $[0,1]$ i l'afirmació que hem fet abans.

1. $P_n \to f$ *uniformement en* $[0,1]$. Com que f és uniformement contínua en $\mathbb{R}$, donat $\varepsilon > 0$ existeix $0 < \delta < 1$ de manera que $|x-y| < \delta$ implica que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sigui $M = \sup|f(x)| > 0$ (si $M = 0$, llavors $f \equiv 0$ i no hi havia res a provar). Com que $\int_{-1}^{q} Q_n(t)\,dt = 1$ i $Q_n(t) \geq 0$, per a tot $x \in [0,1]$ tenim:

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,dt - f(x)\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,dt \right| = \left| \int_{-1}^{1} (f(x+t) - f(x))Q_n(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\,dt \\ &= \int_{|t|<\delta} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)\,dt + \int_{\delta \leq |t| \leq 1} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)\,dt\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Observem que si $|t| < \delta$ tenim $|x+t-x| = |t| < \delta$, amb el que aplicant $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ obtenim que $|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|t| < \delta$. Per tant:

$$\int_{|t|<\delta} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t|<\delta} Q_n(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^{1} Q_n(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Per altra banda, com que $c_n \leq \sqrt{n}$, llavors:

$$Q_n(t) = c_n(1-t^2)^n \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n,\ \delta \leq |t| \leq 1.$$

Com que $0 < (1-\delta^2) < 1$, llavors $\sqrt{n}(1-\delta^2)^n \to 0$ quan $n \to \infty$. Per tant, hi ha n_0 de manera que:

$$4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2},\ n \geq n_0.$$

Llavors, com que $|f(x+t)-f(t)| \leq |f(x+t)|+|f(t)| \leq 2M$ obtenim per $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}\int_{\delta\leq|t|\leq 1} |f(x+t)-f(x)|Q_n(t)\,dt \leq 2M\int_{\delta\leq|t|\leq 1} Q_n(t)\,dt \leq 2M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n\int_{\delta\leq|t|\leq 1} dt \\ \leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Agafem les estimacions obtingudes en (4.2) i (4.3) i les posem en (4.1). Obtenim que, per a tot $x \in [0,1]$,

$$|P_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ n \geq n_0.$$

És a dir, $P_n \to f$ uniformement en $[0,1]$.

2. Finalment veiem que $c_n \leq \sqrt{n}$. La funció $h(x) = (1-x^2)^n - 1 + nx^2$ compleix $h(0) = 0$ i $h'(x) \geq 0$ per $x \in [0,1]$. Llavors h és creixent i, per tant, $h(x) \geq h(0) = 0$ per $x \in [0,1]$. És a dir,

$$(1-x^2)^n \geq 1-nx^2,\ 0 \leq x \leq 1.$$

Per tant:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx = 2\int_0^1(1-x^2)^n\,dx \geq 2\int_0^1(1-nx^2)\,dx \geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)\,dx \\ = 2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{4}{3\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Llavors,

$$1 = c_n\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx \geq \frac{c_n}{\sqrt{n}} \implies c_n \leq \sqrt{n}.$$ ■

Observació 4.2.2. Si $h \in \mathcal{C}([0,1])$, amb $h(0) = 0$, llavors hi ha polinomis p_n amb $p_n(0) = 0$ de manera que $p_n \to h$ uniformement en $[0,1]$. En efecte, pel teorema d'aproximació de Weierstrass, sabem que hi ha polinomis q_n amb $q_n \to h$ uniformement en $[0,1]$. En particular, tenim que $q_n(0) \to h(0) = 0$. Si definim $p_n(x) = q_n(x) - q_n(0)$, tenim $p_n(0) = 0$ i $p_n \to h - \lim_n q_n(0) = h$ uniformement en $[0,1]$.

4.3 Stone-Weierstrass

El teorema d'aproximació de Weierstrass va ser generalitzat a un context més abstracte. Si K és un espai mètric compacte, sigui $C_{\mathbb{R}}(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{C}(K)\}$. Recordem que $C_{\mathbb{R}}(K)$ és un espai mètric complet amb la distància del suprem:

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)-g(x)|.$$

Recordem també que $f_n \to f$ en $C_{\mathbb{R}}(K)$ si, i només si, $f_n \to f$ uniformement en K.

Definició 4.3.1 (Subàlgebra). Una subàlgebra d'A de $C_{\mathbb{R}}(K)$ és un subespai vectorial de $C_{\mathbb{R}}(K)$ que és estable pel producte (si $f, g \in A$, llavors $fg \in A$).

Notació 4.3.2. $\overline{A}$ denota la clausura d'A en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$. Tenim $g \in \overline{A}$ si, i només si, existeix $f_n \in A$ tal que $f_n \to g$ uniformement en K.

Lema 4.3.3. *Si A és una subàlgebra de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$, llavors $\overline{A}$ també és subàlgebra de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$.*

Demostració. Donades $f, g \in \overline{A}$, volem provar que $fg \in \overline{A}$. Com que $f, g \in \overline{A}$, llavors existeixen $f_n, g_n \in A$ amb $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ i $\|g - g_n\|_\infty \to 0$. Al ser A una subàlgebra de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$, tenim que $f_n g_n \in A$. Passem a provar que $f_n g_n \to fg$ uniformement en K, equivalent a què $\|fg - f_n g_n\| \to 0$ que provaria $fg \in \overline{A}$. Per la desigualtat triangular tenim:

$$\|fg - f_n g_n\|_\infty = d_\infty(fg, f_n g_n) \leq d_\infty(fg, fg_n) + d_\infty(fg_n, f_n g_n).$$

Ara tenim:

$$d_\infty(fg, fg_n) = \|fg - fg_n\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)g(x) - f(x)g_n(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g - g_n\|_\infty \to 0.$$

De la mateixa manera tenim:

$$d_\infty(fg_n, f_n g_n) \leq \|g_n\|_\infty \|f - f_n\|_\infty.$$

Al ser $(g_n)_n$ convergent, aleshores és uniformement acotada, és a dir, hi ha $M > 0$ independent de n amb $\|g_n\|_\infty \leq M$ per a tot n, on $M = \max\{\|f_1\|_\infty, \ldots, \|f_{n+1}\|_\infty, 1 + \|f\|_\infty\}$. Aleshores:

$$d_\infty(fg_n, f_n g_n) \leq M\|f - f_n\|_\infty \to 0,$$

i hem provat que $\|fg - f_n g_n\|_\infty \to 0$, com volíem veure. ■

Definició 4.3.4 (Separa punts). Diem que $A \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ separa punts si, i només si, donats $x, y \in K$ amb $x \neq y$, hi ha $f \in A$ amb $f(x) \neq f(y)$; és a dir, si A conté almenys una funció f que sigui injectiva.

Definició 4.3.5 (No s'anul·la en cap punt). Diem que $A \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ no s'anul·la en cap punt si per a tot $x \in K$ hi ha $h_x \in A$ amb $h_x(x) \neq 0$. *És clar que si A conté les constants, aleshores A no s'anul·la en cap punt.*

Teorema 4.3.6 (de Stone-Weierstrass). *Sigui K un compacte i $A \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ complint:*

1. *A és subàlgebra de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$,*
2. *A separa punts,*
3. *A no s'anul·la en cap punt.*

Llavors, A és dens en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$. És a dir, donada $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ hi ha una successió $(f_n)_n \subset A$ amb $f_n \to f$ uniformement en K.

Observació 4.3.7. Per a provar el teorema, és suficient provar que $\overline{A}$ és dens en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$. És a dir, que fixats $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ i $\varepsilon > 0$ hi ha $g \in \overline{A}$ amb $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$. A més, sabem que $\overline{A}$ compleix les tres propietats de l'enunciat del teorema de Stone-Weierstrass.

Passarem a provar una sèrie de lemes, on ja suposem que A compleix les propietats del teorema de Stone-Weierstrass.

Lema 4.3.8. *Si $f \in A$, aleshores $|f| \in \overline{A}$.*

Demostració. Com que $h(x) = \sqrt{x} \in \mathcal{C}([0,1])$, amb $h(0) = 0$, pel teorema d'aproximació de Weierstrass hi ha una successió de polinomis $(p_n)_n$ amb $p_n(0) = 0$, per a tot n, de manera que $p_n \to h$ uniformement en $[0,1]$. Podem suposar que $f \neq 0$ i que, per tant, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)| > 0$. Com que $f \in A$, al ser A subàlgebra, tenim que $u = \frac{f^2}{\|f\|_\infty^2} \in A$.

