Universitat de Barcelona

Apunts

Tercer Semestre

Geometria Lineal (GL)

Autor:
Mario Vilar

Professor:
Dr. Joan Carles Naranjo

5 de gener de 2022

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Índex

Taula de continguts

Capítol 7

I

Espais afins

1.1 Introducció

Definició 1.1.1 (espai afí). Un espai afí sobre $\mathbb{K}$ és un triple $(\mathbb{A}, E, \phi)$, on $\mathbb{A}$ és un conjunt, E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita i ϕ és una aplicació:

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbb{A}\times E & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ & (p, \overrightarrow{u}) & \longmapsto & \phi(p, \overrightarrow{u}) := p + \overrightarrow{u} \end{array} \tag{1.1.1}$$

amb les propietats següents:

1. $(p + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = p + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$, $\forall p \in \mathbb{A}, \forall u, v \in E$;
2. fixat $p \in \mathbb{A}$, l'aplicació $f : E \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $f(\overrightarrow{u}) = p + \overrightarrow{u}$ és bijectiva.

Ara, introduirem una definició equivalent d'espai afí donada per [CL09].

Definició 1.1.2 (espai afí). Un espai afí sobre un cos $\mathbb{K}$ és un conjunt $\mathbb{A} \neq \emptyset$, un espai vectorial E i una aplicació $\varphi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow E$; un triple $(\mathbb{A}, E, \varphi)$ que compleix:

1.
$$\begin{array}{rccl} \varphi_p: & \mathbb{A} & \longrightarrow & E \\ & q & \longmapsto & \varphi(p, q) := \overrightarrow{pq} \end{array} \quad \text{és bijectiva } \forall p \in \mathbb{A}. \tag{1.1.2}$$
2. $\varphi(p, q) + \varphi(q, r) = \varphi(p, r), \forall p, q, r \in \mathbb{A}$;

on direm que p, q són, respectivament, l'origen i l'extrem del vector $\overrightarrow{pq}$.

Definició 1.1.3 (Punts). Els punts són els elements p que pertanyen al conjunt $\mathbb{A}$.

Observació 1.1.4. Si ens fixem en la segona propietat, veiem que hi ha tants punts com vectors. Així doncs, definim la dimensió de l'espai afí com la dimensió del $\mathbb{K}$-espai vectorial E.

Proposició 1.1.5. *Siguin $p, q, r \in \mathbb{A}$ punts de l'espai afí. Diem $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{pq} = q - p$. Aleshores,*

1. $\exists!\ \overrightarrow{v} \mid p + \overrightarrow{v} = q \iff$ *fixat $p \in \mathbb{A}$, l'aplicació $f : E \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $f(\overrightarrow{u}) = p + \overrightarrow{u}$ és bijectiva;*
2. $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} \iff (p + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = p + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$, $\forall p \in \mathbb{A}, \forall u, v \in E$.

En altres paraules, si 1.1.1.1 és equivalent a 1.1.5.2 i 1.1.1.2 és equivalent a 1.1.5.1.

Demostració. La propietat 1.1.5.1 és una reescriptura de la propietat 1.1.1.2. Per provar 1.1.5.2, també anomenada *relació de Chasles*, hem de veure que $r = p + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$, o sigui que $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$, que és cert perquè estem suposant que $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$. Viceversa, suposant la associativitat, $p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = (p + \overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{qr} = q + \overrightarrow{qr} = r = p + \overrightarrow{pr}$. Com que tot són igualtats, $p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = p + \overrightarrow{pr}$, la qual cosa ens dona $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$. ■

Observació 1.1.6. La proposició anterior ens demostra l'equivalència entre les dues definicions d'espai afí que hem donat al principi.

Proposició 1.1.7.

1. $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{0} \iff p = q$,
2. $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}, \forall p, q \in \mathbb{A}$,
3. $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \iff \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$ *(regla del paral·lelogram).*

Demostració. Provarem els tres punts per separat. Comencem pel primer:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Suposant $p = q = r$, i tenint en compte que $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$, ens diu que $\overrightarrow{pp} + \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp} \iff \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{0}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Suposant que $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{0}$, aleshores $p = p + \overrightarrow{0} = p + \overrightarrow{pq} = q$. Alternativament, podem implicar que $\varphi_p(q) = \overrightarrow{0}$; però com que $\varphi_p(p) = \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{0}$, de la bijectivitat de φ_p resulta $p = q$.

Pel que fa al segon, solament ens cal observar que $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$.

Finalment, per l'últim:

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \implies \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{rs} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{qr} + \overrightarrow{rs} = \overrightarrow{qs}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Es demostra de manera totalment anàloga, per simetria.

Com a conseqüència, $p + \overrightarrow{0} = p, \forall p \in \mathbb{A}$. Això és perquè $p + 0 = p + \overrightarrow{pp} = p$. ■

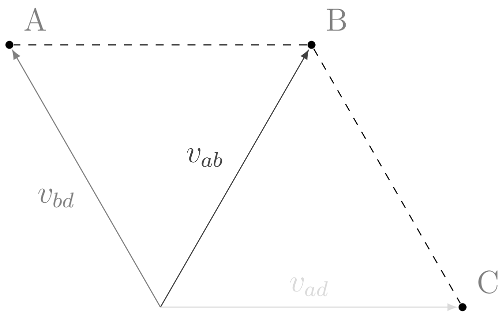


Figura 1.1: Regla del paral·logr.am

1.2 Translacions

En tota aquesta secció considerarem (A, E, φ) un espai afí.

Definició 1.2.1 (Translació). És una aplicació definida per a tot vector $v \in E$ que s'anomena *translació de vector* v:

$$\begin{array}{rccl} \tau_v : & \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ & p & \longmapsto & \tau_v(p) := p + v = \varphi_p^{-1}(v). \end{array} \tag{1.2.1}$$

Proposició 1.2.2.

1. *Tota translació τ_v és bijectiva,*
2. $\tau_v^{-1} = \tau_{-v}$,
3. $\tau_u \circ \tau_v = \tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}$.

Demostració. Suposem $p \in \mathbb{A}, v \in E$, qualssevol. τ_v és:

- injectiva, ja que $\tau_v(p) = \tau_v(q) \implies \overrightarrow{\tau_v(p)\tau_v(q)} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{0} \implies p = q$;
- exhaustiva: per $p \in \mathbb{A}$ fem $p = p + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{p} + (v - v) = (p - v) + v = \tau_v(p - v)$.

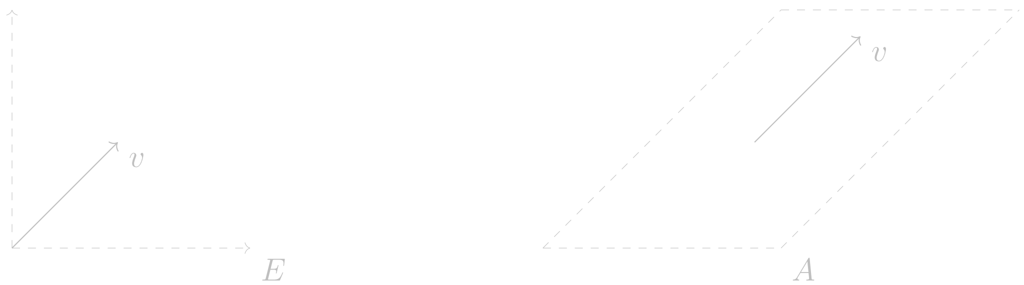
Aleshores, $\tau_v(p-v) = p \implies \tau_v^{-1}(p) = p - v = \tau_{-v}(p) \implies \tau_v^{-1} = \tau_{-v}$. Pel que fa a l'últim apartat, $(\tau_u \circ \tau_v)(p) = \tau_u(\tau_v(p)) = \tau_u(p+v) = (p+u)+v = (p+v)+u = \tau_v(\tau_u(p)) = (\tau_v \circ \tau_u)(p) \implies \tau_u \circ \tau_v = \tau_v \circ \tau_u$. A més, l'associativitat $(p+u)+v = p+(u+v)$ ens diu que $\tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}$. ■

Observació 1.2.3. Podríem repensar l'espai afí de tal manera que es pogués definir com un conjunt $\mathbb{A}$, un espai vectorial E i una família d'aplicacions $\mathcal{T} = \{\tau_v : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}; \forall v \in E\}$; en altres paraules, a partir de translacions. Més detalls a [CL09, prop. 2.2].

1.3

Sistemes de referència

Definició 1.3.1 (Sistema de referència)**.** Un sistema de referència a $(\mathbb{A}, E)$ amb $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ és un conjunt ordenat $\{p; e_1, \ldots, e_n\}$, on $p \in \mathbb{A}$ s'anomena *origen* i $e_1, \ldots, e_n$ és una base d'E.



Donat $a \in \mathbb{A}$ qualsevol, podem escriure de manera única

$$\overrightarrow{pa} = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n. \tag{1.3.1}$$

Definició 1.3.2 (Coordenades)**.** $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ es diuen coordenades del punt $a \in \mathbb{A}$.

Observació 1.3.3. Les coordenades de l'origen p del sistema de referència es poden deduir de la següent manera: $\overrightarrow{pp} = 0 = 0e_1 + \cdots + 0e_n \implies p = (0, \ldots, 0)$.

Cada elecció d'un sistema de referència a (A, E) estableix una correspondència bijectiva entre $\mathbb{A}$ i $\mathbb{K}^n$. Per rebaixar el nivell d'abstracció de l'espai afí general $(\mathbb{A}, E, \varphi)$ i poder operar més fàcilment, definim

Definició 1.3.4 (espai afí estàndard)**.** Considerem el producte cartesià $\mathbb{K}^n$ com a conjunt de punts i d'altra banda $E := \mathbb{K}^n$ amb l'estructura natural de $\mathbb{K}$-espai vectorial. L'espai afí estàndard de dimensió n sobre un cos $\mathbb{K}$ es defineix com $A = \mathbb{K}^n$ i $E = \mathbb{K}^n$ amb l'acció canònica

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{K}^n \times E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & ((\ldots, x_i, \ldots), (\ldots, y_i, \ldots)) & \longmapsto & (\ldots, x_i + y_i, \ldots). \end{array} \tag{1.3.2}$$

Aleshores, $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, \phi)$ és un espai afí de dimensió n. Usem, en aquest cas, $\mathbb{A}_K^n$ i l'anomenem *espai afí estàndard de dimensió n sobre* $\mathbb{K}$.

Observació 1.3.5. Per a tot $a, b \in \mathbb{A}$ el vector $b - a \in E$ té components $(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$.

1.4

Sumes de punts. Baricentres

Suposem que el cos base $\mathbb{K}$ té característica zero, ja que necessitarem que els escalars de la forma $\frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ estiguin ben definits en $\mathbb{K}$. Considerem $(\mathbb{A}, E)$ espai afí.

1.4.1 Sumes de punts

Observació 1.4.1. En general no té sentit fer combinacions lineals de punts ja que les úniques operacions permeses són la suma de vectors (això és, la operació suma en l'espai vectorial E) i la suma ϕ de punt i vector.

Podríem convenir que per definir una combinació lineal de punts $\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k, \alpha_i \in \mathbb{K}, p_i \in \mathbb{A}$, es fixa un punt auxiliar O i es calcula

$$O + \alpha_1 \overrightarrow{Op_1} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{Op_k}. \tag{1.4.1}$$

Si el resultat de l'equació anterior depèn del punt O, ens serà trivial.

Proposició 1.4.2. *Per a qualsevol parella de punts $O, O' \in \mathbb{A}$ es té*

$$O + \alpha_1 \overrightarrow{Op_1} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{Op_k} = O' + \alpha_1 \overrightarrow{O'p_1} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{O'p_k} \iff \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1. \tag{1.4.2}$$

Demostració. Podem reescriure (1.4.2) com

$$\begin{gathered} O + \alpha_1 \overrightarrow{Op_1} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{Op_k} - \alpha_1 \overrightarrow{O'p_1} - \cdots - \alpha_k \overrightarrow{O'p_k} = O', \\ \overrightarrow{OO'} = \alpha_1(\overrightarrow{Op_1} - \overrightarrow{O'p_1}) + \cdots + \alpha_k(\overrightarrow{Op_k} - \overrightarrow{O'p_k}) = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)\overrightarrow{OO'}. \end{gathered} \tag{1.4.3}$$

Operant, ens queda que $(1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_k)\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{0}$ per a qualsevol parella de punts $O, O' \in \mathbb{A}$. Per tant, (1.4.2) equival a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. Notem que això ens implica requerir que O, O' siguin diferents entre ells. ■

Notació 1.4.3. A partir d'ara escriurem $\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k$ sempre que la suma dels coeficients sigui 1, el punt sigui de l'expressió (1.4.1) i O un punt auxiliar arbitrari.

1.4.2 Baricentre

Definició 1.4.4 (Punt mitjà)**.** Siguin $p, q \in \mathbb{A}$. El punt mitjà entre p, q és $b \in \mathbb{A}$ tal que $b = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pq}$ si $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$.

Proposició 1.4.5. *S'ha de complir que $p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pq} = q + \frac{1}{2}\overrightarrow{qp}$.*

Demostració. Evidentment, $p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pq} - \frac{1}{2}\overrightarrow{qp} = q + \frac{1}{2}(\overrightarrow{qp} - \overrightarrow{qp}) = p + \overrightarrow{pq} = q$. ■

Corol·lari 1.4.6. $\overrightarrow{bp} + \overrightarrow{bq} = \overrightarrow{0}$.

Demostració. $\overrightarrow{bp} = -\overrightarrow{pb} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{pq}$ i $\overrightarrow{bq} = -\overrightarrow{qb} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{qp} = \frac{1}{2}\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{qb}$, on en la última igualtat hem usat que $b = q + \frac{1}{2}\overrightarrow{qp}$. La seva suma ens dona $\overrightarrow{0}$. ■

Generalitzem el baricentre entre dos punts a el baricentre entre n punts.

Teorema 1.4.7. *Sigui $(\mathbb{A}, E)$ un espai afí sobre $\mathbb{K}$. Siguin $p_1, \dots, p_n$ punts d'$\mathbb{A}$. Si $\frac{1}{m} \in \mathbb{K}$ existeix un únic punt $b \in \mathbb{A}$ tal que*

$$\overrightarrow{bp_1} + \cdots + \overrightarrow{bp_m} = \overrightarrow{0}. \tag{1.4.4}$$

Demostració. Dividirem la demostració entre existència i unicitat. Escollim un punt $a \in \mathbb{A}$ qualsevol. Prenem com a baricentre $b = a + \frac{1}{m}(\overrightarrow{ap_1} + \cdots + \overrightarrow{ap_m})$. Comprovem que satisfà les condicions de l'enunciat:

- $\boxed{\exists}$ Volem provar $\overrightarrow{bp_1} + \cdots + \overrightarrow{bp_m} = \overrightarrow{0}$. Reescrivim $\overrightarrow{bp_1} + \cdots + \overrightarrow{bp_m}$ mitjançant la relació de Chasles i ens queda $\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ap_1} + \cdots + \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ap_m} = m\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ap_1} + \cdots + \overrightarrow{ap_m} = m\overrightarrow{ba} + m\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{0}$.
- $\boxed{\exists!}$ Sigui c un altre punt tal que $\overrightarrow{cp_1} + \cdots + \overrightarrow{cp_m} = \overrightarrow{0}$. Aleshores, $0 = \overrightarrow{cp_1} + \cdots + \overrightarrow{cp_m} = \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{ap_1} + \cdots + \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{ap_m} = m\overrightarrow{ca} + \overrightarrow{ap_1} + \cdots + \overrightarrow{ap_m}$, d'on $m\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ap_1} + \cdots + \overrightarrow{ap_m} = m\overrightarrow{ab}$. D'aquí deduïm que $m\overrightarrow{ac} = m\overrightarrow{ab} \implies c = b$, on hem tingut en compte que $m \neq 0$ a $\mathbb{K}$.

Fixem-nos que en el cas particular $m = 2$ estem parlant de punt mitjà. ■

Proposició 1.4.8. *Prenem un sistema de referència $\{p; e_1, \dots, e_n\}$ a $(\mathbb{A}, E)$. Donats m punts en coordenades $p_1 = (x_1^1, \dots, x_n^1), \dots, p_m = (x_1^m, \dots, x_n^m)$ el seu baricentre és:*

$$b = \left(\frac{x_1^1 + \cdots + x_1^m}{m}, \dots, \frac{x_n^1 + \ldots + x_n^m}{m} \right). \tag{1.4.5}$$

Demostració. Escollim $a = p$, l'origen de coordenades, en la demostració anterior. Aleshores:

$$\begin{gathered} b = p + \tfrac{1}{m}\overrightarrow{pp_1} + \cdots + \tfrac{1}{m}\overrightarrow{pp_m} \\ \overrightarrow{pb} = \tfrac{1}{m}\overrightarrow{pp_1} + \cdots + \tfrac{1}{m}\overrightarrow{pp_m} = \tfrac{1}{m}(x_1^1 e_1 + \cdots + x_n^1 e_n) + \cdots + \tfrac{1}{m}(x_1^m e_1 + \cdots + x_n^m e_n) = \\ \left(\frac{x_1^1 + \cdots + x_1^m}{m} \right) e_1 + \cdots + \left(\frac{x_n^1 + \ldots + x_n^m}{m} \right) e_n. \end{gathered} \tag{1.4.6}$$

■

Exemple 1.4.9. En $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ considerem $p_1 = (1,1), p_2 = (8,1), p_3 = (3,4)$. Aleshores, $b = (\frac{1+8+3}{3}, \frac{1+1+4}{3}) = (4,2)$. Deixem la representació gràfica com a exercici per al lector.

Siguin $\{p_0, \dots, p_n\}$ i $\{q_0, \dots, q_n\}$ dos sistemes de referència baricèntrics d'un espai afí $(\mathbb{A}, E)$. Siguin $\{q_i^0, \dots, q_i^n\}$ les coordenades baricèntriques de q_i en el sistema $\{p_0, \dots, p_n\}$, $i = 0, \dots, n$. Donat $x \in (\mathbb{A}, E)$, indiquem per $(x^0, \dots, x^n)$ i $(\overline{x}^0, \dots, \overline{x}^n)$ les seves coordenades baricèntriques en els sistemes $\{p_0, \dots, p_n\}$ i $\{q_0, \dots, q_n\}$ respectivament. Aleshores, per a cada p,

$$\overrightarrow{px} = \sum_{i=0}^n \overline{x}^i \overrightarrow{pq_i} = \sum_{i=0}^n \overline{x}^i \left(\sum_{j=0}^n q_i^j \overrightarrow{pp_j} \right) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \overline{x}^i q_i^j \right) \overrightarrow{pp_j}, \tag{1.4.7}$$

amb suma de coeficients

$$\sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^n \overline{x}^i q_i^j \right) = \sum_{i=0}^n \overline{x}^i \left(\sum_{j=0}^n q_i^j \right) = \sum_{i=0}^n \overline{x}^i = 1. \tag{1.4.8}$$

Per tant,

$$\sum_{i=0}^n q_i^j \overline{x}^i = x^j, \ j = 0, \dots, n. \tag{1.4.9}$$

Aquestes $(n+1)$ expressions equivalen a la igualtat matricial $Q\overline{x} = x$, on $Q = (q_i^j)$, és la matriu que té per columnes les coordenades baricèntriques de $q_0, \dots, q_n$ i $\overline{x}, x$ són les matrius d'una columna formades per les coordenades d'x en els sistemes $\{q_0, \dots, q_n\}$ i $\{p_0, \dots, p_n\}$, respectivament.

Observació 1.4.10. La matriu Q és invertible, ja que

$$\det Q = \begin{vmatrix} q_0^0 & \cdots & q_n^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_0^n & \cdots & q_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ q_0^1 & \cdots & q_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_0^n & \cdots & q_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ q_0^1 & q_1^1 - q_0^1 & \cdots & q_n^1 - q_0^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_0^n & q_1^n - q_0^n & \cdots & q_n^n - q_0^n \end{vmatrix} = \det_{(\overrightarrow{p_0p_i})} (\overrightarrow{q_0q_1}, \dots, \overrightarrow{q_0q_n}) \neq 0. \tag{1.4.10}$$

Definició 1.4.11 (Alineació)**.** Donats tres punts diferents a, b, c en un espai afí direm que a, b, c estan alineats si

$$\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{bc}, \ \lambda \in \mathbb{K}. \tag{1.4.11}$$

En altres paraules, si els vectors $\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{bc}$ són proporcionals.

Proposició 1.4.12. *L'alineació no depèn de l'ordre d'a, b, c.*

Demostració. Si $\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{bc}$, aleshores $\overrightarrow{ba} = \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{ac} - \overrightarrow{ac} = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\overrightarrow{ac} = \frac{\lambda-1}{\lambda}\overrightarrow{ca}$. També, $\overrightarrow{cb} = \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{ab} = \frac{\lambda}{\lambda-1}\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ab} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda-1}\right)\overrightarrow{ab} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{ab}$. I així successivament. ∎

Definició 1.4.13 (Triangle en un espai afí)**.** Si tres punts són diferents i no estan alineats direm que formen un triangle.

1.5

Varietats lineals

1.5.1 Conceptes

Definició 1.5.1 (Varietat lineal)**.** Una varietat lineal en un espai afí $(\mathbb{A}, E)$ sobre un cos $\mathbb{K}$ és un subconjunt de la forma

$$\mathbb{L} = p + F := \{p + u \mid u \in F\}, \tag{1.5.1}$$

on $p \in \mathbb{A}$ és un punt i $F \subset E$ és un subespai vectorial. Diem que F és el subespai director de $\mathbb{L}$ i que $\dim \mathbb{L} = \dim F$. Així, els punts són varietats lineals de dimensió 0 i l'única varietat lineal de dimensió n és $\mathbb{A}$.

Observació 1.5.2. També podem definir una varietat lineal d'aquesta manera, totalment equivalent però menys genèrica ja que depèn d'un subespai vectorial generat per un vector determinat, $\overrightarrow{ab}$: *sigui (A, E) un espai afí sobre $\mathbb{K}$. Definim:*

$$\mathbb{L} = \{a + \lambda\overrightarrow{ab} \mid \lambda \in \mathbb{K}\} := a + \langle\overrightarrow{ab}\rangle. \tag{1.5.2}$$

a correspon a $\lambda = 0$ i b correspon a $\lambda = 1$.

Observació 1.5.3. Podem dir que les varietats lineals als espais afins serien el que els subespais vectorials són als espais vectorials: un espai afí (L, F, φ') on $L \subset \mathbb{A}$, F subespai d'E i $\varphi' : \mathbb{L}\times\mathbb{L} \longrightarrow F$ la restricció de φ. Es compleix, en altres paraules, que $\forall p, q \in \mathbb{L}$, $\overrightarrow{pq} = \varphi(p, q) \in F$ i, llavors, $\varphi'(p, q) = \varphi(p, q)$. En particular, si $p \in \mathbb{L}$, tot altre $q \in \mathbb{L}$ és de la forma $q = p+\overrightarrow{pq} \in p+F$ i $\mathbb{L} \subset p + F$. Recíprocament, tot $q = p + u \in p + F$ és tal que $q = \varphi_p^{-1}(u)$. Com que, clarament $q = \varphi_p^{-1}(u) = \varphi_p'^{-1}(u)$, resulta que $q \in \mathbb{L}$ i, per tant, $p + F \subset \mathbb{L}$.

Definició 1.5.4 (Rectes i hiperplans)**.** A les varietats lineals de dimensió 1 les anomenem *rectes* i a les de dimensió $n-1$, *hiperplans*. La recta que passa per a i b està formada per a, b i tots els punts c tals que a, b, c estan alineats.

Observació 1.5.5. Una varietat lineal $\mathbb{L} = a + F$ és en si mateixa un espai afí que anomenarem (L, F, φ) d'igual dimensió que (A, E, φ), on $\mathbb{L}$ és el conjunt de punts, F l'espai vectorial i l'aplicació $\varphi : \mathbb{L} \times F \longrightarrow \mathbb{L}$ és la restricció d'$\mathbb{A} \times E \longrightarrow \mathbb{A}$. En altres paraules, les varietats lineals són *subespais afins*.

Definició 1.5.6 (Varietats paral·leles)**.** $\mathbb{L} = a + F$, $\mathbb{M} = b + G$ són dues varietats lineals paral·leles si $F \subseteq G$ o bé $G \subseteq F$. La notació és la següent: $\mathbb{L} \parallel \mathbb{M}$.

Exemple 1.5.7. En l'espai afí $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ considerem un punt $p = (a_1, \dots, a_n)$ i un subespai

$$F = \langle (v_1^1), \dots, (v_1^k, \dots, v_n^k)\rangle \subset E = \mathbb{K}^n. \tag{1.5.3}$$

Per definició, la varietat lineal $\mathbb{L} = p + F$ és el conjunt de punts de la forma:

$$(a_1, \dots, a_n)+\lambda_1(v_1^1, \dots, v_n^1)+\cdots+\lambda_k(v_1^k, \dots, v_n^k) = (a_1+\lambda_1 v_1^1+\cdots+\lambda_k v_1^k, \dots, a_n+\lambda_1 v_n^1+\cdots+\lambda_k v_n^k) \tag{1.5.4}$$

variant λ_i en $\mathbb{K}$.

Exemple 1.5.8. El subconjunt $\mathbb{L} \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ definit per

$$\mathbb{L} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B = 0\} \tag{1.5.5}$$

és una varietat lineal, on $A_i \in \mathbb{K}$ són constants no totes nul·les i $B \in \mathbb{K}$. En efecte, considerem el subespai vectorial $H \subset E = \mathbb{K}^n$ donat per

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = 0\}. \tag{1.5.6}$$

Aleshores, una solució general de l'equació que defineix $\mathbb{L}$ s'escriu com la suma d'una solució particular i una solució del sistema homogeni; per tant, $\mathbb{L}$ és una varietat lineal de subespai director H. Aquesta varietat té dimensió $n - 1$; és un hiperplà. També podem considerar varietats lineals donades per diverses equacions. El subespai vectorial director ve definit pel mateix sistema d'equacions un cop eliminats els termes independents.

Exemple 1.5.9. En l'espai afí $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ considerem $\mathbb{L} = (1, 0, 2) + \langle(1, -1, 1)\rangle$, la qual és paral·lela a $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 3z = 6\}$. Ara fem el pas recíproc i comprovem que $\mathbb{L}\|\mathbb{M}$; en altres paraules, és una varietat lineal:

$$\begin{aligned} M = \{(x, y, z) \mid y = 2x - 3z - 6\} &= \{(0, -6, 0) + x(1, 2, 0) + z(0, -3, 1)\} \\ &= (0, -6, 0) + \langle(1, 2, 0), (0, -3, 1)\rangle. \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

Observació 1.5.10. Per definició, per a un vector $u \in F$ podem posar $b = p + u$ i $u = \overrightarrow{pb}$. Per tant, F s'identifica amb el conjunt $\{\overrightarrow{pb} \mid b \in \mathbb{L}\}$.

Propietat 1.5.11. *Sigui $\mathbb{L} = p + F$. Es tenen les propietats següents:*

1. *Si $q \in \mathbb{L} = p + F$, aleshores $\mathbb{L} = q + F$.*
2. *El subespai director és únic.*
3. *Si dos punts a, b pertanyen a la varietat lineal $\mathbb{L}$, aleshores $\overrightarrow{ab} \in F$.*
4. *Siguin $\mathbb{L} = p + F$ i $\mathbb{M} = q + G$. $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{M} \iff p \in q + G$ i $F \subset G$.*

Demostració.

- Hem de demostrar que $\mathbb{L} = p + F$. Demostrem les dues inclusions.
  - $\boxed{\subseteq}$ Si $x \in \mathbb{L}$, qualsevol, aleshores $x = p + u, u \in F$. Notem que si $q \in \mathbb{L}$, aleshores $q = p + v$, o sigui $\overrightarrow{pq} = v \in F$. Així, $x = q + \overrightarrow{qp} + u = q - v + u \in q + F$.
  - $\boxed{\supseteq}$ Si $a \in q + F$, és a dir, $a = q + w, w \in F$, substituint ens queda $a = p + v + w \in \mathbb{L}$.

  Alternativament, podem proposar una demostració directa usant la tercera propietat: per hipòtesi $\overrightarrow{pq} \in F$ i es dona

  $$d \in a+F \iff \overrightarrow{ad} \in F \iff \overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bd} = \overrightarrow{ab}-\overrightarrow{db} \in F \iff \overrightarrow{db} \in F \iff d \in b+F. \quad (1.5.8)$$

- Utilitzant 1.5.10:

  $$F = \{\overrightarrow{pb} \mid b \in \mathbb{L}\} = \overrightarrow{pq} + \{\overrightarrow{qb} \mid b \in \mathbb{L}\}. \quad (1.5.9)$$

  Com que F és subespai i $\overrightarrow{pq} \in F$ tenim que també $F = \{\overrightarrow{qb} \mid b \in \mathbb{L}\}$.
- Expressem $a = p + u, b = p + v$ i tenim que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ap} + \overrightarrow{pb} = u - v \in F$ donat que tant u com v hem suposat que pertanyen a F.
- Si $p+F \subset q+G$, aleshores $p \in p+F \subset q+G$. Pel primer apartat podem posar $q+G = p+G$ i tenim:

  $$F = \{\overrightarrow{pb} \mid b \in p + F\} \subset \{\overrightarrow{pb} \mid b \in p + G\} = G. \quad (1.5.10)$$

  Recíprocament, com $p \in q+G$, aleshores $q+G = p+G$ i arribem a $p+F \subset p+G = q+G$.

■

Corol·lari 1.5.12 (Postulat d'Euclides)**.** *Sigui $(\mathbb{A}, E)$ un espai afí. Donats $p, q \in \mathbb{A}$ amb $p \neq q$ hi ha una i només una recta que conté p i q, que és $\mathbb{L} = p + \langle\overrightarrow{pq}\rangle$. En essència, per dos punts diferents passa una única recta.*

Demostració. Prenem $\mathbb{L} = p + \langle\overrightarrow{pq}\rangle$, que és una recta perquè $p \neq q \implies \overrightarrow{pq} \neq \overrightarrow{0}$. Sigui $\mathbb{L}'$ una recta que passa per p i per q; $\mathbb{L}' = p + F$. Aleshores, per a algun subespai F d'E de dimensió 1 podem dir:

$$\left.\begin{array}{l} p \in \mathbb{L}' \\ q \in \mathbb{L}' \end{array}\right\} \implies \overrightarrow{pq} \in F \implies F = \langle\overrightarrow{pq}\rangle \implies \mathbb{L}' = p + \langle\overrightarrow{pq}\rangle = L. \quad (1.5.11)$$

■

Corol·lari 1.5.13. *Donats $p_1, \ldots, p_k$ diferents, la varietat lineal*

$$\mathbb{L} = p_1 + \langle\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_k}\rangle \quad (1.5.12)$$

conté $p_1, \ldots, p_k$. A més, tenim que $\dim \mathbb{L} = \dim\langle\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_k}\rangle \leq k - 1$.

Proposició 1.5.14. *Sigui* $(\mathbb{A}, E)$ *un espai afí i siguin* $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{A}$. *Les següents condicions són equivalents:*

1. *Els vectors* $\overrightarrow{a_1a_2}, \dots, \overrightarrow{a_1a_k}$ *de* E *són linealment independents.*
2. *Fixat qualsevol* i, *els vectors* $\{\overrightarrow{a_ia_h},\ h \neq i\}$ *són linealment independents.*
3. *Per a tot* $p \in A$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^1\overrightarrow{pa_1} + \cdots + \lambda^k\overrightarrow{pa_k} = 0 \\ \lambda^1 + \cdots + \lambda^k = 0 \end{aligned}\right\} \implies \lambda^1 = \cdots = \lambda^k = 0. \tag{1.5.13}$$

Demostració. La demostració és anàloga a la del corol·lari anterior: $p_i = p_1 + \overrightarrow{p_1p_i} \implies p_i \in \mathbb{L}, \forall i$. ■

Definició 1.5.15 (Afinment independents). Quan $\dim \mathbb{L} = k-1$, es diu que els punts $p_1, \dots, p_k$ són afinment independents. Equival a dir que els vectors $\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_k}$ són linealment independents (no depèn de l'elecció de p_1).

Definició 1.5.16. La varietat lineal

$$\mathbb{L} = p_1 + \langle\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_k}\rangle \tag{1.5.14}$$

es diu varietat lineal generada per $p_1, \dots, p_k$. És minimal entre totes les varietats lineals que contenen $p_1, \dots, p_k$. És minimal entre totes les varietats lineals que contenen $p_1, \dots, p_k$.

Proposició 1.5.17. *Si* $\mathbb{L}'$ *conté* $p_1, \dots, p_k$, *aleshores* $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{L}'$.

Demostració. Posem $\mathbb{L}' = p_1 + F$.

$$\left.\begin{aligned} p_1 \in \mathbb{L}' \\ p_i \in \mathbb{L}',\ \forall i \end{aligned}\right\} \implies \overrightarrow{p_1p_i} \in F \forall i \implies F = \langle\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_k}\rangle \subseteq F. \tag{1.5.15}$$

Aleshores, $\mathbb{L} = \langle\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_k}\rangle \subseteq p_1 + F = \mathbb{L}'$. ■

1.5.2 Operacions amb varietats lineals

Siguin $\mathbb{L}, \mathbb{M}$ dues varietats lineals. Considerem la intersecció com a conjunts de $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$; el conjunt de punts que pertanyen a les dues varietats. En la proposició següent provem que la intersecció, si no és buida, és una varietat lineal i que el seu subespai director és la intersecció dels subespais directors.

Proposició 1.5.18. *Si* $(p + F) \cap (q + G) \neq \emptyset$, *aleshores* $(p + F) \cap (q + G) = c + (F \cap G)$ *on* $c \in \mathbb{L}, \mathbb{M}$.

Demostració. Sigui $c \in (p + F) \cap (q + G)$. Podem suposar $p = q = c$. Així, $c + (F \cap G) \subset (c + F) \cap (c + G)$. Per l'altra inclusió, si $x \in (c + F) \cap (c + G)$, tindrem que $x = c + u, u \in F$ i $x = c + v, v \in G$. Aleshores, per definició, $u = \overrightarrow{cx} = v \in F \cap G$. ■

Demostració alternativa. Observem primer que $\mathbb{L}_1 = q + F_1$ i $\mathbb{L}_2 = q + F_2$.

$\boxed{\subseteq}$ Si $p \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$, aleshores $p = q + u_1, u_1 \in F_1$ i $p = q + u_2, u_2 \in F_2$. Així, $u_1 = u_2$, d'on $u_1 \in F_1 \cap F_2$ i, per tant, $p \in q + (F_1 \cap F_2)$.

$\boxed{\supseteq}$ Directament, $q + (F_1 \cap F_2) \subset q + F_1 = \mathbb{L}_1$ i $q + (F_1 \cap F_2) \subseteq q + F_2 = \mathbb{L}_2$. Aleshores, $q + (F_1 \cap F_2) \subseteq L_1 \cap L_2$.

Demostrant les dues inclusions hem demostrat la igualtat, i ja hem acabat. ■

Proposició 1.5.19. *Siguin $\mathbb{L} = p + F, \mathbb{M} = q + G$ varietats lineals. Aleshores,*

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset \iff \overrightarrow{pq} \in F + G. \tag{1.5.16}$$

Demostració.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \emptyset \implies \exists q \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$. Aleshores, $\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_1q} + \overrightarrow{qp_2} \in F_1 + F_2$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\overrightarrow{p_1p_2} \in F_1 + F_2$ vol dir que $\overrightarrow{p_1p_2} = u_1 + u_2, u_1 \in F_1, u_2 \in F_2$. Aleshores, $p_1 + u_1 = p_2 + \overrightarrow{p_2p_1} + u_1 = p_2 - u_1 - u_2 + u_1 = p_2 - u_2 \in \mathbb{L}_2$. Per tant, $p_1 + u_1 \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \implies \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \emptyset$. ■

Definició 1.5.20 (Suma de varietats lineals). Siguin $\mathbb{L} = p + F, \mathbb{M} = q + G$ dues varietats lineals. Anomenem suma de $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$ i ho escriurem com $\mathbb{L} + \mathbb{M}$ a la varietat lineal minimal que conté $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$.

Observació 1.5.21. Recordem les propietats dels espais vectorials, en particular les inclusions, i tenim que són totalment anàlogues amb les varietats lineals: $\mathbb{L} \subset \mathbb{M}$, aleshores $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \mathbb{L}$ i $\mathbb{L} + \mathbb{M} = \mathbb{M}$.

La suma de varietats lineals introdueix una notació que pot portar a confusió: si $p_0, \dots, p_k$ són punts, podem veure cadascun d'ells com una varietat lineal de dimensió 0 i, per tant, podem usar la notació $p_0 + \cdots + p_k$ que simbolitza la varietat lineal més petita que conté els punts. Recordem que la suma de punts no té sentit a no ser que la suma dels coeficients sigui igual a 1, com en 1.4.2. En ocasions, per tal d'evitar confusions amb la suma dels punts en l'espai afí.

Proposició 1.5.22. *Es té la fórmula següent per la suma de dues varietats lineals $\mathbb{L} = p + F$ i $\mathbb{M} = q + G$:*

$$\mathbb{L} + \mathbb{M} = p + \langle \overrightarrow{pq} \rangle + F + G. \tag{1.5.17}$$

Demostració.

1. $p_1 + (\langle \overrightarrow{p_1p_2} \rangle + F_1 + F_2)$ conté $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$. A més, $\mathbb{L}_1 = p_1 + F_1$ i $L_2 = p_2 + F_2$ i $p_2 = p_1 + \overrightarrow{p_1p_2}$.
2. Si $\mathbb{L}'$ conté $\mathbb{L}_1$ i $\mathbb{L}_2$, posem $\mathbb{L}' = p_1 + G$ per a algun G. Ja hem demostrat que $F_1 \subseteq G$, ja que $\mathbb{L}_1 \subseteq G$ i $F_2 \subseteq G$. També, $\overrightarrow{p_1p_2} \in G$ i, per tant, $p_1 + (\langle \overrightarrow{p_1p_2} \rangle + F_1 + F_2) \subseteq p_1 + G = \mathbb{L}'$.

■

Exemple 1.5.23. $\mathbb{L}_1 = (2, -2, 0) + \langle (1, 3, -1) \rangle = p_1 + F_1$ i $\mathbb{L}_2 = (0, 4, -2) + \langle (2, 2, -1) \rangle = p_2 + F_2$. Ens queda que $\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 = (2, -2, 0) + \langle (-2, 6, -2), (1, 3, -1), (2, 2, -1) \rangle$ i $\dim(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2) = 2 \implies \overrightarrow{p_1p_2} \in F_1 + F_2 \implies \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \emptyset$.

Observació 1.5.24. Pot passar que dues varietats lineals no es tallin i tampoc siguin paral·leles. En cas que ho fossin, o no es tallen o bé estan una dintre de l'altra.

Proposició 1.5.25. *Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí i E el seu espai director. Siguin $\mathbb{L}_1 = a + F$ i $\mathbb{L}_2 = b + G$ dues varietats lineals d'$\mathbb{A}$. Tenim:*

1. $E = F + G \implies \mathbb{A} = \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2$,

2. $\mathbb{A} = \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 \not\Rightarrow E = F + G$,
3. $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\} \not\Rightarrow \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{p\}$,
4. $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{p\} \implies F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$,
5. $E = F \oplus G \implies \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{p\}$.

Teorema 1.5.26 (Fórmules de Grassmann). *Siguin* $\mathbb{L} = p + F$ *i* $\mathbb{M} = q + G$ *dues varietats lineals. Volem fer* $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim(\langle\overrightarrow{p_1p_2}\rangle + F + G)$. *Es tenen les fórmules següents:*

1. $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M})$, *si* $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$;
2. $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} + 1 - \dim(F \cap G)$, *si* $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$.

Demostració. Aplicant la fórmula de Grassmann per a subespais vectorials i 1.5.22:

1. $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim(\langle\overrightarrow{pq}\rangle + F + G) = \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M})$, ja que $\overrightarrow{pq} \in F + G$ pel fet de suposar que $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$.
2. $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim(\langle\overrightarrow{pq}\rangle + F + G) = \dim(F + G) + 1 = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) + 1 = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} + 1 - \dim(F \cap G)$, ja que $\overrightarrow{pq} \notin F + G$ pel fet de suposar que $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$.

■

Observació 1.5.27. Cal notar que el terme $\dim(F \cap G)$ no equival a la dimensió de la intersecció de les varietats lineals en el cas que $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$ ($\emptyset$ no és una varietat lineal). Les fórmules de Grassmann permeten discutir la posició relativa de dues varietats lineals.

Corol·lari 1.5.28.

1. *Si* p, q *són dos punts diferents, aleshores la varietat suma té dimensió 1. En altres paraules, per dos punts passa una única recta.*
2. *Si* p, q, r *són tres punts diferents, considerem la recta* l *que passa per* p *i* q. *Si* $r \in l$, *diem que els tres punts estan alineats. En cas contrari, la varietat suma dels tres punts té dimensió 2, és un pla. En aquest cas, els tres punts determinen un triangle. Si afegim un quart punt fora del pla, diem que els quatre punts formen un tetraedre.*
3. *Considerem dues rectes* $r = p + \langle u\rangle$ *i* $s = q + \langle v\rangle$ *en un espai afí de dimensió 2. Suposem que les rectes són diferents. Si no es tallen, per la fórmula de Grassmann:*

$$\dim(r + s) = \dim r + \dim s - \dim\langle u\rangle \cap \langle v\rangle + 1 = 3 - \dim\langle u\rangle \cap \langle v\rangle. \tag{1.5.18}$$

Atès que l'espai afí té dimensió 2, $\dim(r + s) \leq 2$ *i, per tant,* $\dim\langle u\rangle \cap \langle v\rangle \geq 1$, *és a dir,* $\langle u\rangle = \langle v\rangle$ *i les rectes són paral·leles però diferents. Si* r *i* s *es tallen i són diferents, aleshores*

$$\emptyset \subsetneq r \cap s \subsetneq r. \tag{1.5.19}$$

i, per tant, $r \cap s$ *és una varietat lineal de dimensió 0, és a dir, un punt. En aquest cas, per la fórmula de Grassmann* $r + s$ *és tot el pla. La conclusió és que dues rectes diferents del pla o són paral·leles o es tallen en un punt.*

4. *Amb la mateixa notació, suposem ara que* r, s *són rectes en un espai afí de dimensió* $n \geq 3$. *Si es tallen, pel mateix argument que abans, ho fan en un punt i* $r + s$ *és un pla. Diem que són coplanàries secants. Si són disjuntes, per la fórmula de Grassmann, trobem dos casos:*
   - *si són paral·leles, o sigui* $\langle u\rangle = \langle v\rangle$, *aleshores* $\dim(r + s) = 2$. *En aquest cas, són coplanàries paral·leles: no es creuen;*

- *no són paral·leles i, en conseqüència, la dimensió de* $\langle u\rangle \cap \langle v\rangle$ *és zero. Per la fórmula* $\dim(r+s)=3$*, diem que les rectes es creuen.*

5. *Suposem que* $\mathbb{L}$ *és una varietat lineal de dimensió* k *i que* p *és un punt que no pertany a* $\mathbb{L}$*. Aleshores, la fórmula de Grassmann ens diu que la dimensió de* $\mathbb{L}+p$ *és* $k+1$*.*
6. *Considerem un hiperplà* $\mathbb{H}$ *i una varietat lineal* $\mathbb{L}$ *de dimensió* k *en un espai afí* $(\mathbb{A},E)$*. Suposem que* $\mathbb{L}\not\subseteq\mathbb{H}$*, aleshores existeix un punt* $p\in\mathbb{L}$ *que no està en* $\mathbb{H}$*. Per l'exemple anterior* $\mathbb{A}=\mathbb{H}+p$ *i, per tant,* $\mathbb{L}+\mathbb{H}=\mathbb{A}$*. Aplicant la fórmula de Grassmann trobem:*
   - *si* $\mathbb{L}\cap\mathbb{H}\neq\emptyset$*, aleshores* $\dim(\mathbb{L}+\mathbb{H})=n=k+n-1-\dim(\mathbb{L}\cap\mathbb{H})$*. Per tant,* $\dim(L\cap\mathbb{H})=k-1$*;*
   - *si* $\mathbb{L}\cap\mathbb{H}=\emptyset$*, aleshores* $\dim(\mathbb{L}+\mathbb{H})=n=k+n-1-\dim(F\cap G)+1$*, on* F *és el subespai director de* $\mathbb{L}$ *i* G *el d'*$\mathbb{H}$*. Per tant,* $\dim(F\cap G)=k=\dim F$*,* $F\subset G$ *i les varietats són paral·leles.*
7. *Particularitzem la situació anterior al cas d'una recta* r *i un pla* π *en un espai afí de dimensió 3. Obtenim que es poden donar tres situacions: o bé* $r\subset\pi$ *o bé* r *i* π *es tallen en un punt, o bé* r *i* π *són paral·leles.*

Siguin $p_0,\dots,p_n\in\mathbb{A}$ punts diferents. $\dim(\{p_0\}+\cdots+\{p_k\})\le k$: cada punt afegit augmenta la dimensió en una unitat, com a molt. Arrel d'això, definim:

Definició 1.5.29 (Punts linealment independents)**.** Diem que $k+1$ punts diferents són linealment independents si $\dim(\{p_0\}+\cdots+\{p_k\})=k$.

Observació 1.5.30. Utilitzant 1.5.22 de manera iterativa tenim que:

$$\{p_0\}+\cdots+\{p_k\}=p_i+\langle\overrightarrow{p_ip_0},\dots,\overrightarrow{p_ip_k}\rangle. \tag{1.5.20}$$

Per tant, els punts són linealment independents si, i només si, $\dim(\langle\overrightarrow{p_ip_0},\dots,\overrightarrow{p_ip_k}\rangle)=k$ per a qualsevol i. Equivalentment, els punts són linealment independents si, i només si, els k vectors $\overrightarrow{p_ip_0},\dots,\overrightarrow{p_ip_k}$ són linealment independents per a qualsevol i. En particular, qualsevol subcol·lecció d'una col·lecció de punts linealment independents està formada per punts linealment independents.

1.5.3 Equacions de les varietats lineals

Fixar un sistema de referència permet crear un nexe entre la geometria i l'àlgebra; les varietats lineals tenen equacions associades que permeten comprovar quan un punt pertany a una varietat lineal fent càlculs amb les seves coordenades. Hi ha dues formes naturals de donar les equacions d'una varietat lineal: les paramètriques i les implícites.

1.5.3.1 Paramètriques

Suposem que s'ha fixat un espai afí $(\mathbb{A},E)$ sobre un cos $\mathbb{K}$ amb dimensió n i un sistema de referència $\{p;e_1,\dots,e_n\}$ i considerem la varietat lineal $\mathbb{L}$ de dimensió k següent:

$$\mathbb{L}=(a_1,\dots,a_n)+\langle(\alpha_1^1,\dots,\alpha_n^1),\dots,(\alpha_1^k,\dots,\alpha_n^k)\rangle. \tag{1.5.21}$$

Aleshores, els punts de $\mathbb{L}$ són, per definició, els que s'escriuen sumant a $(a_1,\dots,a_n)$ combinacions lineals de la base del subespai, o sigui que $(x_1,\dots,x_n)$ pertany a $\mathbb{L}$ si es té la igualtat

$$(x_1,\dots,x_n)=(a_1+\lambda_1\alpha_1^1+\cdots+\lambda_k\alpha_1^k,\dots,a_n+\lambda_1\alpha_n^1+\cdots+\lambda_k\alpha_n^k) \tag{1.5.22}$$

per a certs escalars $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Les equacions paramètriques seran, doncs:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda_1 \alpha_1^1 + \cdots + \lambda_k \alpha_1^k, \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + \lambda_1 \alpha_n^1 + \cdots + \lambda_k \alpha_n^k. \end{aligned} \tag{1.5.23}$$

On, recordem, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ és una base del subespai i $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ prenen tots els valors al cos $\mathbb{K}$.

Exemple 1.5.31. Una recta d'un pla afí que passa per un punt p de coordenades (a_1, a_2) en una referència fixada i vector director (u_1, u_2) té equacions paramètriques

$$x = a_1 + \lambda u_1,\ y = a_2 + \lambda u_2. \tag{1.5.24}$$

1.5.3.2 Equacions implícites

Procés 1.5.32. *Recordem primer com es troben les equacions d'un subespai vectorial F: fixem una base $e_1, \ldots, e_n$ i suposem que $(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, (\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k)$ són les coordenades en la base fixada d'una base d'F. Imposem que un vector variable $(x_1, \ldots, x_n)$ pertanyi al subespai demamant que*

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x_1 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & \alpha_n^1 & \cdots & \alpha_n^k \end{pmatrix} = k. \tag{1.5.25}$$

Caldrà anul·lar els menors d'ordre $k+1$ i així obtindrem un sistema d'equacions homogènies. En el cas de l'espai afí amb una referència fixada $\{p; e_i\}$ tenim que un punt x pertany a $\mathbb{L} = a + F$ si, i només si, és de la forma $x = a + u, u \in F$. Per tant, $\overrightarrow{ax} = u \in F$. Utilitzant la notació d'abans per a una base d'F, tindrem que:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - a_n & \alpha_n^1 & \cdots & \alpha_n^k \end{pmatrix} = k. \tag{1.5.26}$$

Així, obtindrem les equacions d'$\mathbb{L}$: $n - k$ equacions on $k = \dim \mathbb{L}$ i $n = \dim E$.

Proposició 1.5.33. *Si F és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ i $\dim F = d$, existeix un sistema S de $n - d$ equacions lineals homogènies independents tal que el conjunt de solucions de S és F.*

Demostració. Si $F = \mathbb{R}^n$, ja hem acabat: el sistema d'equacions buit és sistema d'equacions de F. Suposem que $F \neq \mathbb{R}^n$. Com que el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni de n incògnites és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensió $n - r$, on r és el rang de la matriu del sistema, aleshores si S és un sistema d'equacions lineals homogènies en n incògnites tenim que el conjunt de solucions de S és subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$. Per tant, si $v_1, \ldots, v_d$ és una base de F i $v_1, \ldots, v_d$ són solucions de S, qualsevol vector de F és també solució de S. Busquem equacions de les quals $v_1, \ldots, v_d$ siguin solucions. Si tenim $v_j = (b_j^1, b_j^2, \ldots, b_j^n)$, una equació lineal $a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ té $v_1, \ldots, v_d$ com a solucions si es compleix

$$a_1 b_j^1 + a_2 b_j^2 + \ldots + a_n b_j^n = 0,\ 1 \leq j \leq d. \tag{1.5.27}$$

Els coeficients de les equacions que busquem són, doncs, solucions d'aquest sistema amb incògnites $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Com els vectors v_j són linealment independents perquè són base, el sistema (1.5.27) té rang d i, per tant, té $n-d$ solucions independents. Si aquestes són

$$(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1), (a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2), \ldots, (a_1^{n-d}, a_2^{n-d}, \ldots, a_n^{n-d}), \tag{1.5.28}$$

el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1^1 y_1 + a_2^1 y_2 + \ldots + a_n^1 y_n & = & 0 \\ a_1^2 y_1 + a_2^2 y_2 + \ldots + a_n^2 y_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_1^{n-d} y_1 + a_2^{n-d} y_2 + \ldots + a_n^{n-d} y_n & = & 0 \end{array}\right\} \tag{1.5.29}$$

és de $n-d$ solucions independents i té com a solució els vectors de F. Queda veure que tota solució d'aquest sistema és de F. Sabem que les seves solucions formen un subespai G de $\mathbb{R}^n$ de dimensió $n-(n-d) = d$. Com tenim $F \subset G$ i $\dim F = \dim G$, obtenim la igualtat. Per tant, és un sistema d'equacions de F. ■

Observació 1.5.34. Notem que cadascuna d'aquestes equacions provindrà d'imposar l'anul·lació d'un menor d'ordre $k+1$ de la matriu anterior. O sigui:

$$0 = \begin{vmatrix} x_{i_1} - a_{i_1} & \alpha_{i_1}^1 & \cdots & \alpha_{i_1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i_{k+1}} - a_{i_{k+1}} & \alpha_{i_{k+1}}^1 & \cdots & \alpha_{i_{k+1}}^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{i_1} & \alpha_{i_1}^1 & \cdots & \alpha_{i_1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i_{k+1}} & \alpha_{i_{k+1}}^1 & \cdots & \alpha_{i_{k+1}}^k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{i_1} & \alpha_{i_1}^1 & \cdots & \alpha_{i_1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_{k+1}} & \alpha_{i_{k+1}}^1 & \cdots & \alpha_{i_{k+1}}^k \end{vmatrix}. \tag{1.5.30}$$

En la descomposició anterior, el primer terme dona una equació homogènia mentre que el segon és constant. Això ens diu que si eliminem els termes independents de les equacions de la varietat lineal, ens queden les equacions del subespai director F.

Definició 1.5.35 (Menors orlants). Els menors d'A d'ordre $r+1$ obtinguts afegint a M una fila i una columna d'A, és a dir, de la forma

$$\begin{vmatrix} a_{j_1}^{i_1} & a_{j_2}^{i_1} & \ldots & a_{j_r}^{i_1} & \mathbf{a}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i_1}} \\ a_{j_1}^{i_2} & a_{j_2}^{i_2} & \ldots & a_{j_r}^{i_2} & \mathbf{a}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j_1}^{i_r} & a_{j_2}^{i_r} & \ldots & a_{j_r}^{i_r} & \mathbf{a}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i_r}} \\ \mathbf{a}_{\mathbf{j_1}}^{\mathbf{i}} & \mathbf{a}_{\mathbf{j_2}}^{\mathbf{i}} & \ldots & \mathbf{a}_{\mathbf{j_r}}^{\mathbf{i}} & \mathbf{a}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}} \end{vmatrix}, \tag{1.5.31}$$

es diuen *menors orlants d'M*.

Exemple 1.5.36. Considerem $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4, \mathbb{L} = (1,0,1,-1) + \langle(3,-5,0,1)\rangle$ i la referència canònica $p = (0,0,0,0)$ i la base $e_1, \ldots, e_4$ usual. Les equacions paramètriques són:

$$\left.\begin{array}{r} x = 1 + 3\lambda, \\ y = -5\lambda, \\ z = 1, \\ t = -1 + \lambda. \end{array}\right. , \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.5.32}$$

Les implícites es determinen orlant una de les files: imposem que els tres determinants que podem construir amb la primera fila siguin igual a 0.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x-1 & 3 \\ y & -5 \\ z-1 & 0 \\ t+1 & 1 \end{pmatrix} = \dim \mathbb{L} = 1 \iff \begin{array}{c} 5x + 3y - 5 = 0 \\ z - 1 = 0 \\ x - 3t - 4 = 0 \end{array} \tag{1.5.33}$$

Fixem-nos que una recta a $\mathbb{R}^4$ ve donada per tres equacions. Hem escrit $\mathbb{L}$ com la intersecció de 3 hiperplans de $\mathbb{R}^4$.

1.6 Raó simple

1.6.1 Definició i nocions

Siguin a, b, c tres punts diferents en un espai afí sobre $\mathbb{K}$. Suposem que estan alineats. Recordem que això implica que $\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{bc}, \lambda \in \mathbb{K}$.

Definició 1.6.1 (Raó simple)**.** Aquest nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ es diu raó simple dels punts a, b, c i es denota per $\lambda = (a, b, c)$ i depèn de l'ordre dels elements.

Notació 1.6.2. Delimitem els convenis de notació següents:

$$\begin{aligned} (a, b, c) = 1 &\iff a = b \neq c, \\ (a, b, c) = 0 &\iff a = c \neq b, \\ (a, b, c) = \infty &\iff b = c \neq a. \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Proposició 1.6.3. *Si $(a, b, c) = \lambda$, aleshores:*

$$\begin{aligned} (a, c, b) &= 1 - \lambda, \\ (b, a, c) &= \frac{1}{\lambda}, \\ (b, c, a) &= \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \\ (c, a, b) &= \frac{1}{1 - \lambda}, \\ (c, b, a) &= \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

on les últimes tres es dedueixen de les dues primeres.

Demostració.

- Volem trobar el valor d'(a, c, b). Posem $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} = \lambda \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cb} = (1 - \lambda)\overrightarrow{cb} \implies (a, c, b) = 1 - \lambda$.
- Ara, volem veure (b, a, c). $\overrightarrow{bc} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{ac} \implies (b, a, c) = \frac{1}{\lambda}$.
- Per últim, (b, c, a). Ens queda $1 - (b, a, c) = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

■

Observació 1.6.4. Aquesta definició que hem donat de raó simple és compatible amb la raó doble que veurem més endavant, a *Geometria Projectiva*, però no és única. És freqüent trobar la definició $(a, b, c) = \lambda$ si $\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{ab}$ que és diferent de la que acabem de donar.

1.6.2 Càlcul amb coordenades

Escollim un sistema de referència $\{p; e_1, \dots, e_n\}$ i siguin $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n), c = (c_1, \dots, c_n)$ diferents i alineats. Fixem també $\overrightarrow{ac} = \lambda\overrightarrow{bc}$. Substituïm les coordenades i operem:

$$\begin{aligned} (c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n) = \lambda(c_1 - b_1, \dots, c_n - b_n) \implies c_i - a_i = \lambda(c_i - b_i)\forall i. \\ \lambda = \frac{c_i - a_i}{c_i - b_i}, \forall i \mid c_i \neq b_i. \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

Exemple 1.6.5. Posant $a = (0, 2, -1)$, $b = (0, 4, -5)$ i $c = (0, -1, 5)$ a $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, aplicant la fórmula anterior ens queda $(a, b, c) = \frac{3}{5}$. Deduïm que $\overrightarrow{ac} = (0, -3, 6)$ i $\overrightarrow{bc} = (0, -5, 10)$.

1.7 Teoremes històrics de la geometria

1.7.1 Teorema de Tales

Teorema 1.7.1 (Teorema de Tales). *Sigui ABC un triangle (recordem, tres punts afinment independents) en un pla afí i sigui r una recta que talla les rectes AB i AC en punts respectius $D \neq E$ (en altres paraules, $A \neq r$). Llavors,*

$$r \parallel BC \iff (A, D, B) = (A, E, C). \tag{1.7.1}$$

Demostració. Ho demostrarem, òbviament, utilitzant un sistema de referència: escollim $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ com a referència. Aleshores, fixem $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (0, 1), D = (d, 0), E = (0, e)$. Busquem el vector $\overrightarrow{DE}$ ja que és el que ens donarà la condició de paral·lelisme. Posem:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{DE} = (-d, e), \\ \overrightarrow{BC} = (-1, 1) \end{aligned}\right\} \implies r \parallel \overrightarrow{BC} \iff \langle\overrightarrow{DE}\rangle = \langle\overrightarrow{BC}\rangle \iff d = e. \tag{1.7.2}$$

Calculem les raons simples de les diferents combinacions que ens interessen:

$$\begin{aligned} (A, D, B) &= \frac{1}{1 - d}, \\ (A, E, C) &= \frac{1}{1 - e}. \\ (A, D, B) = (A, E, C) &\iff d = e. \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

i ja hem acabat. ■

Observació 1.7.2. El teorema val igual si r és exterior a ABC. Hi ha un petit cas que ens estem deixant: podria passar que la recta r passi per B. En tal cas, $D = B$ i $(A, B, D) = \infty$. Fixem-nos, però, que $(A, E, C) = \infty$; $r \parallel BC \iff C = E \iff (A, E, C) = \infty$.

Teorema 1.7.3 (Teorema de Tales, alternativa). *Siguin r, s rectes que es tallen en un punt O. Suposem que tres rectes paral·leles ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tallen r en P_1, P_2, P_3 i tallen s en Q_1, Q_2, Q_3 (tots diferents d'O). Llavors:*

$$(P_1, P_2, P_3) = (Q_1, Q_2, Q_3). \tag{1.7.4}$$

Demostració. Escollim $\{O; \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OQ_1}\}$ com a referència. Aleshores:

$$\begin{aligned} &O = (0,0) \\ &P_1 = (1,0) \quad Q_1 = (0,1) \quad \overrightarrow{P_1Q_1} = (-1,1) \\ &P_2 = (a,0) \quad Q_2 = (0,c) \quad \overrightarrow{P_2Q_2} = (-a,c) \\ &P_3 = (b,0) \quad Q_3 = (0,d) \quad \overrightarrow{P_3Q_3} = (-b,c) \\ &(P_1,P_2,P_3) = \frac{b-1}{b-a}, \quad (Q_1,Q_2,Q_3) = \frac{d-1}{d-c}. \\ &\left.\begin{matrix} a = c \\ b = d \end{matrix}\right\} \implies (P_1,P_2,P_3) = (Q_1,Q_2,Q_3). \end{aligned} \tag{1.7.5}$$

■

Observació 1.7.4. Els dos teoremes de Tales que hem donat són equivalents, ja que el segon correspondria al cas que ℓ_1 passés per O. En aquest últim, però, cal notar que el recíproc és fals: $(P_1,P_2,P_3) = (Q_1,Q_2,Q_3) \;\not\Longrightarrow\; \ell_1 \parallel \ell_2 \parallel \ell_3$. Fixem-nos:

$$(P_1,P_2,P_3) = \frac{1 - (O,P_1,P_2)}{(O,P_1,P_3) - (O,P_1,P_2)}. \tag{1.7.6}$$

Corol·lari 1.7.5. $\ell_1 \parallel \ell_2 \parallel \ell_3 \implies (P_1,P_2,P_3) = (Q_1,Q_2,Q_3)$.

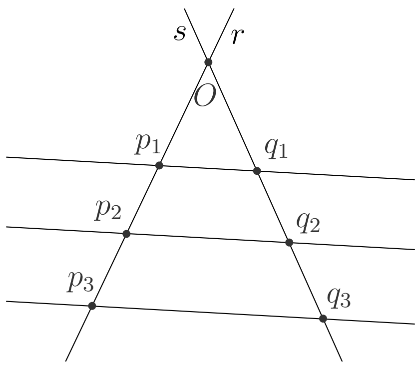


Figura 1.2: Representació gràfica del teorema de Tales

1.7.2 Menelau i Ceva

Teorema 1.7.6 (Teorema de Menelau)**.** *Sigui ABC un triangle. Suposem que $D \in BC, E \in AC$ i $F \in AB$. Llavors, D,E,F estan alineats si, i només si $(B,C,D)(C,A,E)(A,B,F) = 1$. Alternativament,*

$$D,E,F \text{ alineats} \iff BF \cdot AE \cdot CD = AF \cdot CE \cdot BD. \tag{1.7.7}$$

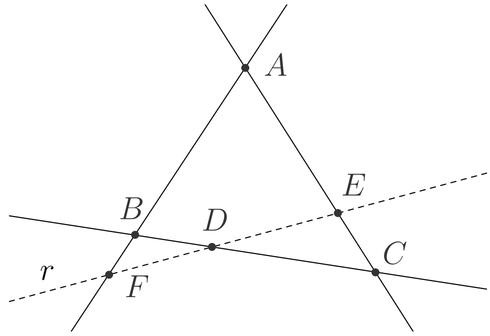


Figura 1.3: Representació gràfica del teorema de Menelau

Demostració. Escollim $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ com a referència, donat que $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ no estan alineats. Aleshores, suposant implícitament que $d, e, f \neq 0, 1$ (portaria a casos trivials del teorema):

$$\begin{aligned} A &= (0,0), & D &= (d, 1-d), \\ B &= (1,0), & E &= (0,e), \\ C &= (0,1), & F &= (f,0), \\ r &= EF & r &: ex + fy = fe, \\ s &= BC & s &: x + y = 1. \end{aligned} \tag{1.7.8}$$

tenint en compte que $D = (d, 1-d)$ ja que $BC : x + y = 1$. D, E, F estan alineats si, i només si,

$$0 = \begin{vmatrix} d & f \\ 1-d-e & -e \end{vmatrix} = -de - f + df + ef \iff de + f = df + ef. \tag{1.7.9}$$

Hem de demostrar que $D' = D \iff (B, C, D)(C, A, E)(A, B, F) = 1$. Calculem les raons simples:

$$\begin{aligned} (B, C, D) &= \frac{d-1}{d-0} = \frac{d-1}{d}, \\ (C, A, E) &= \frac{e-1}{e}, \\ (A, B, F) &= \frac{f}{f-1}. \end{aligned} \tag{1.7.10}$$

Aïllant d ens queda el següent:

$$\frac{d-1}{d}\frac{e-1}{e}\frac{f}{f-1} = 1 \iff def - df - ef + f = def - de \iff d = \frac{f(1-e)}{f-e} \iff D = D'. \tag{1.7.11}$$

També podem dir que, si ens hi fixem, es compleix $de + f = df + ef$: la mateixa condició per tal que D, E, F estiguin alineats. ■

Observació 1.7.7. En notació clàssica i en la nostra es veu clarament l'equivalència:

$$(B, C, D)(C, A, E)(A, B, F) = \frac{BD}{CD}\frac{CE}{AE}\frac{AF}{BF}. \tag{1.7.12}$$

Teorema 1.7.8 (Ceva). *Donat un triangle de vèrtex A_1, A_2, A_3 del pla afí anomenem a_i al costat oposat d'A_i. Sigui O un punt que no pertany a cap dels costats i tal que, per a tot i, la recta que passa per O i A_i talla a_i en un punt B_i. Aleshores,*

$$(A_3, A_2, B_1)(A_1, A_3, B_2)(A_2, B_1, B_3) = -1. \tag{1.7.13}$$

Equivalentment, sigui $A_1A_2A_3$ un triangle. Siguin r, s, t rectes que passen per A_1, A_2, A_3 respectivament i tallen els costats en punts $B_1 \in A_2A_3, B_2 \in A_1A_3$ i $B_3 \in A_1A_2$. Llavors, r, s, t són concurrents si i només si $(A_3, A_2, B_1)(A_1, A_3, B_2)(A_2, B_1, B_3) = -1$.

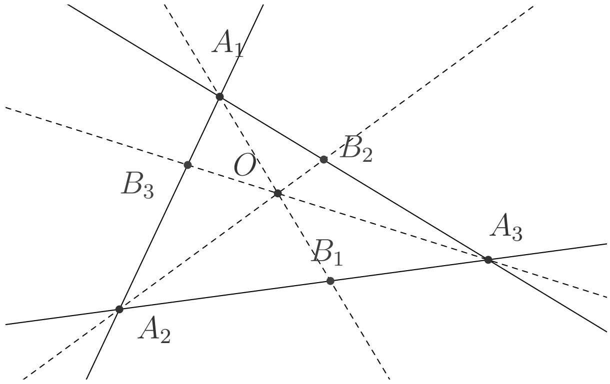


Figura 1.4: Representació gràfica del teorema de Ceva

Demostració. Escollim $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$ i definim $A = (0,0), B = (1,0), C = (0,1)$. Suposem que r, s, t són concurrents en un punt P que denotarem per $P = (a, b)$. Aleshores, $r : bx - ay = 0$, $s : bx + (1-a)y = b$ i $t : (1-b)x + ay = a$. En teoria,

$$\begin{aligned} D = r \cap BC &= \left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b}\right), \\ E = s \cap AC &= \left(0, \frac{b}{1-a}\right), \\ F = t \cap AB &= \left(\frac{a}{1-b}, 0\right), \end{aligned} \tag{1.7.14}$$

I ara pel que fa a les raons simples:

$$\begin{aligned} (B, C, D) = \frac{\frac{a}{a+b} - 1}{\frac{a}{a+b}} = -\frac{b}{a}, \\ (C, A, E) = \frac{a+b-1}{b}, (A, B, F) = \frac{a}{a+b-1}. \end{aligned} \tag{1.7.15}$$

Comprovem:

$$\frac{-b}{a}\frac{a+b-1}{b}\frac{a}{a+b-1} = -1. \tag{1.7.16}$$

Ens fa falta demostrar el recíproc, solament hem demostrat la primera implicació (cap a la dreta). Per demostrar-lo, suposem $(B, C, D)(C, A, E)(A, B, F) = -1$ i que s i t es tallen en un punt. Sigui $P = s \cap t$ tal punt. Sigui r' la recta que passa per A i P. Siguin $D' = r' \cap BC$. Com que r', s, t són concurrents, per l'apartat anterior, $(B, C, D')(C, A, E)(A, B, F) = -1 \implies (B, C, D) = (B, C, D') \implies D = D' \implies r = r' \implies r, s, t$ concurrents.

Si r, s es tallen o bé r, t es tallen, fem el mateix raonament canviant r per t o per s, respectivament. