MATRIUS I VECTORS: DEMOSTRACIONS

Mario Vilar Ramírez

21 de gener de 2021

Resum

Aquí trobarem les demostracions que entren a examen, així com d'altres que resulten útils per a la resolució de problemes i que, per tant, s'han de conèixer.

Deixarem subratllades les proposicions, teoremes, lemes i corol·laris que ens hem de saber en particular.

Capítol 1

Vectors

Definició d'espai vectorial

Proposició 1. *Un espai vectorial és un conjunt E, els elements del qual anomenarem* ***vectors****, dotat de dues operacions, suma i producte per escalars, que compleixen certes propietats:*

1. ***Suma:***
   (a) *Associativitat:* $(u + v) + w = u + (v + w)$,
   (b) *Commutativitat:* $u + v = v + u$,
   (c) *Element neutre:* $\vec{0}$,
   (d) *Element oposat:* $v + (-v) = \vec{0}$.
2. ***Producte per escalars:***
   (a) *Distributivitat:* $a(u + v) = au + av$ *suma de E;* $(a + b)v = av + bv$, *suma de* $\mathbb{R}$.
   (b) $(ab)v = a(bv)$,
   (c) $1v = v$.

Sistemes d'equacions lineals

Proposició 2.

1. *Un sistema donat d'equacions lineals i el que resulta d'intercanviar dues files de la seva matriu ampliada tenen exactament les mateixes solucions.*
2. *Un sistema donat d'equacions lineals i el que resulta de multiplicar una fila de la seva matriu ampliada per un nombre no nul tenen exactament les mateixes solucions.*
3. *Un sistema donat d'equacions lineals i el que resulta de sumar a una fila de la seva matriu ampliada un múltiple d'una altra fila tenen exactament les mateixes solucions.*

Gauss-Jordan. Reducció completa

Proposició 3. *Sigui el sistema següent, al qual hi hem aplicat reducció completa:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}^1_{r+1} & \dots & \tilde{a}^1_n & \tilde{b}^1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}^2_{r+1} & \dots & \tilde{a}^2_n & \tilde{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}^r_{r+1} & \dots & \tilde{a}^r_n & \tilde{b}^r \end{pmatrix}. \tag{1.3.1}$$

El sistema corresponent té les mateixes solucions que el sistema reduït per Gauss-Jordan i obtenim:

$$\begin{array}{rcl} x^1 & = & \tilde{b}^1 - \tilde{a}^1_{r+1}x^{r+1} - \dots - \tilde{a}^1_n x^n \\ x^2 & = & \tilde{b}^2 - \tilde{a}^2_{r+1}x^{r+1} - \dots - \tilde{a}^2_n x^n \\ & \vdots & \\ x^r & = & \tilde{b}^r - \tilde{a}^r_{r+1}x^{r+1} - \dots - \tilde{a}^r_n x^n \end{array} \tag{1.3.2}$$

Nombres complexos

Proposició 4. *Definim:*

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \tag{1.4.1}$$

amb la suma

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \tag{1.4.2}$$

i un producte per escalars

$$c(a,b) = (ca, cb), \tag{1.4.3}$$

on $c \in \mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ és espai vectorial amb aquestes operacions. Aleshores, la suma és associativa; commutativa; amb element neutre, el $(0,0)$; amb element oposat, $(-a,-b)$.

Proposició 5. *També definim el producte com*

$$(a,b) \cdot (a',b') = (aa' - bb', ab' + ba'). \tag{1.4.4}$$

Aleshores el producte és associatiu; commutatiu; amb element neutre, el $(1,0)$; la distributivitat respecte la suma; element invers: $(a+bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2-b^2} - \frac{b}{a^2-b^2} i \right) = 1$.

Independència lineal. Sistemes de generadors

Proposició 6. *Siguin $v_1, \dots, v_m$. Són vectors linealment dependents si, i només si, un d'ells és combinació lineal dels altres.*

Definició 6.1 (Vectors linealment independents). Els vectors $v_1, \dots, v_m$, amb $m > 0$ són linealment independents si per a $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ es compleix:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = \vec{0} \implies a_1 = \dots = a_m = 0. \tag{1.5.1}$$

Definició 6.2 (Vectors linealment dependents). Els vectors $v_1, \dots, v_m$ de l'espai vectorial E són linealment dependents si, i només si, existeixen nombres reals $a_1, \dots, a_m$ **no tots nuls** tals que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = \vec{0}. \tag{1.5.2}$$

Demostració.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $v_1, \ldots, v_m$ són linealment dependents, tenim una relació de dependència $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = \vec{0}$, amb algun coeficient no nul. Aleshores, posant el vector v_i en funció de la resta, tenim:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_i}v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}v_{i+1} - \cdots - \frac{a_m}{a_i}v_m. \tag{1.5.3}$$

Per tant, v_i és combinació lineal dels altres vectors.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Recíprocament, si v_i és combinació lineal dels altres vectors, tenim que $a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + a_mv_m$, que implica

$$a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} - v_i + a_{i+1}v_{i+1} + a_mv_m = \vec{0}, \tag{1.5.4}$$

i el coeficient de v_i és no nul. Per tant, $v_1, \ldots, v_m$ són linealment independents. ■

Proposició 7. *Siguin $v_1, \ldots, v_m$, linealment dependents i $v_2, \ldots, v_m$, linealment independents. Aleshores, v_1 és combinació lineal de $v_2, \ldots, v_m$.*

Demostració. Si $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = \vec{0}$ és una relació de dependència entre $v_1, v_2, \ldots, v_m$ i $a_1 = 0$, tindríem $a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = \vec{0}$ amb no tots els coeficients nuls, que contradiu que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ són linealment independents. Per tant, $a_1 \neq 0$ i obtenim

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1}v_2 - \cdots - \frac{a_m}{a_1}v_m. \tag{1.5.5}$$

■

Proposició 8. *Qualsevol subconjunt d'un conjunt de vectors independents és també conjunt de vectors independents.*

Proposició 9. *Si $v_1, \ldots, v_m$ són generadors d'un espai vectorial E i un d'ells és combinació lineal dels altres, el conjunt obtingut traient aquest vector del conjunt inicial també és conjunt de generadors de E.*

Demostració. Reordenant si cal els vectors tenim $v_1 = b_2v_2 + \cdots + b_mv_m$. Si u és un vector de E qualsevol, tenim $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = a_1(b_2v_2 + \ldots + b_mv_m) + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m = (a_2 + a_1b_2)v_2 + \cdots + (a_1b_m + a_m)v_m$, per tant u és combinació lineal de $v_2, \ldots, v_m$. ■

Observació 9.1. Si un espai vectorial té un conjunt finit de generadors, diem que és *finitament generat.*

Subespais vectorials

Un subconjunt F d'un espai vectorial E és un **subespai vectorial d'**E si, i només si, compleix les següents propietats:

1. F és no buit ($F \neq \emptyset$),
2. F és tancat per a la suma d'E: $u + v \in F, u, v \in F$,
3. F és tancat per al producte per escalars d'E: $au \in F, a \in \mathbb{R}, u \in F$.

Proposició 10 (Subespai generat per un conjunt de vectors)**.** *Sigui E un espai vectorial i siguin $v_1, \ldots, v_m$ vectors d'E. Sigui $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ el conjunt de totes les combinacions lineals dels vectors $v_1, \ldots, v_m$. Aleshores, $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ és subespai vectorial d'E.*

Bases d'un espai vectorial

Proposició 11. *Siguin E un espai vectorial i $e_1, e_2, \dots, e_n$ vectors de E. Aleshores, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ és una base de E si, i només si, per a tot vector v de E existeixen nombres reals $a_1, a_2, \dots, a_n$* ***únics*** *tal que*

$$v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n. \tag{1.7.1}$$

Definició 11.1. Un conjunt ordenat de vectors $e_1, e_2, \dots, e_n$ d'un espai vectorial E es diu *base de E* si, i només si, és un conjunt de vectors linealment independents i que generen E.

Demostració.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Suposem que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ és una base de E. Sigui v un vector de E. Tenim $v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$, amb $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, ja que $e_1, e_2, \dots, e_n$ generen E. Hem de veure que $a_1, \dots, a_n$ són únics. Suposem $v = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n$. Restant les dues igualtats obtenim:

$$\vec{0} = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n - (b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n) = (a_1 - b_1)e_1 + \cdots + (a_n - b_n)e_n, \tag{1.7.2}$$

que implica, per ser $e_1, e_2, \dots, e_n$ linealment independents, $a_1 - b_1 = 0 \implies a_1 = b_1, a_2 - b_2 = 0 \implies a_2 = b_2, \dots, a_n - b_n = 0 \implies a_n = b_n$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Suposem que per a tot vector v de E existeixen nombres reals $a_1, a_2, \dots, a_n$ únics tal que $v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$. Aleshores, tenim que tot v de E és combinació lineal de $e_1, e_2, \dots, e_n$ i, per tant, tots aquests vectors generen E. Vegem que $e_1, e_2, \dots, e_n$ són linealment independents. Tenim $\vec{0} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \cdots + 0 \cdot e_n$ i, per hipòtesi, $\vec{0}$ només s'escriu d'una forma com a combinació lineal de $e_1, e_2, \dots, e_n$. Per tant, no existeix cap relació de dependència lineal entre $e_1, e_2, \dots, e_n$.
Hi tenim una versió més simplificada al darrere dels apunts. ∎

Teorema 12 (de la base). *Tot espai finitament generat té una base.*

Demostració. Si l'espai vectorial E és finitament generat, existeixen vectors en nombre finit $v_1, \dots, v_r$ tals que $E = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$. Si els vectors $v_1, \dots, v_r$ són linealment independents, són base de E. Si no, un d'ells és combinació lineal dels altres, ja que els vectors $v_1, \dots, v_r$ són linealment dependents si, i només si, un d'ells és combinació lineal dels altres. Reordenant els vectors $v_1, \dots, v_r$ si cal podem suposar que v_r és combinació lineal de la resta de vectors. Aleshores, utilitzem que si $v_1, \dots, v_r$ són generadors d'un espai vectorial E, i un d'ells és combinació lineal dels altres, en aquest cas el vector v_r, el conjunt obtingut traient aquest vector del conjunt inicial també és conjunt de generadors de E. Aleshores, $v_1, \dots, v_{r-1}$ generen E. Repetim el procés fins a obtenir un conjunt de generadors que siguin linealment independents, és a dir, una base de E. Com comencem amb un nombre finit de vectors, obtenim una base de E en un nombre finit de passos. ∎

Lema 13 (de Steinitz). *Si $e_1, e_2, \dots, e_n$ formen base de E i $v_1, v_2, \dots, v_r$ són vectors linealment independents de E, podem substituir r vectors de la base $e_1, e_2, \dots, e_n$ pels vectors $v_1, v_2, \dots, v_r$ de forma a obtenir una nova base de E. En particular, es compleix $r \leq n$.*

Demostració. Dividim la demostració en diversos passos:

1. Veiem primer que podem substituir un vector de la base $e_1, e_2, \dots, e_n$ pel vector v_1 de forma a obtenir una nova base. Com que $e_1, e_2, \dots, e_n$ formen base de E, tenim $v_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$. Com v_1 forma part d'un conjunt de vectors linealment independents, tenim que $v_1 \neq \vec{0}$, ja que si el conjunt de vectors contingués el vector $\vec{0}$, aleshores seria

un conjunt de vectors linealment dependents. Per tant, no tots els coeficients són nuls. Reordenant la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$, si cal, podem suposar $a_1 \neq 0$. Aleshores, tenim:

$$e_1 = \frac{1}{a_1}v_1 - \frac{a_2}{a_1}e_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}e_n. \tag{1.7.3}$$

Vegem que $v_1, v_2, \ldots, e_n$ és base de E.

(a) Vegem primer que són linealment indepdents. Suposem:

$$b_1v_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n = \vec{0}. \tag{1.7.4}$$

Substituint en aquesta igualtat l'expressió de v_1 en la base $e_1, \ldots, e_n$ obtenim:

$$\begin{aligned} b_1(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n) + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n = b_1a_1e_1 + b_1a_2e_2 + \cdots + \\ + b_1a_ne_n + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n = b_1a_1e_1 + (b_1a_2 + b_2)e_2 + \cdots + (b_1a_n + b_n)e_n. \end{aligned} \tag{1.7.5}$$

Com els vectors $e_1, e_2, \ldots, e_n$ són linealment independents, aquesta igualtat implica $b_1a_1 = 0, b_1a_2 + b_2 = 0, \ldots, b_1a_n + b_n = 0$. Com $a_1 \neq 0$, implica $b_1 = 0$, i, substituint a les altres igualtats, anem trobant $b_2 = 0, \ldots, b_n = 0$. Hem provat, doncs, que $b_1, \ldots, b_n = 0$ i conseg\"uentment, $v_1, e_2, \ldots, e_n$ són un conjunt linealment independent.

(b) Vegem ara que $v_1, e_2, \ldots, e_n$ generen E. Si $u \in E$ tenim $u = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n$, ja que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ generen E. Substituint:

$$\begin{aligned} u = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n \xRightarrow{e_1 = \frac{1}{a_1}v_1 - \frac{a_2}{a_1}e_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}e_n} u = c_1\left(\frac{1}{a_1}v_1 - \frac{a_2}{a_1}e_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}e_n\right) \\ + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n = \frac{c_1}{a_1}v_1 + \frac{c_2 - a_2}{a_1}e_2 + \cdots + \frac{c_n - a_n}{a_1}e_n. \end{aligned} \tag{1.7.6}$$

Per tant, el conjunt $v_1, e_2, \ldots, e_m$ genera E.

2. Suposem ara que, per a $s < r$, hem substituït s vectors de la base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ pels vectors $v_1, v_2, \ldots, v_s$ de forma a obtenir una nova base i vegem que podem substituir-ne un més per v_{s+1} de forma a obtenir una nova base. Reordenant $e_1, e_2, \ldots, e_n$ si cal, podem suposar que $v_1, \ldots, v_s, e_{s+1}, e_n$ és base de E. Escrivim el vector v_{s+1} en aquesta base:

$$v_{s+1} = d_1v_1 + \cdots + d_sv_s + d_{s+1}e_{s+1} + \cdots + d_ne_n. \tag{1.7.7}$$

En l'apartat 1 d'aquesta demostració hem provat que podem substituir per v_{s+1} un vector de la base que tingui un coeficient no nul en (1.7.7). Si fos $d_j = 0$ per a tot j amb $s + 1 \leq j \leq n$, v_{s+1} seria combinació lineal de $v_1, \ldots, v_s$, i això no pot ser, ja que són vectors linealment independents per hipòtesi. És així com podem substituir un dels vectors $e_{s+1}, \ldots, e_n$ per v_{s+1}.

Nota: I d'aquí deduïm directament que per a qualsevol conjunt de vectors de E, linealment independents, existeix una base de E que els conté. ■

Proposició 14. *Sigui E un espai vectorial de dimensió n.*

1. *n vectors linealment independents d'E formen base d'E.*
2. *n vectors d'E que generen E formen base d'E.*

Proposició 15. *Sigui E un espai vectorial i F un subespai vectorial d'E. Es compleix*

1. $\dim F \leq \dim E$,
2. $\dim F = \dim E \implies F = E$.

Rang d'un conjunt de vectors

Proposició 16. *Siguin $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vectors d'un espai vectorial E. El subespai d'E que generen $v_1, v_2, \ldots, v_m$ no varia si (1) intercanviem dos dels vectors, (2) si multipliquem un dels vectors per un escalar no nul i (3) si sumem a un dels vectors un múltiple d'un altre.*

Proposició 17. *Sigui E un espai vectorial, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ una base de E i $v_1, \ldots, v_m$ vectors d'E.*

1. *El rang de $v_1, \ldots, v_m$ és igual al nombre de files no nul·les de la matriu resultant d'aplicar reducció a la matriu que té com a files les coordenades dels vectors $v_1, \ldots, v_m$ en la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.*

2. *Els vectors que tenen com a coordenades en la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ els coeficients de les files no nul·les de la matriu reduïda anterior formen una base de $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.*

Teorema 18 (de Rouché-Fröbenius). *Sigui S un sistema d'equacions lineals amb n incògnites. A la matriu de S i $(A|b)$ la matriu ampliada de S. Tenim:*

1. $\mathrm{rg}\, A \leq \mathrm{rg}(A|b)$.

2. *S és compatible si, i només si,* $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(A|b)$.

3. *Si S és compatible, aleshores té $n - \mathrm{rg}\, A$ graus de llibertat.*

Demostració. Escrivim la matriu ampliada del sistema com

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}, \tag{1.8.1}$$

i la matriu obtinguda per reducció a partir d'$(A|b)$ com

$$(\overline{A|b}) = \begin{pmatrix} \overline{a}_1^1 & \overline{a}_2^1 & \overline{a}_3^1 & \cdots & \overline{a}_r^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & \overline{a}_2^2 & \overline{a}_3^2 & \cdots & \overline{a}_r^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \overline{a}_r^r & \ldots & \overline{a}_n^r & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \tag{1.8.2}$$

i $\overline{A}$ seria, doncs,

$$(\overline{A}) = \begin{pmatrix} \overline{a}_1^1 & \overline{a}_2^1 & \overline{a}_3^1 & \cdots & \overline{a}_r^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 \\ 0 & \overline{a}_2^2 & \overline{a}_3^2 & \cdots & \overline{a}_r^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \overline{a}_r^r & \ldots & \overline{a}_n^r \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.8.3}$$

1. Si utilitzem que el rang d'una matriu M és igual al nombre de files no nul·les de la matriu resultant del procés de reducció aplicat a la matriu M, aleshores el rang d'A és igual al nombre de files no nul·les de la matriu $\overline{A}$. Si $\overline{b}^i = 0,\ \forall i,\ r < i \leq m$, la matriu $(\overline{A|b})$ és reduïda i tenim doncs rg $A =$ rg $(A|b)$. Si tenim $\overline{b}^{i_0} \neq 0$, per a algun i_0 amb $r < i_0 \leq m$, intercanviant la fila i_0 amb la fila $r+1$, podem suposar doncs $\overline{b}^{r+1} \neq 0$. Llavors, per a $i,\ r+1 < i \leq m$, substituïm la fila f_i per la fila $f_i - \frac{\overline{b}^i}{\overline{b}^{r+1}} f_{r+1}$ i obtenim la matriu
$$(\overline{A|b})' = \begin{pmatrix} \overline{a}^1_1 & \overline{a}^1_2 & \overline{a}^1_3 & \cdots & \overline{a}^1_r & \cdots & \overline{a}^1_n & \overline{b}^1 \\ 0 & \overline{a}^2_2 & \overline{a}^2_3 & \cdots & \overline{a}^2_r & \cdots & \overline{a}^2_n & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \overline{a}^r_r & \ldots & \overline{a}^r_n & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}. \tag{1.8.4}$$
Aleshores, tindríem rg $(A|b) = r+1 = 1+$rg A. (1.8.4) és l'expressió matricial del sistema següent:
$$\begin{cases} \overline{a}^1_1 x^1 + \overline{a}^1_2 x^2 + \overline{a}^1_3 x^3 + \ldots + \overline{a}^1_r x^r + \ldots + \overline{a}^1_n x^n &= \overline{b}^1 \\ \overline{a}^2_2 x^2 + \overline{a}^2_3 x^3 + \ldots + \overline{a}^2_r x^r + \ldots + \overline{a}^2_n x^n &= \overline{b}^2 \\ &\vdots \\ \overline{a}^r_r x^r + \ldots + \overline{a}^r_n x^n &= \overline{b}^r \\ 0 &= \overline{b}^{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= \overline{b}^n \end{cases} \tag{1.8.5}$$

2. Sabem que un sistema d'equacions lineals és compatible si, i només si, $\overline{b}^i = 0,\ \forall i,\ r < i \leq m$. Pel punt anterior, aquesta condició equival a rg $A =$ rg $(A|b)$.

3. Finalment, hem vist que quan el sistema és compatible, aquest té $n-r$ graus de llibertat, on n és el nombre d'incògnites i r el nombre de files no nul·les de la matriu $A|b$, i com que el rang d'una matriu és igual al nombre de files no nul·les de la matriu resultant del procés de reducció aplicat a la matriu, tenim que $r =$ rg A.

■

Observació 18.1. En particular, si $\overline{b}^i = 0,\ \forall r < i \leq m$, podem distingir:

1. $\boxed{r < n}$ De l'equació r podem aïllar x^r en funció de $x^{r+1}, \ldots, x^n$ per ser $\overline{a}^r_r \neq 0$. Substituint aquesta expressió en l'equació anterior, obtindrem x^{r-1} en funció de $x^{r+1}, \ldots, x^n$. Per a qualsevol valor real que donem a $x^{r+1}, \ldots, x^n$ tindrem una solució de l'equació. Anomenem x^{r+1} variables lliures del sistema. Diem en aquest cas que **el sistema és compatible i indeterminat amb $n-r$ graus de llibertat**.

2. $\boxed{r = n}$ L'equació n és
$$\overline{a}^n_n x_n = \overline{b}^n, \tag{1.8.6}$$

que dona $x^n = \frac{\overline{b^n}}{\overline{a}^n_n}$ Substituint aquesta expressió en l'equació anterior obtenim el valor de x^{r+1}, per ser $\overline{a}^{n-1}_{n-1} \neq 0$. Procedint d'aquesta forma, obtenim un valor per a cada incògnita. El sistema té doncs una única solució. Diem que és **compatible i determinat**.

Equacions d'un espai vectorial

Proposició 19. *El conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni d'n incògnites és un subespai vectorial d'*$\mathbb{R}^n$ *de dimensió* $n-r$*, on* r *és el rang de la matriu del sistema.*

Corol·lari 20. *Si les solucions d'un sistema* S *d'equacions lineals homogènies s'expressen com a (1.3.2) amb* $\tilde{b}^1 = \ldots = \tilde{b}^r = 0$*, una base del subespai vectorial de solucions de* S *està formada pels vectors* $v_1, \ldots, v_{n-r}$*, tals que* v_1 *s'obté donant a les variables lliures els valors* $1, 0, \ldots, 0$*;* v_2*, els valors* $0, 1, 0, \ldots, 0$*; …;* v_{n-r}*,* $0, 0, \ldots, 0, 1$*.*

Proposició 21. *Si* F *és un subespai vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *i* $\dim F = d$*, existeix un sistema* S *de* $n-d$ *equacions lineals homogènies independents tal que el conjunt de solucions de* S *és igual a* F*.*

Demostració. Si $F = \mathbb{R}^n$, ja hem acabat: el sistema d'equacions buit és sistema d'equacions de F. Suposem que $F \neq \mathbb{R}^n$. Com que el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni de n incògnites és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensió $n-r$, on r és el rang de la matriu del sistema, aleshores si S és un sistema d'equacions lineals homogènies en n incògnites tenim que el conjunt de solucions de S és subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Per tant, si $v_1, \ldots, v_d$ és una base de F i $v_1, \ldots, v_d$ són solucions de S, qualsevol vector de F és també solució de S. Busquem equacions de les quals $v_1, \ldots, v_d$ siguin solucions. Si tenim $v_j = (b_j^1, b_j^2, \ldots, b_j^n)$, una equació lineal $a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ té $v_1, \ldots, v_d$ com a solucions si es compleix

$$a_1b_j^1 + a_2b_j^2 + \ldots + a_nb_j^n = 0,\ 1 \leq j \leq d. \tag{1.9.1}$$

Els coeficients de les equacions que busquem són, doncs, solucions d'aquest sistema amb incògnites $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Com els vectors v_j són linealment independents perquè són base, el sistema (1.9.1) té rang d i, per tant, té $n-d$ solucions independents. Si aquestes són

$$(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1), (a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2), \ldots, (a_1^{n-d}, a_2^{n-d}, \ldots, a_n^{n-d}), \tag{1.9.2}$$

el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1^1y_1 + a_2^1y_2 + \ldots + a_n^1y_n & = & 0 \\ a_1^2y_1 + a_2^2y_2 + \ldots + a_n^2y_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_1^{n-d}y_1 + a_2^{n-d}y_2 + \ldots + a_n^{n-d}y_n & = & 0 \end{array}\right\} \tag{1.9.3}$$

és de $n-d$ solucions independents i té com a solució els vectors de F. Queda veure que tota solució d'aquest sistema és de F. Sabem que les seves solucions formen un subespai G de $\mathbb{R}^n$ de dimensió $n-(n-d) = d$. Com tenim $F \subset G$ i $\dim F = \dim G$, obtenim la igualtat. Per tant, és un sistema d'equacions de F. ■

Corol·lari 22. *Si el subespai vectorial* F *té base* $v_1, \ldots, v_d$*, amb* $v_j = (b_j^1, b_j^2, \ldots, b_j^n), 1 \leq j \leq d$*, el sistema de les equacions que tenen com a coeficients* $n-d$ *solucions independents del sistema*

$$b_j^1z_1 + b_j^2z_2 + \ldots + b_j^nz_n = 0,\ 1 \leq j \leq d, \tag{1.9.4}$$

és un sistema d'equacions de F*.*

Intersecció i suma de subespais vectorials. Fórmula de Grassmann

Proposició 23. *Sigui E un espai vectorial. Siguin F, G, H subespais vectorials d'E. Es compleixen les següents propietats:*

1. $F \cap G \subset E$,
2. $F \cup G \not\Rightarrow F \cup G \subset E$,
3. $F + G = \{u \in E \mid u = v + w, \text{ per certs } v \in F, w \in G\}$,
4. $F + G \subset E$,
5. $(F + G) + H = F + (G + H) \ \wedge \ F + G = G + F$,
6. $F \subset H$ *i* $G \subset H \implies F + G \subset H$.

Nota: No cal saber-se la següent proposició!

Proposició 24. *Sigui E un espai vectorial amb base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Siguin F el subespai de E amb equacions $f_1 = 0, \dots, f_{n-r} = 0$ i G el subespai de E amb equacions $g_1 = 0, \dots, g_{n-s} = 0$. Aleshores, un sistema d'equacions lineals independents al sistema $f_1, = 0, \dots, f_{n-r} = 0, g_1 = 0, \dots, g_{n-s} = 0$ és un sistema d'equacions de $F \cap G$.*

Demostració. Clarament un vector és de $F \cap G$ si, i només si, compleix les equacions de F i les equacions de G simultàniament. Aleshores, $F \cap G$ és igual al conjunt de solucions del sistema $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_{n-r} = 0, g_1 = 0, g_2 = 0, \dots, g_{n-s} = 0$ i al del sistema equivalent a aquest. ∎

Teorema 25 (Fórmula de Grassmann). *Si F i G són subespais vectorials d'un espai vectorial E, es compleix la igualtat*

$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G). \tag{1.10.1}$$

Demostració. Sigui $u_1, \dots, u_r$ una base de $F \cap G$.

1. Com $F \cap G \subset F$, els vectors $u_1, \dots, u_r$ són linealment independents en F. Per tant, com que per qualsevol conjunt de vectors linealment independents existeix una base d'un espai vectorial que els conté, llavors existeix una base de F que conté els vectors $u_1, \dots, u_r$. Escrivim aquesta base com $u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_m$.
2. Com $F \cap G \subset G$, els vectors $u_1, \dots, u_r$ són linealment independents en G. Llavors, existeix una base de G que conté els vectors $u_1, \dots, u_r$ tal que $u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_k$.

Ara volem provar que $u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_m, w_{r+1}, \dots, w_k$ és base de $F + G$. Si u és qualsevol vector de $F + G$, tenim $u = v + w$, per certs $v \in F$, $w \in G$. Definim v i w:

$$\begin{aligned} v &= a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r + a_{r+1} v_{r+1} + \cdots + a_m v_m, \\ w &= b_1 u_1 + \cdots + b_r u_r + b_{r+1} w_{r+1} + \cdots + b_k w_k, \end{aligned} \tag{1.10.2}$$

per certs nombres reals $a_1, \dots, a_m, b_1 \dots, b_k$. Definim ara u com la suma de v i w.

$$\begin{aligned} u = v + w &= (a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r + a_{r+1} v_{r+1} + \cdots + a_m v_m) \\ &\quad + (b_1 u_1 + \cdots + b_r u_r + b_{r+1} w_{r+1} + \cdots + b_k w_k) \\ &= (a_1 + b_1) u_1 + \cdots + (a_r + b_r) u_r + a_{r+1} v_{r+1} \\ &\quad + \cdots + a_m v_m + b_{r+1} w_{r+1} + \cdots + b_k w_k. \end{aligned} \tag{1.10.3}$$

Per tant, $u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_m, w_{r+1}, \ldots, w_k$ generen $F+G$. Ara comprovarem que són linealment independents:

$$a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_mv_m + b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_kw_k = \vec{0}. \tag{1.10.4}$$

D'aquí, volem implicar $a_1 = 0, \ldots, a_m = 0, b_{r+1} = 0, \ldots, b_k = 0$ per demostrar que són base. Operant, obtenim:

$$a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_mv_m = -(b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_kw_k). \tag{1.10.5}$$

Definim el vector t, que compleix:

$$t = a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_mv_m = -(b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_kw_k). \tag{1.10.6}$$

Com que t és combinació lineal dels vectors de la base de F, tenim $t \in F$. De la mateixa manera, com t és combinació lineal de vectors (*no diu que sigui la base!*) de G, tenim que $t \in G$. Llavors, $t \in F \cap G$ i, per tant, t és combinació lineal dels vectors de la base de $F \cap G$:

$$t = -(b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_kw_k) = c_1u_1 + \cdots + c_ru_r, \tag{1.10.7}$$

que implica

$$c_1u_1 + \cdots + c_ru_r + b_{r+1}w_{r+1} + \cdots + b_kw_k = \vec{0}, \tag{1.10.8}$$

que és una combinació lineal igualada a $\vec{0}$ dels vectors de la base de G. Per tant, tots els coeficients són nuls i, en particular, $b_{r+1} = 0, \ldots, b_k = 0$. Substituint:

$$a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_mv_m + 0 \cdot w_{r+1} + \cdots + 0 \cdot w_k = \vec{0}, \tag{1.10.9}$$

és a dir,

$$a_1u_1 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}v_{r+1} + \cdots + a_mv_m = \vec{0}, \tag{1.10.10}$$

que és una combinació lineal de la base de F igualada a 0. Com són vectors linealment independents, $a_1 = 0, \ldots, a_m = 0$. Obtenim $a_1 = 0, \ldots, a_m = 0, b_{r+1} = 0, \ldots, b_k = 0$ tal i com volíem. ■

Suma directa. Subespai complementari

Proposició 26. *Siguin E un espai vectorial, F i G subespais vectorials d'E. Les condicions següents són equivalents:*

1. *F i G estan en suma directa.*
2. *$F \cap G = \{\vec{0}\}$*
3. *La reunió d'una base de F i una de G és base de $F+G$.*
4. *$\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.*

Demostració.

- $\boxed{1. \iff 2.}$ Provem primer la implicació d'esquerra a dreta. Suposem que F i G estan en suma directa. Llavors,

$$\forall u \in F+G,\ \exists v \in F, w \in G \textbf{ únics} \ \Big|\ u = v + w. \tag{1.11.1}$$

Si existís un vector v no nul a $F \cap G$ tindríem que $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$ i $\vec{0} = v + (-v)$ són dues maneres d'escriure el vector $\vec{0}$ de $F+G$ com a suma d'un vector de F i un de G. Aquest fet contradiu (1.11.1) i, per tant, $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
Provem ara la implicació de dreta a esquerra. Suposem que $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Sigui $u \in F+G$ i suposem $u = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$, $v_1, v_2 \in F, w_1, w_2 \in G$. Hem de provar que $v_1 = v_2$ i $w_1 = w_2$, és a dir, la unicitat dels vectors de la suma directa. Operant,

$$v_1 + w_1 = v_2 + w_2 \iff v_1 - v_2 = w_2 - w_1. \tag{1.11.2}$$

Posem $t = v_1 - v_2 = w_2 - w_1$. Com $v_1, v_2 \in F$, llavors $t \in F$. Anàlogament, com $w_1, w_2 \in G$, tenim $t \in G$. Així, $t \in F \cap G$. Com, per hipòtesi, $F \cap G = \{\vec{0}\}$, $t = \vec{0}$, que implica

$$\begin{cases} v_1 - v_2 &= \vec{0} \implies v_1 = v_2, \\ w_1 - w_2 &= \vec{0} \implies w_1 = w_2. \end{cases} \tag{1.11.3}$$

- $\boxed{2. \implies 3.}$ Si $F \cap G = \{\vec{0}\}$, és $\dim(F \cap G) = 0$ i, per la fórmula de Grassmann:

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G. \tag{1.11.4}$$

Sabem que la reunió d'una base de F i una base de G és un conjunt de generadors de $F+G$. A més, aquest conjunt de generadors forma una base de $F+G$, ja que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$. És a dir, en aquest cas particular com és la suma directa, la reunió d'una base de F i una base de G ens dona una base de $F+G$.

- $\boxed{3. \implies 4.}$ És immediat per (1.11.4).

- $\boxed{4. \implies 2.}$ Si $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$, la fórmula de Grassmann ens dona

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 0. \tag{1.11.5}$$

Per tant, $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

■

Proposició 27. *Siguin E un espai vecgorial, F i G subespais vectorials d'E. Es compleix*

1. $F \cap G = \{\vec{0}\}$ *i* $\dim E = \dim F + \dim G \implies G$ *és suplementari de F en E,*

2. $F + G = E$ *i* $\dim E = \dim F + \dim G \implies G$ *és suplementari de F en E.*

Proposició 28. *Sigui F un subespai de l'espai vectorial E. Aleshores, existeix un suplementari G de F en E.*

Capítol 2

Matrius

Rang d'una matriu

Nota: No cal aprendre's la següent demostració.

Proposició 29. *El rang d'una matriu és igual al rang dels seus vectors columna.*

Demostració. Sigui A la matriu $(a^i_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m,\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ i posem com a r el seu rang. Volem veure que existeixen r vectors columna d'A tals que els restants vectors columna d'A són combinació lineal d'aquests r. Aquest fet implicarà que el subespai d'$\mathbb{R}^m$ generat pels vectors columna d'A té un conjunt d'r generadors i, per tant, dim $\leq r$. En altres paraules, el rang dels vectors columna d'A és $\leq r$.
Considerem el sistema d'equacions lineals homogènies amb matriu A, és a dir:

$$\left.\begin{array}{rcl} a^1_1x^1 + a^1_2x^2 + \ldots + a^1_nx^n & = & 0 \\ a^2_1x^1 + a^2_2x^2 + \ldots + a^2_nx^n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a^n_1x^1 + a^n_2x^2 + \ldots + a^n_nx^n & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.1.1}$$

Com és un sistema homogeni, és compatible i, com té rang r, aleshores té $n-r$ graus de llibertat. Reordenant si cal les columnes d'A, podem suposar que $x^{r+1}, \ldots, x^n$ són les variables lliures. Donant a una de les variables lliures el valor 1 i a la resta el valor 0, obtenim solucions les quals tenen la següent forma:

$$\begin{gathered} v_1 = (b^1_1, \ldots, b^1_r, 1, 0, \ldots, 0), \\ v_2 = (b^2_1, \ldots, b^2_r, 0, 1, 0, \ldots, 0), \\ \vdots \\ v_{n-r} = (b^{n-r}_1, \ldots, b^{n-r}_r, 0, 0, \ldots, 1). \end{gathered} \tag{2.1.2}$$

Escrivim que la primera d'elles és solució. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{rcl} a^1_1b^1_1 + a^1_2b^1_2 + \ldots + a^1_rb^1_r + a^1_{r+1} & = & 0 \\ a^2_1b^1_1 + a^2_2b^1_2 + \ldots + a^2_rb^1_r + a^2_{r+1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ a^m_1b^1_1 + a^m_2b^1_2 + \ldots + a^m_rb^1_r + a^m_{r+1} & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.1.3}$$

Si ho posem en forma matricial,

$$b_1^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} + b_2^1 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} + \ldots + b_r^1 \begin{pmatrix} a_r^1 \\ a_r^2 \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 \\ a_{r+1}^2 \\ \vdots \\ a_{r+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1.4}$$

és a dir,

$$A_{r+1} = -b_1^1 A_1 - b_2^1 A_2 - \ldots - b_r^1 A_r, \tag{2.1.5}$$

si considerem la columna A_j, $1 \leq j \leq n$, la columna j de la matriu A. Tenim, doncs: $A_{r+1} \in \langle A_1, \ldots, A_r \rangle$. Anàlogament, procedint amb les altres solucions, obtenim successivament $A_{r+2} \in \langle A_1, \ldots, A_r \rangle, \ldots, A_n \in \langle A_1, \ldots, A_r \rangle$. Així, obtenim:

$$\langle A_1, \ldots, A_r \rangle = \langle A_1, \ldots, A_r, A_{r+1}, \ldots, A_n \rangle, \tag{2.1.6}$$

la qual cosa ens diu que els vectors columna d'A tenen rang menor o igual que el rang d'A. Apliquem aquest resultat a la matriu transposada d'A, A^T. Obtenim així que el rang d'A, que és el rang dels vectors columna d'A^T és menor o igual al rang dels vectors fila d'A^T, que són els vectors columna d'A. Deduïm la igualtat. *D'aquí es dedueix un corol·lari molt simple, el qual diu que el rang d'una matriu A és igual al rang de la seva matriu transposada A^T.* ■

Matriu inversa d'una matriu quadrada

Lema 30. *Sigui A una matriu $n \times n$. Si B és inversa per l'esquerra d'A i C és inversa per la dreta d'A, $B = C$.*

Definició 30.1. Si A és matriu $n \times n$, diem que una matriu B de $n \times n$ és **inversa per l'esquerra d'**A si compleix $BA = Id_n$.

Definició 30.2. Si A és matriu $n \times n$, diem que una matriu C de $n \times n$ és **inversa per la dreta d'**A si compleix $AC = Id_n$.

Demostració. Tenim $B = BId_n = B(AC) = (BA)C = Id_nC = C$. ■

Teorema 31. *Una matriu A d'$n \times n$ té inversa si, i només si, rg $A = n$.*

Aquest teorema es dedueix directament del següent lema.

Lema 32. *Sigui A una matriu $n \times n$. Es compleix que:*

1. *Si A té inversa per la dreta, aleshores rg $A = n$.*
2. *Si A té inversa per l'esquerra, aleshores rg $A = n$.*
3. *Si rg $A = n$, aleshores A és invertible.*

Demostració.

1. Suposem que A té inversa per la dreta, C. Tenim, doncs: $AC = Id_n$. Aquesta igualtat és equivalent a les n igualtats

$$c_j^1 A_1 + c_j^2 A_2 + \ldots + c_j^n A_n = I_j, 1 \leq j \leq n, \tag{2.2.1}$$

on $C = (c_j^i)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}, A_j, 1 \leq j \leq n$, són les columnes de la matriu A i $I_j, 1 \leq j \leq n$ són les columnes de la matiu identitat. De (2.2.1) deduïm que I_j és combinació de les columnes d'A, $\forall 1 \leq j \leq n$.

Com els vectors columna de la matriu indentitat són base de $\mathbb{R}^n$, tenim que $\mathbb{R}^n = \langle I_1, \dots, I_n \rangle \subset \langle A_1, \dots, a_n \rangle$. Per tant, els vectors columna generen $\mathbb{R}^n$ i obtenim rg $A = n$.

2. Suposem que A té inversa per l'esquerra, B. Aleshores, $BA = Id_n$ i, per tant, $A^T B^T = Id_n$, és a dir, B^T és inversa per la dreta d'A^T. Per *1.*, això implica rg $A^T = n$ i, aplicant 29, obtenim rg $A = n$.

3. Suposem rg $A = n$. Hem de provar que, aleshores, A és invertible. Provarem primer que A té inversa per la dreta. Hem de provar que existeix una matriu $n \times n$, C, tal que $AC = Id_n$. Aquesta igualtat equival a les n igualtats $AC_j = I_j$, $1 \leq j \leq n$, on C_j és la columna j de C i I_j la columna j de la matriu identitat.
   Hem de veure que els n sistemes d'equacions lineals $AC_j = I_j$, amb incògnites els coeficients $c_j^1, \dots, c_j^n$ de la columna C_j de C, tenen solució. Com per a tots ells la matriu és A, que té rang n per hipòtesi, són sistemes compatibles i determinats i per tant existeix una inversa única per la dreta d'A.
   Hem provat que tota matriu quadrada amb rang igual a n té inversa per la dreta. Si rg $A = n$, tenim rg $A^T = n$ i, aplicant el que ja hem provat, existeix una matriu $n \times n$, B, tal que $A^T B = Id$. Aleshores, $B^T A = Id_n$, és a dir, A té invers per l'esquerra i per 32, A és invertible.

■

Permutacions

Proposició 33. *Si σ, τ són permutacions de n elements, es compleix $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$*

Proposició 34. *Tota permutació és producte de transposicions.*

Definició 34.1 (Permutacions). Considerem un enter $n \geq 2$ i el conjunt $C = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$. Una permutació d'$n$ elements és una bijecció σ de C en C. Per tant, cada enter $i \in C$ té una imatge $\sigma(i)$ per σ i tenim $\sigma(i) = \sigma(j) \implies i = j$ (és injectiva). Al seu torn, tot enter de C és $\sigma(i)$ per a un únic $i \in C$ (és exhaustiva). Denotarem per S_n el conjunt de les permutacions d'n elements.

Definició 34.2 (Transposició). Una transposició és una permutació que deixa fixos tots els elements de C excepte dos que es corresponen l'un amb l'altre per la transposició.

$$(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

Sigui σ una permutació d'n elements.

1. Si $\sigma = Id$, tenim $(i, j)(i, j) = (i, j)^2$, per tant és un producte de transposicions.

2. Si $\sigma \neq Id$, sigui i_1 l'enter més petit que no és fix per σ. Tenim $\sigma(i_1) = j_1 \neq i_1$. Considerem la transposició $\tau_1 = (i_1, j_1)$ i fem el producte $\tau_1\sigma$. Per a $i < i_1$, tenim $\tau_1(\sigma(i)) = \tau_1(i) = i$ i $\tau_1(\sigma(i_1)) = \tau(j_1) = i_1$. Oer tant, l'enter més petit que no és fix per $\tau_1\sigma$ és més gran que i_1. Posem com a i_2 aquest enter i $j_2 = (\tau_1\sigma)(i_2)$. Considerem la transposició $\tau_2 = (i_2, j_2)$ i fem el producte $\tau_2\tau_1\sigma$. Per a $i < i_2$, tenim $\tau_2\tau_1(\sigma(i)) = \tau_2(\tau_1(i)) = i$ i $\tau_2(\tau_1(\sigma(i_2))) = \tau_2(j_2) = i_2$. Per tant, l'enter més petit que no és fix per $\tau_2\tau_1\sigma$ és més gran que i_2. Repetint el procés, obtenim transposicions $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ tals que $\tau_r \dots \tau_2\tau_1\sigma = Id$ i, per tant, $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_r$.

Proposició 35. *En el conjunt S_n de permutacions de n elements hi ha exactament el mateix nombre de permutacions parelles que de permutacions senars.*

Demostració. Posem A_n el conjunt de permutacions parelles de n elements. Aleshores, el conjunt de permutacions senars d'n elements és el complementari de A_nn en S_n. Si t és una transposició i σ és una permutació parella, aleshores σt és una permutació senar. Podem definir, doncs, una aplicació:

$$\begin{aligned} f : A_n &\longrightarrow S_n \setminus A_n, \\ \sigma &\longmapsto \sigma t. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Ara, com $t^2 = Id$, l'aplicació

$$\begin{aligned} g : S_n \setminus A_n &\longrightarrow A_n, \\ \rho &\longmapsto \rho t, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

compleix que $g \circ f = Id_{A_n}$ i $f \circ g = Id_{S_n \setminus A_n}$ i és, doncs, la inversa de f. Per tant, f és bijectiva i els dos conjunts A_n i $S_n \setminus A_n$ tenen el mateix nombre d'elements. ■

Determinants

Proposició 36 (Alternància). *Si una matriu quadrada té dues columnes iguals, aleshores el seu determinant és 0.*

Definició 36.1 (Determinant). El determinant d'una matriu quadrada $n \times n$ és un nombre associat a la matriu que compleixi que el determinant és nul si, i només si, la matriu té rang $< n$.

Definició 36.2. Per a $A = (a^i_j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, definim:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)}. \tag{2.4.1}$$

Així doncs, el determinant d'una matriu $n \times n$ és una suma on cada sumand correspon a una permutació σ de n elements. El sumand correspon a una permutació σ de n elements. El sumand corresponent a la permutació σ és el producte d'un element de cada fila i columna de forma que l'índex de fila és la imatge per σ de l'índex de columna i el sigme del sumand és la signatura de σ.

Demostració. Sigui $A = (a^i_j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ i suposem columnes k i ℓ, amb $k < \ell$ són iguals. Posem $t = (k, \ell)$. Com en el conjunt S_n de permutacions de n elements hi ha exactament el mateix nombre de permutacions parelles que de permutacions senars, aleshores $\sigma \longmapsto \sigma t$ defineix una bijecció d'A_n en $S_n \setminus A_n$. Per a una permutació parella fixada, el sumand corresponent és

$$a_1^{\sigma(1)} \dots a_k^{\sigma(k)} \dots a_\ell^{\sigma(\ell)} \dots a_n^{\sigma(n)}, \tag{2.4.2}$$

i la signatura, $\epsilon(\sigma) = +1$. El corresponent a σt:

$$-a_1^{\sigma(t(1))} \dots a_k^{\sigma(t(k))} \dots a_\ell^{\sigma(t(\ell))} \dots a_n^{\sigma(t(n))} = -a_1^{\sigma(1)} \dots a_k^{\sigma(\ell)} \dots a_\ell^{\sigma(k)} \dots a_n^{\sigma(n)}, \tag{2.4.3}$$

ja que $\epsilon(\sigma t) = -1$. Ara, com les columnes k i ℓ d'A són iguals, tenim que $a_k^{\sigma(\ell)} = a_\ell^{\sigma(\ell)}$ i $a_\ell^{\sigma(k)} = a_k^{\sigma(k)}$. Per tant, el sumand corresponent a σt és igual al corresponent a σ amb el signe canviat. Tenim, doncs, que cada sumand corresponent a una permutació parella σ s'anul·la amb el sumand corresponent a la permutació senar σt i el determinant, per tant, és igual a 0. ■

Nota: d'aquí deduïm els següents corol·laris, que no demostrarem ni cal estudiar, però són útils en resolució de problemes.

Corol·lari 37. *Si una columna d'A és combinació lineal de les altres columnes,* $A_j = \sum_{k \neq j} b_k A_k$, *aleshores* $\det A = 0$.

Corol·lari 38. *Si a una columna d'A li sumem una combinació lineal de les altres columnes, el determinant d'A no varia.*

Corol·lari 39. *Si intercanviem les posicions de dues columnes d'A, el determinant d'A canvia de signe.*

Corol·lari 40. *Si permutem les columnes d'A, el determinant no varia si la permutació és parella i canvia de signe si la permutació és senar. En altres paraules,*

$$\det(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) \det(A_1, \dots, A_n). \tag{2.4.4}$$

Proposició 41. *Si* A, B *matrius quadrades* $n \times n$, *aleshores es compleix* $\det(AB) = \det A \det B$

Demostració. Si A té columnes $A_1, \dots, A_n$ i $B = (b_s^r)_{\substack{1 \leqslant r \leqslant n \\ 1 \leqslant s \leqslant n}}$, les columnes d'$AB$ són

$$\left(\sum_{j_1=1}^{n} b_1^{j_1} A_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} b_2^{j_2} A_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} b_n^{j_n} A_{j_n} \right) \tag{2.4.5}$$

Definim un *lema auxiliar:*

Lema 42. *Sigui A una matriu* $n \times n$ *i siguin* $A_1, \dots, A_n$ *les seves columnes. Si* A_k *és combinació lineal de vectors columna* $C_1, \dots, C_r$, $A_k = \sum_{\ell=1}^{r} b_\ell C_\ell$ *es compleix:*

$$\begin{aligned} &\det(A_1, \dots, A_{k-1}, \textstyle\sum_{\ell=1}^{r} b_\ell C_\ell, A_{k+1}, \dots, A_n) = \\ &= \textstyle\sum_{\ell=1}^{r} b_\ell \det(A_1, \dots, A_{k-1}, C_\ell, A_{k+1}, \dots, A_n). \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Usant aquest lema per a cada columna, tenim:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det \left(\textstyle\sum_{j_1=1}^{n} b_1^{j_1} A_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} b_2^{j_2} A_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} b_n^{j_n} A_{j_n} \right) = \\ &= \textstyle\sum_{j_1, \dots, j_n = 1}^{n} b_1^{j_1} b_2^{j_2} \dots b_n^{j_n} \det(A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_n}). \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

En l'expressió anterior, els determinants que tenen dos dels índexs $j_1, \dots, j_n$ repetits són nuls i els podem descartar. A cada un dels restants, amb $j_1, \dots, j_n$, tots diferents, podem associar la permutació

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}, \tag{2.4.8}$$

i reescriure el corresponent sumand usant (40):

$$\begin{aligned} b_1^{j_1} b_2^{j_2} \dots b_n^{j_n} \det(A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_n}) &= b_1^{\sigma(1)} b_2^{\sigma(2)} \dots b_n^{\sigma(n)} \det(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)}) = \\ &= \epsilon(\sigma) b_1^{\sigma(1)} b_2^{\sigma(2)} \dots b_n^{\sigma(n)} \det(A_1, \dots, A_n). \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Com les $n-$ples $(j_1, \dots, j_n)$ sense índexs repetits es corresponen bijectivament amb les corresponents permutacions i hi apareixen totes les permutacions de S_n, obtenim a partir de (2.4.6):

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) b_1^{\sigma(1)} b_2^{\sigma(2)} \dots b_n^{\sigma(n)} \det(A_1, \dots, A_n) = \\ &= (\epsilon(\sigma) b_1^{\sigma(1)} b_2^{\sigma(2)} \dots b_n^{\sigma(n)}) \det(A_1, \dots, A_n) = \det B \det A \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

■

Proposició 43. *Per a qualsevol matriu quadrada A, es compleix* $\det(A^T) = \det A$.

Observació 43.1. Amb l'anterior proposició obtenim que fins a 40 els enunciats són igualment vàlids si canviem columnes per files.

Proposició 44. *Si A és matriu $n \times n$, es compleix:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_j^i A_j^i, \tag{2.4.11}$$

per a qualsevol columna j d'A. En altres paraules, obtenim el determinant d'A com la seuma de cada coeficient de la columna j multiplicat pel seu adjunt.

Definició 44.1. Si $A = (a_j^i)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, diem **menor complementari** del coeficient a_j^i de la matriu A i denotem per $\overline{A}_j^i$ el determinant de la matriu $(n-1) \times (n-1)$ que s'obté traient a A la fila i i la columna j.

Definició 44.2. Diem **adjunt** d'a_j^i i denotem per A_j^i el producte de $(-1)^{i+j}$ per $\overline{A}_j^i$.

Teorema 45. *Una matriu $n \times n$ té rang n si, i només si,* $\det A \neq 0$.

Demostració. Si rg $A < n$, una de les columnes d'A és combinació lineal de les altres. Així, els vectors columna d'A són linealment dependents i, a més, per 37, si una columna d'A és combinació lineal de les altres columnes, $A_j = \sum_{k \neq j} b_k A_k$, aleshores $\det A = 0$. Si rg $A = n$, A és invertible i A^{-1} és la matriu inversa d'A. Al seu torn, tenim $AA^{-1} = Id$, que implica $(\det A)(\det A^{-1}) = \det Id = 1$, i per tant, $\det A \neq 0$. ∎

Corol·lari 46. *Si A és una matriu i rg $A = r$, aleshores (1) tots els menors d'ordre $> r$ són nuls i (2) A té un menor no nul d'ordre r.*

Proposició 47. *Una matriu A té rang n si, i només si, A té un menor M d'ordre r, no nul, i tots els menors d'ordre $r+1$ d'A, orlants d'M, són nuls.*

Definició 47.1 (Menors orlants). Els menors d'A d'ordre $r+1$ obtinguts afegint a M una fila i una columna d'A, és a dir, de la forma

$$\begin{vmatrix} a_{j_1}^{i_1} & a_{j_2}^{i_1} & \dots & a_{j_r}^{i_1} & \mathbf{a}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i_1}} \\ a_{j_1}^{i_2} & a_{j_2}^{i_2} & \dots & a_{j_r}^{i_2} & \mathbf{a}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j_1}^{i_r} & a_{j_2}^{i_r} & \dots & a_{j_r}^{i_r} & \mathbf{a}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i_r}} \\ \mathbf{a}_{\mathbf{j_1}}^{\mathbf{i}} & \mathbf{a}_{\mathbf{j_2}}^{\mathbf{i}} & \dots & \mathbf{a}_{\mathbf{j_r}}^{\mathbf{i}} & \mathbf{a}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}} \end{vmatrix}, \tag{2.4.12}$$

es diuen *menors orlants d'M*.

Proposició 48 (Fórmula de la matriu inversa). *Si A és una matriu quadrada $n \times n$, invertible, la seva inversa és igual a la transposada de la matriu d'adjunts d'A multiplicada per l'invers del determinant d'A:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix}^T \tag{2.4.13}$$

Demostració. Primerament, tot i que a l'examen el donarem per sabut i no l'escriurem, definim el concepte de *matriu d'adjunts*:

Definició 48.1. Si $A = (a^i_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ és una matriu quadrada $n \times n$, aleshores diem **matriu d'adjunts** d'A la matriu $(A^i_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, és a dir, la matriu obtinguda substituint cada coeficient d'A pel seu adjunt.

Operant, tenim que $A^{-1}A = Id = \dfrac{1}{\det A} \cdot (\mathrm{Adj}(A))^T A$. Aleshores, fem el producte d'A per la transposada de la seva matriu d'adjunts:

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_n \end{pmatrix}. \tag{2.4.14}$$

Es comprova fàcilment que coeficient de la fila i, columna j del producte és

$$a^1_j A^1_i + a^2_j A^2_i + \ldots + a^n_j A^n_i = \sum_{k=1}^{n} a^k_j A^k_i. \tag{2.4.15}$$

En efecte, és la suma dels productes de l'element de la fila k, columna j d'A per l'adjunt de l'element de la fila k, columna i. Per tant, és el desenvolupament per la columna i del determinant de la matriu obtinguda a partir d'A posant en el lloc de la columna i la columna j.

- $\boxed{i = j}$ És el desenvolupament del determinant d'A per la columna j. Així,

$$\sum_{k=1}^{n} a^k_j A^k_i = \sum_{k=1}^{n} a^k_j A^k_j \implies \sum_{j=1}^{n} a^k_j A^k_j = \det A \tag{2.4.16}$$

- $\boxed{i \neq j}$ És el desenvolupament per la columna i del determinant de la matriu obtinguda substituint a A la columna i per la columna j, és a dir:

$$\sum_{k=1}^{n} a^k_j A^k_i \xRightarrow{A_i = A_j} \sum_{i=1}^{n} a^k_j A^k_i = \det A = 0. \tag{2.4.17}$$

  Com és el determinant d'una matriu amb dues columnes iguals, dona 0.

Tenim, doncs, que el producte de (2.4.14) és igual a una matriu diagonal amb tots els elements de la diagonal igual a $\det A$. Multiplicant aquesta matriu per $\frac{1}{\det A}$ obtenim Id, tal i com volíem demostrar. ■

Corol·lari 49 (Regla de Cramer). *Si*

$$\begin{cases} a^1_1 x^1 + \ldots + a^1_n x^n = b^1 \\ \qquad\quad \ldots \\ a^n_1 x^1 + \ldots + a^n_n x^n = b^n \end{cases} \tag{2.4.18}$$

és un sistema de Cramer, la seva solució és

$$x^j = \frac{\det B_j}{\det A}, 1 \leq j \leq n, \tag{2.4.19}$$

on B_j és la matriu obtinguda substituint a A la seva columna j per la columna de termes independents del sistema. En particular, $x^j = \dfrac{A_j^1 b^1 + \ldots + A_j^n b^n}{\det A}$*, i el numerador és el desenvolupament de* $\det B_j$ *per la columna j.*

Definició 49.1 (**Sistema de Cramer**)**.** Un sistema de Cramer és un sistema d'n equacions lineals, amb n incògnites i de rang n. Com la matriu ampliada té n files, ha de tenir també rang n i, per tant, un sistema de Cramer té una **única solució**.

Observació 49.1. Es poden trobar les equacions d'un subespai vectorial usant determinants.

Demostració. Sigui E un espai vectorial amb base $(e_1, \ldots, e_n)$ i F un subespai vectorial d'E amb base $v_1, \ldots, v_r$ i siguin $(a_1^i, \ldots, a_n^i)$ les coordenades del vector v_i en la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Un vector v de E pertany a F si, i només si, és combinació lineal de $v_1, \ldots, v_r$ si, i només si, rg $(v_1, \ldots, v_r, v) = r$. Si posem $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordenades de v en la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, rg $(v_1, \ldots, v_r, v) = r$ equival a:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \cdots & a_r^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_r^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & a_3^r & \ldots & a_r^r & \ldots & a_n^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & a_3^r & \ldots & \overline{a}_r^r & \ldots & a_n^r \end{pmatrix} = r. \tag{2.4.20}$$

Com les r primeres files de la matriu són linealment independents, té un menor no nul M d'ordre r format per les r primeres files. Aleshores, com rg $= r$, els menors orlants d'M són nuls. Obtenim $n - r$ equacions en $x_1, \ldots, x_n$ que són linealment independents, ja que $\dim F = r$, i són equacions de F. ■