Com que $u : K \longrightarrow [0,1]$, llavors podem fer les composicions $p_n \circ u$ i $h \circ u$. Observem que tots els termes $u, u^2, \ldots, u^m$ són elements d'A. Com que $p_n(0) = 0$ per a tot n, se segueix que $p_n \circ u \in A$ (aquí fem servir que $p_n(0) = 0$ ja que no sabem que les constants siguin d'A). Ara veurem que $h \circ u \in \overline{A}$, degut a què $p_n \circ u \to h \circ u$ uniformement en K. En efecte,

$$\sup_{x\in K} |p_n(u(x)) - h(u(x))| = \sup_{y\in[0,1]} |p_n(y) - h(y)| \to 0,$$

ja que $p_n \to h$ uniformement en $[0,1]$. Ara, ja sabem que $h \circ u \in \overline{A}$; com que $h \circ u = \frac{\sqrt{f^2}}{\|f\|_\infty} = \frac{|f|}{\|f\|_\infty}$, obtenim que $|f| \in \overline{A}$. ■

Lema 4.3.9. *Si $f, g \in A$ llavors $\max(f,g) \in \overline{A}$ i també $\min(f,g) \in \overline{A}$.*

Demostració. És conseqüència del lema 4.3.8, ja que:

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|),\ \min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|).$$ ■

Lema 4.3.10. *Donats $x, y \in K$ amb $x \neq y$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hi ha $h \in A$ amb $h(x) = \alpha$ i $h(y) = \beta$.*

Demostració. Com $x \neq y$ i A separa punts, hi ha $g \in A$ amb $g(x) \neq g(y)$. Com que A no s'anul·la en cap punt, hi ha $h_x, h_y \in A$ amb $h_x(x) \neq 0$ i $h_y(y) \neq 0$. Al ser A subàlgebra, tenim que:

$$g_1 = gh_y - g(x)h_y \in A,\ g_2 = gh_x - g(y)h_x \in A.$$

Observem que tenim $g_1(x) = 0$, $g_2(y) = 0$ i $g_1(y) = (g(y) - g(x))h_y(y) \neq 0$, ja que $g(x) \neq g(y)$ i, a més, $h_y(y) \neq 0$. Igualment, com que $h_x(x) \neq 0$ tenim $g_2(x) = (g(x) - g(y))h_x(x) \neq 0$. Aleshores, la funció $h = \frac{\alpha}{g_2(x)}g_2 + \frac{\beta}{g_1(y)}g_1$ pertany a A i compleix les propietats demanades. ■

Lema 4.3.11. *Sigui $x \in K$, $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ i $\varepsilon > 0$. Existeix $g_x \in \overline{A}$ amb $g_x(x) = f(x)$ de manera que $g_x(z) < f(z) + \varepsilon$ per a tot $z \in K$.*

Demostració. Per 4.3.10, per a tot $y \in K$ hi ha $f_y \in A$ de manera que $f_y(x) = f(x)$ i $f_y(y) = f(y) < f(y) + \varepsilon$. Per continuïtat, hi ha un entorn U_y de y de manera que $f_y < f + \varepsilon$ en U_y. Al ser K compacte hi ha $y_1, \dots, y_N \in K$ de manera que K està contingut en un subrecobriment finit d'entorns $\bigcup_{i=1}^{N} U_{y_i}$. Per 4.3.9 la funció $g_x = \min(f_{y_1}, \dots, f_{y_N})$ pertany a $\overline{A}$ i compleix $g_x(x) = f(x)$, ja que $f_{y_j}(x) = f(x)$ per $1 \leq j \leq N$. A més a més, si $z \in K$, aleshores $x \in U_{y_j}$ per algun j amb el que $f_{y_j}(z) < f(z) + \varepsilon$. Per tant:

$$g_x(z) \leq f_{y_j}(z) < f(z) + \varepsilon, \ z \in K.$$

■

Prova de Stone-Weierstrass, 4.3.6. Sigui $x \in K$ i considerem la funció g_x obtinguda en 4.3.11. Com que $g_x(x) = f(x) > f(x) - \varepsilon$ per continuïtat existeix un entorn V_x de x amb $g_x > f - \varepsilon$ en V_x. Com que K és compacte, existeixen $x_1, \dots, x_M \in K$ tals que K està contingut en un subrecobriment finit d'entorns $\bigcup_{i=1}^{M} V_{x_i}$. Per 4.3.9, la funció $g = \max(g_{x_1}, \dots, g_{x_M})$ pertany a $\overline{A}$. Per 4.3.11, tenim $g_{x_j}(z) < f(z) + \varepsilon$ per a tot $z \in K$, $1 \leq j \leq M$, amb el que $g(z) < f(z) + \varepsilon$, per $z \in K$. Per altra banda, com que $z \in V_{x_j}$ per algun $1 \leq j \leq M$ i $g_{x_j} > f - \varepsilon$ en V_{x_j}, tenim que:

$$g(z) \geq g_{x_j}(z) > f(z) - \varepsilon \implies f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon, \ \forall z \in K.$$

És a dir, tenim $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$ per a tot $z \in K$. ■

Corol·lari 4.3.12. *Sigui $K \subset \mathbb{R}^n$ compacte. Tota funció $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ es pot aproximar uniformement en K per polinomis de n variables.*

Demostració. Sigui $A = P(K)$ l'àlgebra dels polinomis $P : K \longrightarrow \mathbb{R}$. És clar que és una subàlgebra de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ i com que conté les constants, aleshores A no s'anul·la en cap punt. Veiem que A separa punts: si tenim $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$ i $y = (y_1, \dots, y_n) \in K$ amb $x \neq y$, llavors existeix (com a mínim) un j tal que $x_j \neq y_j$ (evidentment, $1 \leq j \leq n$). Llavors, el polinomi $P(x_1, \dots, x_n) = x_j$ compleix que $P(x) \neq P(y)$ amb el que A separa punts. Ara, aplicant Stone-Weierstrass, 4.3.6, obtenim el resultat. ■

Hi ha una versió del teorema de Stone-Weiestrass vàlida per a subàlgebres de l'espai de les funcions contínues amb valors complexos, $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. En aquest cas, per tal d'obtenir la densitat d'A en $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, ens val una quarta condició, que és *si $f \in A$, llavors $\overline{f} \in A$.*

Definició 4.3.13 (Àlgebra autoconjugada). Recordem que si $z = x + iy \in \mathcal{C}$, el seu conjugat és $\overline{z} = x - iy$ i si $f : K \longrightarrow \mathcal{C}$ és una funció amb valors complexos, llavors la seva funció conjugada és $\overline{f} : K \longrightarrow \mathbb{C}$, definida per $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$. Una àlgebra que compleix aquesta propietat es diu que és autoconjugada.

4.4

Els compactes de les funcions contínues

Descriurem els subconjunts compactes de l'espai de les funcions contínues. Recordem que si X és un espai mètric, posem $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{C}(X)\}$. Sabem que si X és compacte, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ és un espai mètric amb la distància del suprem $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

Definició 4.4.1 (Família equicontínua)**.** Una família de funcions $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ es diu que és equicontínua en un punt $x_0 \in X$ si es compleix que donat $\varepsilon > 0$ hi ha un $\delta_{x_0} > 0$ (depèn del punt escollit) de manera que si $x \in X$ amb $d_X(x, x_0) < \delta_{x_0}$, aleshores $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per a tota funció $f \in \mathcal{F}$. Diem que $\mathcal{F}$ és equicontínua si ho és en tot punt de X.

Definició 4.4.2 (Uniformement equicontínua)**.** Diem que $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ es diu que és equicontínua en un punt $x_0 \in X$ si es compleix que, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ (*no* depèn del punt escollit) tal que si $d_X(x, y) < \delta$, aleshores $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, per a tota $f \in \mathcal{F}$.

De manera semblant a com es provar que una funció contínua en un compacte és uniformeemnt contínua, es pot veure que si X és un espai mètric compacte, llavors tota família $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ equicontínua és uniformement equicontínua.

Teorema 4.4.3. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) espais mètrics, X compacte i $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ equicontínua. Llavors, $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ és uniformement equicontínua.*

Demostració, no entra. Sigui $\varepsilon > 0$. Com $\mathcal{F}$ és equicontínua en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$, per a tot $p \in X$, existeix $\delta_p > 0$ tal que per a tot $q \in X$ que compleix $d_X(p, q) < \delta_p$, aleshores $d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2}$, per a tota $f \in \mathcal{F}$. Donat que $X \subset \bigcup_{p\in X}\{p\} \subset \bigcup_{p\in X} B(p, \frac{\delta_p}{2})$ i, per hipòtesi, X és compacte, existeixen $p_1, \dots, p_n \in X$ tals que $X \subset \bigcup_{i=1}^n B(p_i, \frac{\delta_{p_i}}{2})$. Definim $\delta = \frac{1}{2}\min(\delta_{p_1}, \dots, \delta_{p_n})$. Siguin $p, q \in X$ tals que $d_X(p, q) < \delta$. Llavors existeix $1 \leq m \leq n$ tal que $p \in B(p_m, \frac{\delta_{p_m}}{2})$ i, conseqüentment:

$$d_X(q, p_m) \leq d_X(p, q) + d_X(p, p_m) < \delta + \frac{\delta_{p_m}}{2} \leq \frac{\delta_{p_m}}{2} + \frac{\delta_{p_m}}{2} \leq \delta_{p_m}.$$

Per tant, $d_Y(f(q), f(p_m)) < \frac{\varepsilon}{2}$, per a tota $f \in \mathcal{F}$. Finalment, per a tota $f \in \mathcal{F}$:

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(p_m), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

El següent resultat descriu els subconjunts compactes de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ quan X és un espai mètric compacte.

Teorema 4.4.4 (Arzela-Ascoli)**.** *Sigui X un espai mètric compacte, i $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$. Són equivalents:*

1. *$\mathcal{K}$ és compacte,*
2. *$\mathcal{K}$ és tancat, acotat i equicontínua.*

Demostració.

$\Rightarrow$ Com $\mathcal{K}$ és compacte, sabem que $\mathcal{K}$ és tancat i acotat. Hem de provar que $\mathcal{K}$ és equicontínua, que ho farem via el següent resultat.

Proposició 4.4.5. *Sigui X un espai mètric compacte. Si $\mathcal{K}$ és un subconjunt compacte de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$, llavors $\mathcal{K}$ és una família uniformement equicontínua.*

Demostració. Suposem que $\mathcal{K}$ no és uniformement equicontínua. Llavors, donat $\varepsilon > 0$ per a tot $\delta > 0$ podem trobar $x_\delta, y_\delta \in X$ i una funció $f_\delta \in \mathcal{K}$ amb $d_X(x_\delta, y_\delta) < \delta$ i $|f_\delta(x_\delta) - f_\delta(y_\delta)| \geq \varepsilon$. Per $n \in \mathbb{N}$, prenem $\delta_n = \frac{1}{n}$. Llavors, hi ha $x_n, y_n \in X$ tal que $d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ i una funció $f_n \in \mathcal{K}$ amb $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$. Tenim $(f_n)_n \subset \mathcal{K}$ i com que $\mathcal{K}$ és compacte, és compacte per successions, amb el que té una parcial $(f_{n_k})_k$ convergent en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ a una funció $f \in \mathcal{K}$.
Com que X és compacte, la successió $(x_{n_k})_k \subset X$ té una parcial $(x_{n_{k_j}})_j$ que convergeix a un punt $x \in X$. Com que $d_X(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) < \frac{1}{n_{k_j}}$, se segueix que la corresponent subsuccessió $(y_{n_{k_j}})_j$ també convergeix a x.
Ara bé, tenim que $f_{n_{k_j}}$ convergeix a f en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$, és a dir, $f_{n_{k_j}}$ convergeix a f uniformement en X. Com que $x_{n_{k_j}} \to x$ i $y_{n_{k_j}} \to x$, (cf. 3.3.4) se segueix que $f_{n_{k_j}}(x_{n_{k_j}}) \to f(x)$ i $f_{n_{k_j}}(y_{n_{k_j}}) \to f(x)$, que és una contradicció, donat que $|f_{n_{k_j}}(x_{n_{k_j}}) - f_{n_{k_j}}(y_{n_{k_j}})| \geq \varepsilon$ per a tot j. Per tant, $\mathcal{K}$ és uniformement equicontínua. ■

Amb aquesta demostració, ja hem acabat.

$\Leftarrow$ Aquesta implicació és encara més densa.

Teorema 4.4.6. *Sigui X un espai mètric compacte i $(f_n)_n \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ una successió acotada i equicontínua. Llavors, $(f_n)_n$ té una parcial convergent en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$.*

Demostració. Com X és compacte i $\{f_n\}$ és equicontínua, llavors $\{f_n\}$ és uniformement equicontínua. Fixem $\varepsilon > 0$. Llavors hi ha $\delta > 0$ de manera que si $x, y \in X$ amb $d_X(x, y) < \delta$, llavors $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ per a tot n. Com X és compacte, hi ha $x_1, \ldots, x_k \in X$ amb $X \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta)$. Observem aquí que, com δ depèn de ε, els punts $x_1, \ldots, x_k$ també depenen de ε.
Com que $\{f_n(x_1)\}$ és una successió acotada de nombres reals, pel teorema de Bolzano-Weierstrass, té una parcial convergent, que denotarem per $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$. Considerem ara la successió de nombres reals $\{f_n^{(1)}(x_2)\}$. Aquesta successió també està acotada, amb el que té una parcial convergent, que denotarem per $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$. Observem que $\{f_n^{(2)}(x_1)\}$ també és convergent, ja que $\{f_n^{(2)}\}$ és una subsuccessió de $\{f_n^{(1)}\}$. Reiterant aquest procediment, obtenim una subsuccessió de $\{f_n\}$ que denotarem per $\{f_n^{(k)}\}$ de manera que les successions de nombres reals $\{f_n^{(k)}(x_i)\}$ són convergents per $i = 1, \ldots, k$. En particular, són successions

de Cauchy, amb el que hi ha $n_i \in \mathbb{N}$, amb $i \in \{1, \dots, k\}$ de manera que

$$|f_n^{(k)}(x_i) - f_m^{(k)}(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3},\ m > n \geq n_i.$$

Prenent $n_0 = \max(n_1, \dots, n_k)$, obtenim que

$$|f_n^{(k)}(x_i) - f_m^{(k)}(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3},\ m > n \geq n_0,\ i \in \{1, \dots, k\}. \tag{4.4}$$

Passem a provar que $d_\infty(f_n^{(k)}, f_m^{(k)}) < \varepsilon$ per $m > n \geq n_0$; és a dir, $\|f_m^{(k)} - f_n^{(k)}\|_X$ és $\sup_{x\in X} \|f_n^{(k)}(x) - f_m^{(k)}(x)\| < \varepsilon$. Sigui $x \in X$. Aleshores $x \in B(x_i, \delta)$ per algun $i \in \{1, \dots, k\}$ i tenim que

$$|f_n^{(k)}(x) - f_m^{(k)}(x)| \leq |f_n^{(k)}(x) - f_n^{(k)}(x_i)| + |f_n^{(k)}(x_i) - f_m^{(k)}(x_i)| + |f_m^{(k)}(x_i) - f_m^{(k)}(x)|.$$

El primer i el tercer sumand del terme dret d'aquesta desigualtat són menors que $\frac{\varepsilon}{3}$ per la equicontinuitat de $\{f_n\}$, i el segon terme és menor que $\frac{\varepsilon}{3}$ per $m > n \geq n_0$ degut a (4.4). Com que la desigualtat és vàlida per a tot $x \in X$, obtenim que

$$d_\infty(f_n^{(k)}, f_m^{(k)}) = \sup_{x\in X} |f_n^{(k)}(x) - f_m^{(k)}(x)| < \varepsilon, \quad m > n \geq n_0$$

Observem que això ho hem provat amb un $\varepsilon > 0$ fixat, però no té per a què ser cert amb valors més petits. És a dir, la subsuccessió $\{f_n^{(k)}\}$ depèn de ε. Exactament hem provat que, per a cada $\varepsilon > 0$, existeix una subsuccessió de $\{f_n\}$, que denotarem per $\{g_n^{(\varepsilon)}\}$ amb la propietat de que $d_\infty(g_n^{(\varepsilon)}, g_m^{(\varepsilon)}) < \varepsilon$ (podem pensar que aquesta desigualtat val per a qualsevol $m, n \in \mathbb{N}$, suprimint els primers termes de la subsuccessió).

- Prenent ara $\varepsilon = 1$, obtenim una subsuccessió de $\{f_n\}$, que denotarem per $\{g_n^{(1)}\}$ de manera que $d_\infty(g_n^{(1)}, g_m^{(1)}) < 1$ per $n, m \in \mathbb{N}$. La successió $\{g_n^{(1)}\}$ verifica les mateixes hipòtesis que l'original.
- Ara, prenent $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existirà una subsuccessió de $\{g_n^{(1)}\}$ (que, al seu torn, serà subsuccessió de $\{f_n\}$) que denotarem per $\{g_n^{(2)}\}$, satisfent $d_\infty(g_n^{(2)}, g_m^{(2)}) < \frac{1}{2}$, per a $n, m \in \mathbb{N}$.
- Iterant aquest procediment, obtenim una família de successions $\{g_n^{(k)}\}$ complint les següents propietats:
  1. $\{g_n^{(k+1)}\}$ és una subsuccessió de $\{g_n^{(k)}\}$ i $\{g_n^{(1)}\}$ és una subsuccessió de $\{f_n\}$.
  2. $d_\infty(g_n^{(k)}, g_m^{(k)}) < \frac{1}{k}$, per a tot $n, m, k \in \mathbb{N}$. Per veure-ho més clar, mostrem ara una matriu infinita, on cada fila és una parcial de la fila anterior.

$$\begin{array}{ccccc}
f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \cdots \\
\mathbf{g_1^{(1)}} & g_2^{(1)} & g_3^{(1)} & g_4^{(1)} & \cdots \\
g_1^{(2)} & \mathbf{g_2^{(2)}} & g_3^{(2)} & g_4^{(2)} & \cdots \\
g_1^{(3)} & g_2^{(3)} & \mathbf{g_3^{(3)}} & g_4^{(3)} & \cdots \\
g_1^{(4)} & g_2^{(4)} & g_3^{(4)} & \mathbf{g_4^{(4)}} & \cdots
\end{array}$$

Considerem ara la successió $\{g_n^{(n)}\}$. Degut a 1., aquesta és una subsuccessió de $\{f_n\}$. Passem tot seguit a veure que $\{g_n^{(n)}\}$ és una successió de Cauchy de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$. Donat $\varepsilon > 0$, prenem $n_0 \in \mathbb{N}$ amb $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Llavors, per $m > n \geq n_0$, tenim (altre cop per 1.) que hi ha $n_m \geq m$ amb $g_m^{(m)} = g_{n_m}^{(n)}$, i degut a la propietat 2., se segueix que

$$d_\infty(g_n^{(n)}, g_m^{(m)}) = d_\infty(g_n^{(n)}, g_{n_m}^{(n)}) < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Així, $\{g_n^{(n)}\}$ és de Cauchy en $C_{\mathbb{R}}(X)$, que és complet, amb el que $\{g_n^{(n)}\}$ és convergent en $C_{\mathbb{R}}(X)$. ■

Per fi, com que $\mathcal{K}$ és tancat, acotat i equicontinu, $(f_n)_n \subset \mathcal{K}$ és acotada i equicontínua. Aplicant 4.4.6, $(f_n)_n$ té una parcial convergent en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ a un element $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$. Com $\mathcal{K}$ és tancat, se segueix que $f \in \mathcal{K}$; per tant, $\mathcal{K}$ és compacte per successions i, així, compacte, que era el que volíem provar. ■

Observació 4.4.7. Observant la prova, veiem que podem canviar la hipòtesis de que $\{f_n\}$ sigui acotada, per la condició de que $\{f_n\}$ sigui puntualment acotada: per a tot $x \in X$ hi ha una constant positiva M_x de manera que $\sup_n |f_n(x)| \leq M_x$.

Corol·lari 4.4.8. *Sigui X espai mètric compacte, i $\{f_m\} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ successió acotada i equicontínua. Llavors $\{f_m\}$ té una parcial convergent en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$.*

Demostració. Per $i = 1, \ldots, n$ sigui $\{f_m^i\}$ la successió formada per la component i-èsima de $\{f_m\}$. Clarament, $\{f_m^i\}$ és una successió acotada i equicontínua de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$. Si apliquem 4.4.4 (en particular, 4.4.6), obtindrem una subsuccessió convergent en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$, que denotarem per $\{f_{k_m}^1\}_m$. Si apliquem ara 4.4.4 a $\{f_{k_m}^2\}_m$ obtindrem una parcial convergent en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ per a la segona component, de manera que la corresponent parcial per a la primera component és també convergent en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$. Procedint així, tindrem una successió creixent d'enters positius $(j_m)_m$ de manera que $(f_{j_m}^i)_{j_m}$ és convergent en $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ per $i = 1, \ldots, n$. Llavors, $(f_{j_m} = (f_{j_m}^1, \ldots, f_{j_m}^n))$ és una parcial de $(f_m)_m$ convergent en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$. ■

Comentar finalment que el teorema d'Arzela-Ascoli també és cert per $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ o per $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$: si X és un espai mètric compacte, llavors $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ és compacte si, i només si, $\mathcal{K}$ és tancat, acotat i equicontinu. Una implicació que s'obté amb la mateixa prova que per 4.4.5 i l'altra implicació és conseqüència de 4.4.8.

V

Sèries de potències

5.1 Conceptes previs

Definició 5.1.1 (Sèries de potències)**.** Volem estudiar sèries de funcions de la forma $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, on $(a_n)_n$ és una successió de nombres reals i $a \in \mathbb{R}$. Una sèrie d'aquest tipus s'anomena *sèrie de potències*. Amb la bijecció $x - a \longmapsto x$ podem suposar que $a = 0$. Així doncs, estudiarem la sèrie de potències:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Definició 5.1.2 (Límit superior i inferior)**.** Donada una successió $(a_n)_n$ de nombres reals, definim el seu límit superior (inferior) com:

$$\overline{\lim_n}\, a_n := \inf_k \left(\sup_{n\geq k} a_n \right),$$
$$\underline{\lim_n}\, a_n := \sup_k \left(\inf_{n\geq k} a_n \right).$$

Observació 5.1.3.

1. És clar que $\underline{\lim}_n\, a_n \leq \overline{\lim}_n\, a_n$. A més, si $(a_n)_n$ és convergent, aleshores $\underline{\lim}_n\, a_n = \overline{\lim}_n\, a_n = \lim_n a_n$.
2. Es compleix també que si $(a_n)_n$ és acotada superiorment, $\overline{\lim}_n\, a_n$ és el màxim dels límits de les successions parcials convergents i si $(a_n)_n$ és acotada inferiorment, $\underline{\lim}_n\, a_n$ és el mínim dels límits de les successions parcials convergents.
3. Observem que si $(a_n)_n$ no és acotada superiorment, existeix $(a_{n_k})_k$ una parcial amb $\lim_k a_{n_k} = +\infty$. Per tant, en aquest cas, $\overline{\lim}_n\, a_n = +\infty$ i val també la mateixa caracterització.
4. Hi ha una caracterització anàloga per a *límit inferior*. Si $(a_n)_n$ no és acotada inferiorment, existeix $(a_{n_k})_k$ una parcial amb $\lim_k a_{n_k} = -\infty$. Per tant, en aquest cas, $\underline{\lim}_n\, a_n = -\infty$ i val també la mateixa caracterització.

Exemple 5.1.4. Si tenim la successió $(a_n)_n = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$, aleshores $\underline{\lim}_n\, a_n = 0$ i $\overline{\lim}_n\, a_n = 1$. Si $(b_n)_n = ((-1)^n)_n$ aleshores $\underline{\lim}_n\, b_n = -1$ i $\overline{\lim}_n\, a_n = 1$.

Proposició 5.1.5 (Criteri de l'arrel)**.** *Sigui $(a_n)_n$ una successió de nombres reals, i sigui $\alpha = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$. Aleshores,*

1. *Si $\alpha < 1$, la sèrie $\sum_n a_n$ és convergent,*
2. *Si $\alpha > 1$ la sèrie $\sum_n a_n$ és divergent.*

Demostració.

1. Suposem que $\alpha < 1$. Prenem r amb $\alpha < r < 1$. De la definició de α i de límit superior, veiem que hi ha $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, $n \geq n_0$. És a dir, tenim que $|a_n| < r^n$ per $n \geq n_0$, amb el que $\sum_n |a_n| < \infty$ ja que $\sum_n r^n < \infty$ al ser $r < 1$.
2. Sabem que una sèrie convergent compleix que $|a_n| \to 0$. Aleshores, provarem que $|a_n|$ no tendeix a zero, que implica que la sèrie $\sum_n a_n$ és divergent. Com que $1 < \alpha = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$, aleshores hi ha infinits termes complint que $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, que implica que hi ha infinits n amb $|a_n| > 1$, amb el que $|a_n|$ no pot tendir a zero. ■

Proposició 5.1.6 (Radi de convergència). *Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències i sigui $R \in [0, +\infty]$ definit per $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$. Aleshores:*

1. *Si $|x| < R$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és convergent.*
2. *Si $|x| > R$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és divergent.*

R s'anomena ***radi de convergència*** *de la sèrie de potències.*

Demostració. És conseqüència del criteri de l'arrel, ja que, fixat x, tenim que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} b_n$ amb $b_n = a_n x^n$ i, llavors:

$$\alpha = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Per tant, $\alpha < 1 \iff |x| < R$ i, també, $\alpha < 1 \iff |x| > R$. ■

Exemple 5.1.7. Calculem el radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} 2^n x^n$. Tenim $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{2^n} = 2$. Per tant, el radi de convergència és $R = \frac{1}{2}$, amb el que la sèrie convergeix si $|x| < \frac{1}{2}$ i és divergent si $|x| > \frac{1}{2}$. Quan $x = \frac{1}{2}$, ens queda la sèrie $\sum_n 1$ divergent; quan $x = -\frac{1}{2}$ ens queda la sèrie $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$, també divergent.

Observació 5.1.8.

1. Com veiem, el càlcul del radi de convergència R ens determina tota la regió de convergència de la sèrie, excepte els punts x amb $|x| = R$; és a dir, excepte quan $x = -R$ i $x = R$. Per estudiar aquests casos, simplement substituïm i estudiem les sèries de nombres reals que ens queden. Ho hem fet a l'última frase de l'exemple anterior, 5.1.7.
2. Recordem que si existeix $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$, aleshores $\lim_n \sqrt[n]{|a^n|}$ existeix i també val ℓ. Per tant, en el cas que es pugui aplicar aquest criteri podem obtenir una altra manera de calcular el radi de convergència d'una sèrie de potències, que en alguns casos pot ser més convenient que aplicar el criteri de l'arrel: podem calcular, doncs, el radi de convergència de la sèrie de potències amb la fórmula següent:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \implies R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{1}{\ell} \iff \frac{1}{R} = \ell,$$

sempre que aquest límit existeixi. En aquests casos:

$$\begin{cases} R < 1 \text{ i } \sum_n a_n x^n \text{ convergeix,} & \text{si } \ell > 1; \\ R > 1 \text{ i } \sum_n a_n x^n \textit{ no} \text{ convergeix,} & \text{si } \ell < 1. \end{cases}$$

3. El fet que existeixi el límit superior $\overline{\lim}_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ no implica que aquest coincideixi amb $\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$. Per tant, per calcular el radi de convergència R de moltes sèries no podem aplicar el criteri del quocient de manera directa.

Exercici 5.1.9. *Calculeu el radi de convergència R de les següents sèries de potències:*

1. $\sum_{n\geq 1} nx^n$.
2. $\sum_{n\geq 1} n^n x^n$.

Demostració.

1. Apliquem el criteri del quocient: $R = \frac{1}{\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}}$. Si $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$ existeix $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} = \ell$, $R = \frac{1}{\ell}$ i tenim $R = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1$.
2. Un altre cop, aplicant el criteri del quocient ens queda $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{n^n} = \overline{\lim}_n n = +\infty$, amb el que $R = 0$.
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(n+1)!}$, aplicant el criteri del quocient ens queda:

$$R = \lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{(n+2)!}} = \lim_n \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \lim_n (n+2)! = +\infty. \qquad \blacksquare$$

Exemple 5.1.10. Ara calcularem el radi de convergència R per a la sèrie de potències $\sum_{n\geq 1} n2^n x^{2n}$. Notem que no podem aplicar directament el criteri del quocient (cf. 5.1.8, *3.*). Per tal de calcular R en aquest cas, podem fer-ho:

1. Aplicant la definició de R amb la fórmula $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$. En el nostre cas, tenim que $a_{2n} = n2^n$ i a_n val zero si n és senar. Llavors:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_n} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \overline{\lim_n} \sqrt[2n]{n2^n} = \sqrt{2}\, \overline{\lim_n} \sqrt[2n]{n} = \sqrt{2} \implies R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. Fent el canvi de variables $y = x^2$ obtenim la sèrie de potències $\sum_{n\geq 1} n2^n y^n$. Apliquem el criteri del quocient per a calcular el radi de convergència R' d'aquesta nova sèrie:

$$R' = \lim_n \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

Aleshores, la sèrie és convergent si $|y| > \frac{1}{2}$. És a dir, la nostra sèrie inicial és convergent si $|x^2| < \frac{1}{2} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ i és divergent si $|x^2| > \frac{1}{2} \iff |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Així també, obtenim $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exemple 5.1.11. Passem a calcular el radi de convergència R de la sèrie de potències $\sum_{n\geq 1} 2^{-n} x^{2^n}$. Aquí no tenim cap canvi de variable que ens permeti aplicar el criteri del quocient. Aleshores, hem de fer servir la mateixa definició: $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$. Ara observem que a_n sempre val zero excepte quan $n = 2^k$, que tenim $a_n = \frac{1}{n}$ o, equivalentment, $a_{2^k} = 2^{-k}$. Llavors:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} = \lim_k \sqrt[2^k]{|a_{2^k}|} = \lim_k \sqrt[2^k]{2^{-k}} = \lim_k 2^{-\frac{k}{2^k}} = 2^0 = 1 \implies R = 1.$$

Teorema 5.1.12. *Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sèrie de potències amb radi de convergència $R > 0$.*

1. *$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és convergent per $|x| < R$.*
2. *$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és divergent per $|x| > R$.*
3. *La sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ convergeix uniformement en $[-r, r]$ per a tot $0 < r < R$. En particular, la funció $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és contínua en $(-R, R)$.*

Demostració. Només queda veure 3.. Observem que si $|x| \leq r < R$, llavors $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$. Aleshores, com que:

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{R} < 1,$$

pel criteri de l'arrel obtenim que $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n < \infty$. Per tant, aplicant el criteri M de Weierstrass, obtenim que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ convergeix uniformement en $[-r, r]$. Finalment, com que tenim una sèrie de funcions contínues que convergeix uniformement, la funció $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és contínua en $(-R, R)$. ■

Observació 5.1.13 (Domini de convergència)**.** Com hem comentat abans, un cop calculat el radi de convergència R, podem estudiar els casos $x = R$ i $x = -R$ separadament, per tal d'obtenir tot el domini de convergència de la sèrie. Aquí ens podrem plantejar si es compleix:

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n R^n.$$

Això es complirà si sabem abans que $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ és convergent.

Teorema 5.1.14 (d'Abel)**.** *Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la sèrie de potències amb radi de convergència $R > 0$. Si $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ és convergent, aleshores la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ convergeix uniformement en $[0, R]$ (de fet, ho serà per simetria en $[-R, 0]$ també i, per tant, en $[-R, R]$). En particular, la funció $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és contínua en $[0, R]$.*

Demostració, no entra. Tot punt $x \in [0, R]$ s'expressa com $x = \lambda R$, amb $\lambda \in [0, 1]$. Comprovem que es compleix el criteri de Cauchy de convergència uniforme de sèries. Per hipòtesi, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ és convergent i, per tant, donat $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que la cua de la successió convergeix, és a dir:

$$\left| \sum_{k\geq n} a_k R^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \ n \geq n_0.$$

Si posem $S_n = \sum_{k\geq n} a_k R^k$ llavors tenim $|S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ per a $n \geq n_0$. Per provar la convergència uniforme en $[0, R]$, volem provar que per a tot $\lambda \in [0, 1]$, tenim:

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k\lambda^k R^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\lambda^k R^k\right| < \varepsilon,\ m > n \geq n_0.$$

Volem provar, en definitiva, que:

$$|a_n\lambda^n R^n + \cdots + a_m\lambda^m R^m| < \varepsilon,\ m > n \geq n_0.$$

Donat que si prenem cadascun dels $a_j R^j$ tenim que $a_j R^j = S_j - S_{j+1}$,

$$\begin{aligned}
|a_n\lambda^n R^n + \cdots + a_m\lambda^m R^m| &= |(S_n - S_{n+1})\lambda^n + (S_{n+1} - S_{n+2})\lambda^{n+1} + \cdots + (S_m - S_{m+1})\lambda^m| \\
&= |(S_n\lambda^n + S_{n+1}(\lambda^{n+1} - \lambda^n) + \cdots + S_m(\lambda^m - \lambda^{m-1}) - S_{m+1}\lambda^m| \\
&\leq |S_n| \cdot \lambda^n + |S_{n+1}| \cdot |\lambda^{n+1} - \lambda^n| + \cdots + |S_m| \cdot |\lambda^m - \lambda^{m-1}| + |S_{m+1}|\lambda^m.
\end{aligned}$$

Donat que $|S_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, i que $|\lambda^{k+1} - \lambda^k| = \lambda^k - \lambda^{k+1}$, obtenim que per a $m > n \geq n_0$:

$$|a_n\lambda^n R^n + \cdots + a_m\lambda^m R^m| < \frac{\varepsilon}{2}\left(\lambda_n + (\lambda^n - \lambda^{n+1}) + \cdots + (\lambda^{m-1} - \lambda_m) + \lambda^m\right) = \varepsilon\lambda^n \leq \varepsilon,$$

ja que $\lambda \leq 1$. Per tant, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ convergeix uniformement en $[0, R]$. ■

Observació 5.1.15. El mateix resultat és cert per $-R$. Si $\sum_{n\geq 0} a_n(-R)^n$ és convergent, aleshores la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ convergeix uniformement en $[-R, 0]$.

Exemple 5.1.16. Considerem la sèrie de potències:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n+4}{n^3 5^n} x^n. \tag{5.1}$$

Tenim que el radi de convergència d'aquesta sèrie és:

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{(n+4)}{n^3 5^n}\frac{(n+1)^3 5^{n+1}}{n+5} = 5.$$

En $x = 5$ obtenim la sèrie $\sum_{n\geq 1} \frac{n+4}{n^3}$, que és convergent (perquè $\sum_n \frac{1}{n^2}$ ho és). També, en $x = -5$, tenim la sèrie convergent $\sum_{n\geq 1} \frac{(n+4)(-1)^n}{n^3}$. Pel teorema d'Abel, la sèrie (5.1) convergeix uniformement en $[-5, 5]$.

Exemple 5.1.17. Considerem la sèrie de potències:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} x^{2^n}.$$

Calculeu el seu radi de convergència R. Per a $|x| < R$, calculeu $\lim_{x\to R^-} f(x)$.

5.2 Integració i derivació de sèries de potències

Proposició 5.2.1. *En el seu domini de convergència tota sèrie de potències és integrable, i la seva integral es calcula fent-ho terme a terme.*

Demostració. Si per $|x| < R$ tenim $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, aplicant el teorema de la convergència uniforme i integració, obtenim que:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n\geq 0} a_n t^n\,dt = \sum_{n\geq 0} a_n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \qquad \blacksquare$$

Lema 5.2.2. *Tota sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ i la sèrie $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ obtinguda derivant terme a terme, tenen el mateix radi de convergència.*

Demostració. Cal veure que $\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{n|a_n|}$, i això és cert ja que $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$. ■

Lema 5.2.3. *Però compte, no és cert, en general, que:*

$$\overline{\lim_n}(a_n b_n) = \left(\overline{\lim_n}\, a_n\right) \cdot \left(\overline{\lim_n}\, b_n\right).$$

No obstant, si $\overline{\lim}_n a_n = \ell$ i $\lim_n b_n = k > 0$, aleshores $\overline{\lim}_n(a_n b_n) = \ell k$.

Demostració. Si tenim una parcial $(a_{n_k})_k$ amb $a_{n_k} \to \ell$, aleshores $a_{n_k} b_{n_k} \to \ell k$, que implica que $\ell k \leq \overline{\lim}_n(a_n b_n)$. Ara, si $a_{n_j} b_{n_j} \to r$, com que $b_{n_j} \to k \neq 0$, llavors $a_{n_k} \to \frac{r}{k} \leq \ell = \overline{\lim}_n a_n$. Al ser $k > 0$, obtenim que $r \leq \ell k$, amb el que $\overline{\lim}_n(a_n b_n) \leq \ell k$, i tenim la igualtat desitjada. ■

Observació 5.2.4. Hem fet servir que si $c = \overline{\lim}_n c_n$, aleshores hi ha una parcial $(c_{n_k})_k$ amb $c_{n_k} \to c$ i, que per a tota parcial convergent $(c_{n_j})_j$ es té $\lim_j c_{n_j} \leq \overline{\lim}_n c_n$.

Teorema 5.2.5. *Sigui $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sèrie de potències amb radi de convergència $R > 0$. Llavors, f és derivable en $(-R, R)$ amb:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \ |x| < R.$$

És a dir, en el seu domini de convergència, tota sèrie de potències és derivable i la seva derivada es calcula, doncs, fent-ho terme a terme.

Demostració. Per 5.2.2, posant $f_n(x) = a_n x^n$ tenim que la sèrie $\sum_{n\geq 1} f_n'$ convergeix uniformement en $[-r, r]$ per $r \in (0, R)$. A més, $\sum_{n\geq 0} f_n(0) = a_0$ és convergent. Pel teorema de derivació i convergència uniforme, la sèrie $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és derivable en $(-R, R)$ amb:

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} (a_n x^n)' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}. \qquad \blacksquare$$

Corol·lari 5.2.6. *Sigui $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sèrie de potències amb radi de convergència $R > 0$. Llavors, $f \in \mathcal{C}^\infty(-R, R)$ amb:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n \cdot x^{n-k}, \ |x| < R.$$

Demostració. Per 5.2.5, tota sèrie de potències és derivada; com la derivada torna a ser una sèrie de potències amb el mateix radi de convergència, podem tornar a aplicar 5.2.5 iterativament, obtenint el que volíem. ■

Observació 5.2.7. Com que $f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$, llavors $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ i, per tant, obtenim la sèrie de Taylor de f, $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Hem vist, doncs, que si f és una sèrie de potències amb radi de convergència $R > 0$, aleshores $f \in \mathcal{C}^\infty(-R, R)$ amb la sèrie de Taylor anterior. Ara bé, *el recíproc no és cert en general.*

Exemple 5.2.8. La funció:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

És de classe $\mathcal{C}^\infty$ amb $f(0) = 0 = f'(0) = \cdots = f^{(k)} = 0$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. En efecte, tenim:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y\to\infty} ye^{-y^2} = 0 \implies f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Llavors:

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \lim_{y\to\infty} 2y^4 e^{-y^2} = 0.$$

De la mateixa manera, acabem veient que $f^{(k)}(0) = 0$ per a tot $k \in \mathbb{N}$.

5.3 Càlcul de la suma de sèries

Sabem que, per $|x| < R$, podem integrar o derivar una sèrie de potències fent-ho terme a terme. Llavors, a partir de la identitat $\sum n = 0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, podem calcular la suma de diverses sèries de potències.

Exercici 5.3.1. *Estudiar la convergència i calcular la suma en el domini de convergència de les següents sèries de potències:*

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$,
2. $\sum_{n\geq 1} (n+1) x^n$,
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Observem que totes les sèries tenen radi de convergència $R = 1$.

Demostració.

1. Tenim $R=1$ i quan $x=1$ queda $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ divergent, i quan $x=-1$ ens queda $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ convergent. Per tant, el domini de convergència de la sèrie és $[-1,1)$ i la sèrie convergeix uniformement en $[-r,r]$ per a tot $r\in(0,1)$. De fet, pel teorema d'Abel tenim convergència uniforme en $[-1,r]$ per a tot $r\in(0,1)$. Passem a calcular la suma: $S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$, $|x|<1$. Com que tota sèrie de potències és derivable en $(-R,R)$ i es deriva terme a terme, tenim:
$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x},\ |x|<1.$$
Aleshores, com $S(0)=0$ per a $|x|<1$, tenim:
$$S(x)=\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x),\ |x|<1.$$
Finalment, com que $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ convergeix, pel teorema d'Abel tenim:
$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}=\lim_{x\to -1}S(x)=\lim_{x\to -1}(-\ln(1-x))=-\ln 2.$$

2. Tenim $R=1$. Per tant, la sèrie és convergent per $|x|<1$ i divergent per $|x|>1$. També és fàcil veure que la sèrie divergeix tant en $x=1$ com en $x=-1$. A més, la sèrie convergeix uniformement en $[-r,r]$ per a tot $r\in(0,1)$. Passem a calcular la suma $S(x)=\sum_{n\geq 1}(n+1)x^n$, $|x|<1$. Integrant la sèrie de potències terme a terme, obtenim que la primitiva ve donada per:
$$G(x)=\sum_{n\geq 1}x^{n+1}+C=\frac{x^2}{1-x}+C,\ |x|<1.$$
Per tant,
$$S(x)=G'(x)=\frac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2},\ |x|<1$$
Observem que, en aquest cas, tenim que $\sum_n(n+1)(-1)^n$ és divergent, però $\lim_{x\to -1}S(x)=\frac{-3}{4}$.

3. Tenim $R=1$. Per tant, la sèrie és convergent per $|x|<1$ i divergent per a $|x|>1$. També és fàcil veure que la sèrie convergeix tant en $x=-1$ i $x=1$. A més, la sèrie convergeix uniformement en $[-r,r]$ per a tot $r\in(0,1)$. De fet, pel teorema d'Abel hi ha convergència uniforme en $[-1,1]$. Passem a calcular la suma:
$$S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},\ |x|<1.$$
Com que tota sèrie de potències és derivable en $(-R,R)$ i es deriva terme a terme, tenim:
$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\ |x|<1,$$

on, en la última identitat, hem fet servir el resultat del primer apartat. Com $S(0) = 0$, tenim:

Finalment, com que la sèrie convergeix en $x = -1$ i $x = 1$, pel teorema d'Abel ens queda que $S(-1) = \lim_{x\to -1^+} S(x) = -1 + 2\ln 2$. També,

$$S(1) = \lim_{x\to -1^-} S(x) = 1 + \lim_{x\to -1^-} (1-x)\ln(1-x) = 1,$$

ja que, aplicant la regla de l'Hôpital tenim:

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim_{y\to 0^+} y\ln y = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln y}{\frac{1}{y}} = \frac{\infty}{\infty} \implies \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{y}}{\frac{-1}{y^2}} = \lim_{y\to 0^+} -y = 0. \quad \blacksquare$$

5.4

La funció exponencial i funcions trigonomètriques

Proposició 5.4.1 (La funció exponencial)**.** *Sigui* $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. *Llavors,* $E(x) = e^x$, *on* $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$. *A més,* $E \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *amb:*

1. $E'(x) = E(x)$, *per a tot* $x \in \mathbb{R}$.
2. $E(x+y) = E(x)E(y)$, *per a tot* $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $E(x) > 0$ *per a tot* $x \in \mathbb{R}$.
4. E *és estrictament creixent.*
5. $\lim_{x\to +\infty} E(x) = +\infty$ *i* $\lim_{x\to -\infty} E(x) = 0$.
6. $\lim_{x\to +\infty} E(-x)x^n = 0$ *per a tot* $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Demostració. Provarem cadascun dels apartats, sense cap ordre en especial.

1. El radi de convergència de $E(x)$ és:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty.$$

2. Provem ara que $E(x+y) = E(x)E(y)$. Fixat $a \in \mathbb{R}$ considerem la funció $F_a(x) = E(x)E(a-x)$, $x \in \mathbb{R}$. La funció F_a és derivable amb:

$$F_a'(x) = E'(x)E(a-x) - E(x)E'(a-x) = E(x)E(a-x) - E(x)E(a-x) = 0.$$

Per tant, F_a és constant amb el que $F_a(x) = F_a(0) = E(a)$, obtenint que $E(a) = E(x)E(a-x)$. Ara simplement prenem $a = x+y$ i obtenim el resultat desitjat.

3. Podem seguir per raonar la següent propietat. Si $E(x+y) = E(x)E(y)$, aleshores $E(x)E(-x) = E(0) = 1$, amb el que $E(x) \neq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Per tant, tenim que $E(x) > 0$ per a tot $x \geq 0$: si hi hagués y tal que $E(y) < 0$ pel teorema de Bolzano (E és $\mathcal{C}^\infty$) existiria un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $E(x_0) = 0$, però acabem de veure que $E(x) \neq 0$.

4. Com que $E'(x) = E(x) > 0$ (la derivada de e^x és ella mateixa, com és ben conegut), se segueix que E és estrictament creixent.
5. Passem a provar que $\lim_{x\to+\infty} E(-x)x^n = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Per $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixat, tenim $E(x) > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, amb $x > 0$. Com que $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$, obtenim:
$$E(-x)x^n < \frac{(n+1)!}{x} \to 0, \text{ quan } x \to +\infty.$$
6. A partir de què $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$:
$$\lim_{x\to+\infty} E(x) = \lim_{x\to+\infty} = \frac{1}{E(-x)} = +\infty.$$
7. Finalment, provem que $E(x) = e^x$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Tenim que $E(0) = 1$ i, per $n \in \mathbb{N}$, $E(n) = E(1 + \overset{n}{\cdots} + 1) = E(1)^n = e^n$. També, $E(-n) = \frac{1}{E(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$, amb el que hem vist que $E(k) = e^k$, per a tot $k \in \mathbb{Z}$. Si $p = \frac{n}{m}$, llavors $n = mp$ i:
$$e^n = E(n) = E(mp) = E(p + \overset{m}{\cdots} + p) = E(p)^m \implies E(p) = e^{\frac{n}{m}} = e^p.$$
Ja hem vist que $E(x) = e^x$, per a tot $x \in \mathbb{Q}$. Si $x \in \mathbb{R}$, prenem $p_n \in \mathbb{Q}$ amb $p_n \to x$, i com E és contínua obtenim que $E(x) = \lim_n E(p_n) = \lim_n e^{p_n} = e^x$. ■

Definició 5.4.2 (Funcions trigonomètriques). Per $x \in \mathbb{R}$, posem:
$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
Veiem que $\sin 0 = 0$ i que $\cos 0 = 1$. Aquestes sèries de potències tenen radi de convergència $R = +\infty$ i, per tant, defineixen funcions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Proposició 5.4.3. *$(\sin x)' = \cos x$, i també $(\cos x)' = -\sin x$.*

Demostració. Derivant la sèrie de potències terme a terme, obtenim
$$(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \cos x.$$
Igualment, veiem que $(\cos x)' = -\sin x$. ■

Proposició 5.4.4. *Sigui $x \in \mathbb{R}$. Aleshores:*
1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
2. $|\sin x| \leq 1; |\cos x| \leq 1$.

Demostració.

1. Considerem la funció derivable $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$. Com que

$$f'(x) = 2\cos x(-\sin x) + 2\sin x \cos x = 0,$$

obtenim que $f(x) = f(0) = 1$.

2. Conseqüència directa de l'anterior apartat. ■

Observació 5.4.5. Per a tot $x \in \mathbb{R}$, es té $\sin(-x) = -\sin x$ i $\cos(-x) = -\cos x$.

Proposició 5.4.6. *Per $x \in \mathbb{R}$, tenim $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.*

Demostració. Tenim:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Com que $i^2 = -1$, llavors $i^{2k} = (-1)^k$, i també $i^{2k+1} = i(-1)^k$. Per tant,

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + i \sin x.$$

■

VI

Sèries de Fourier

6.1

Sèries de Fourier

Considerem funcions 2π-periòdiques i ens preguntem, doncs, si és possible que tota funció f 2π-periòdica es pot posar com:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Com que $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$, podem fer servir la notació complexa i preguntar si:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},\ c_n \in \mathbb{C}.$$

Procés 6.1.1 (Càlcul de c_n). *Suposem que $f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$ amb convergència uniforme en $[-\pi,\pi]$ (observa que això implica que la funció f ha de ser contínua en $[-\pi,\pi]$), llavors pel teorema d'integració i convergència uniforme:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\frac{dx}{2\pi} = c_0,$$

ja que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = 0$ per $n \neq 0$. També,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\,dx = \sum_{n} n \in \mathbb{Z}c_n \int_{\pi} e^{i(n-m)x}\frac{dx}{2\pi} = c_m.$$

Com $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = 0$ si, i només si, $n \neq m$, els coeficients c_n queden completament determinats. D'aquesta manera:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\,.$$

Diem que $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi))$ si $\int_{-\pi}^{\pi} |f|\,dx < \infty$.

Definició 6.1.2 (Coeficient de Fourier). Sigui $f \in \mathcal{L}^1([-\pi,\pi))$. Definim el coeficient de Fourier de f d'ordre $n \in \mathbb{Z}$ com:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx\,.$$

La sèrie de Fourier de f és $Sf(x)$ i les sumes parcials de la sèrie de Fourier de f venen donades per $S_N f(x)$:

$$Sf(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx} \implies S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

Una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és 2π-periòdica si es compleix que $f(x + 2\pi) = f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Donada una funció $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, la podem estendre de manera periòdica a la recta real fent servir la fórmula $f(x + 2\pi) = f(x)$. Recordem que la circumferència unitat $\{e^{i\theta}; \theta \in [0, 2\pi)\}$ es representa també per $\mathbb{T}$ i que podem identificar tota funció f 2π-periòdica amb una funció g definida a $\mathbb{T}$, utilitzant que per a tot $z \in \mathbb{T}$, existeix un únic $\theta \in [0, 2\pi)$ complint que $z = e^{i\theta}$ i definint $g(e^{i\theta}) = f(\theta)$ i recíprocament, tota funció g definida en $\mathbb{T}$ defineix una funció f 2π-periòdica en $\mathbb{R}$, $(f(\theta) = g(e^{i\theta}))$. Abusant de notació, anomenarem f a les dues funcions.

Observem també que per tal que una funció f sigui contínua a $\mathbb{T}$ cal que la seva extensió $f 2\pi$ periòdica a la recta real sigui contínua, es a dir que $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ sigui contínua en $[-\pi, \pi]$ i a més que $f(-\pi) = f(\pi)$. I anàlogament per a funcions derivables en $\mathbb{T}$.

Observació 6.1.3. Al tractar amb funcions 2π-periòdiques, també podem considerar funcions $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ integrables, i calcular $\widehat{f}(n)$ com

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

6.2 Sèries de Fourier en termes de sinus i cosinus

En termes de sinus i cosinus, la sèrie de Fourier de f queda com:

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx), \; a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx\,.$$

Passem a fer alguns exemples de càlcul.

Exemple 6.2.1. Calculem la sèrie de Fourier de la funció $f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$, on $\chi_E(x) = 1$ si $x \in E$ i $\chi_E(x) = 0$ si $x \notin E$. Tenim $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dx = \frac{1}{\pi}$ i per $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\sin n}{\pi n}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1 - \cos n}{\pi n}.$$

Per tant, la sèrie de Fourier:

$$Sf(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{\pi n} \cos(nx) + \sum_{n \geq 1} \frac{1 - \cos n}{\pi n} \sin(nx).$$

Observació 6.2.2. Els càlculs se simplifiquen quan la funció és parell o senar.

1. Cas f parella. En aquest cas, $b_n = 0$ i, per tant, la sèrie de Fourier de f queda:

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx), \; a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx\,. \tag{6.1}$$

2. Cas f senar. En aquest cas, $a_n = 0$ i, per tant, la sèrie de Fourier de f queda:

$$Sf(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx), \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,.$$

Exemple 6.2.3. Calculem la sèrie de Fourier de la funció $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$ en $(-\pi,\pi)$. És una funció parella i, per tant, pren el valor de (6.1), $Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx)$ i tenim $a_0 = \frac{2}{\pi} = \int_0^1 dx = \frac{2}{\pi}$. Per $n \geq 1$, podem escriure el terme general a_n i, d'aquí, $Sf(x)$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(nx)\,dx = \frac{2\sin n}{\pi n} \implies Sf(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n\geq 1}\frac{2\sin n}{\pi n}\cos(nx).$$

Exemple 6.2.4. Sigui $f(x) = |x|$, en $[-\pi,\pi)$. És una funció parella i, per tant, seguint (6.1) un altre cop, $Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx)$ i tenim $a_0 = \frac{2}{\pi} = \int_0^1 |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$. A més, per $n \geq 1$ integrant per parts obtenim:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\sin(n\pi)}{n} - \frac{1}{n}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}\right) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos(n\pi)-1) = \frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$Sf(x) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\right)\cos(nx).$$

Finalment, observem que si $n = 2k$, aleshores $(-1)^n - 1 = 0$ i, per tant:

$$Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

Exemple 6.2.5. Considerem la funció 2π-periòdica que ve definida en $[-\pi,\pi)$ per $f(x) = x$. Com f és senar, tenim $Sf(x) = \sum_{n\geq 1} b_n\sin(nx)$ amb

$$\begin{aligned} b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=n}\right) = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Per tant,

$$Sf(x) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx). \tag{6.2}$$

6.3 Convergència puntual

Donat un punt x, volem obtenir condicions sobre f que assegurin la convergència puntual de la sèrie de Fourier cap a f, és a dir, de manera que tinguem $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e^{inx} \to f(x)$

quan $N \to \infty$. La continuïtat de f no ens assegura la convergència puntual, ja que hi ha un resultat de Bois-Reymond que demostra que existeix una funció contínua en $[-\pi, \pi]$ de manera que la sèrie de Fourier divergeix en un punt.

Observació 6.3.1. Recordem que $Sf(x) = \sum_n \widehat{f}(n)e^{inx}$, i tornem al problema de la convergència de la sèrie de Fourier. Observem que si $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi))$ i recordant que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$, llavors tenim:

$$|\widehat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty.$$

Sabem que una condició necessària per la convergència en el punt x és que $|\widehat{f}(n)e^{inx}| \to 0$ quan $|n| \to \infty$. Com que $|e^{inx}| = 1$, una condició necessària és que $|\widehat{f}(n)| \to 0$ quan $|n| \to \infty$.

Lema 6.3.2 (de Riemann-Lebesgue). *Sigui $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ (de fet, fins i tot, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$), on $\mathbb{T}$ és la circumferència unitat. Llavors, $|\widehat{f}(n)| \to 0$ quan $|n| \to \infty$.*

Demostració. Fent servir la versió complexa del teorema de Stone-Weierstrass, 4.3.6, podem veure que els polinomis trigonomètrics $\sum_{k=-N}^{N} a_n e^{int}$ són densos en l'espai $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Per tant, donat $\varepsilon > 0$, hi ha un polinomi trigonomètric $P(t) = \sum_{|n|\leq \mathrm{gr}(P)} a_n e^{int}$ de manera que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$. A més, es compleix que $a_n = \widehat{P}(n)$ per a $|n| \leq \mathrm{gr}(P)$ i $\widehat{P}(n) = 0$ si $|n| > \mathrm{gr}(P)$. Prenent n de manera que $|n| > \mathrm{gr}(P)$, tenim $\widehat{P}(n) = 0$ i, per tant:

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(n) - \widehat{P}(n)| = |\widehat{(f-P)}(n)| \leq \|f - P\|_\infty < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Teorema 6.3.3. *Sigui $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ i $f(-\pi) = f(\pi)$. Si f és derivable en x_0, llavors $\lim_N S_N f(x_0) = f(x_0)$.*

Demostració.

1. Podem suposar que $f(x_0) = 0$. En efecte, prenent $h(x) = f(x) - f(x_0)$ tenim $S_N h(x) = S_N f(x) - f(x_0)$ ja que $S_n k = k$ per a tota constant $k \in \mathbb{R}$.
2. Ara, podem suposar que $x_0 = 0$. En efecte, estenent f de manera 2π-periòdica a tot $\mathbb{R}$ i definint $g(x) = f(x + x_0)$, obtenim:

$$\widehat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + x_0)e^{-inx}\,dx = e^{inx_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + x_0)e^{-in(x+x_0)}\,dx\,.$$

Al ser f 2π-periòdica (podem traslladar l'interval d'integració de $\pm\pi + x_0$ a $\pm\pi$), fent el canvi de variable $y = x + x_0$, veiem que:

$$\frac{e^{inx_0}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+x_0)e^{-inx}\,dx = \frac{e^{inx_0}}{2\pi}\int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(y)e^{-iny}\,dy = \frac{e^{inx_0}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}\,dy = e^{inx_0}\widehat{f}(n),$$

de manera que:

$$\widehat{g}(n) = e^{inx_0}\widehat{f}(n) \implies Sf(x_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx_0} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n) = Sg(0).$$

3. Així doncs, només cal veure el resultat per $x_0 = 0$ i $f(x_0) = 0$. És a dir, volem provar que:

$$S_N f(0) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) \to f(0) = 0, \ N \to \infty.$$

Considerem la funció:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{e^{ix}-1}, & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{f'(0)}{i}, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

Clarament, $g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi) \setminus \{0\})$. Al ser f derivable en $x = 0$, tenim:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{ix}-1} \cdot \frac{f(x)}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{ix}-1}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \frac{1}{i} \cdot f'(0) = g(0).$$

El primer dels dos límit l'hem fet posant $z = ix$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{ix}-1} = \frac{1}{i} \cdot \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^{z}-1} = \frac{1}{i}.$$

És a dir, hem vist que g també és contínua en $x = 0$, amb el que $g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi))$. Com que $f(x) = g(x)e^{ix} - g(x)$ tenim:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(x)e^{ix} - g(x))e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-i(n-1)x}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}\,dx\,. \end{aligned}$$

És a dir, $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n-1) - \widehat{g}(n)$. I, per tant, obtenim la següent sèrie telescòpica:

$$\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) = \sum_{n=-N}^{N} (\widehat{g}(n-1) - \widehat{g}(n)) = \widehat{g}(-N-1) - \widehat{g}(N),$$

que tendeix a zero quan $N \to \infty$ degut al lema de Riemann-Lebesgue, 6.3.2. ∎

Exemple 6.3.4. Considerem la funció $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$. Havíem vist en un exemple anterior, (6.2), que $Sf(x) = 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$. Com f és derivable, aplicant el teorema anterior, 6.3.3, tenim:

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = Sf\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Com que:

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k, \\ (-1)^{k+1}, & \text{si } n = 2k-1. \end{cases}$$

Acabem d'obtenir la identitat $\sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$.

Enunciem un resultat fonamental de l'Anàlisi Harmònica que respon a la pregunta amb la qual hem començat el capítol i que no demostrarem.

Teorema 6.3.5 (Carleson, 1967). *Si $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,dx < \infty$, aleshores $S_N f(x) \to f(x)$, llevat d'un conjunt de mesura zero.*

6.4

Convergència uniforme

Proposició 6.4.1 (Desigualtat de Bessel). *Sigui $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Aleshores,*

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx\,.$$

Demostració. Recordem que $S_nf(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx}$ i $|f(x) - S_nf(x)|^2 = (f(x) - S_nf(x))|f(x) - S_nf(x)|$. Tenim:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_nf(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx - 2\Re\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{S_Nf(x)}\,dx\right) + \int_{-\pi}^{\pi} |S_Nf(x)|^2\,dx\,.$$

Com que:

$$\overline{S_Nf(x)} = \sum_{n=-N}^{N} \overline{\widehat{f}(n)}e^{-inx},$$

llavors:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{S_Nf(x)}\,dx = \sum_{n=-N}^{N} \overline{\widehat{f}(n)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} \overline{\widehat{f}(n)}\widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|\widehat{f}(n)|^2,$$

amb el que obtenim:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_nf(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx - 4\pi \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |S_Nf(x)|^2\,dx\,.$$

Per altra banda,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |S_Nf(x)|^2\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} S_Nf(x)\cdot|S_Nf(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{inx}\right)\cdot\left(\sum_{n=-N}^{N} \overline{\widehat{f}(n)}e^{-inx}\right)dx \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)\left(\sum_{m=-N}^{N} \overline{\widehat{f}(n)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx\right) = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2,\end{aligned}$$

ja que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = 0$ si $m \neq n$. Tot plegat, hem vist que:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_Nf(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx - 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2.$$

És a dir:

$$2\pi \sum_{n=-N}^{N} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \xrightarrow{N\to\infty} 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx\,.$$ ■

Teorema 6.4.2. *Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$, aleshores la sèrie de Fourier de f convergeix uniformement a f en $\mathbb{T}$.*

Demostració. Com $f \in \mathcal{C}^1$, tenim convergència puntual a f, i per tant, si la sèrie de Fourier convergeix uniformement, ho haurà de fer a f. Volem provar que la sèrie de Fourier:

$$Sf(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx}$$

convergeix uniformement en $[-\pi, \pi]$. Per això, aplicarem el criteri M de Weierstrass. Tenim la sèrie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(x)$ amb $f_n(x) = \widehat{f}(n)e^{inx}$, i volem veure que $|f_n(x)| \leq M_n$ per a tot $x \in [-\pi, \pi]$ amb $\sum_n M_n < \infty$. Com que per a tot $x \in \mathbb{R}$, tenim $|e^{inx}| = 1$, tenim que $|f_n(x)| = |\widehat{f}(n)|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Ara, fent servir la desigualtat $2|ab| \leq a^2 + b^2$, per $|n| \geq 1$, tenim:

$$|f_n(x)| = |\widehat{f}(n)| = \frac{1}{|n|} \cdot |n||\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{n^2} + n^2|\widehat{f}(n)|^2 := M_n, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Com que $\sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$, només ens cal veure que:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|\widehat{f}(n)|^2 < \infty$$

Com $f \in \mathcal{C}^1[-\pi, \pi]$, aplicant un exercici de la llista de problemes, obtenim que $n^2|\widehat{f}(n)|^2 = |\widehat{f'}(n)|^2$. Aleshores, per la desigualtat de Bessel, i com $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ implica que $f' \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|\widehat{f}(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\,dx < +\infty. \qquad \blacksquare$$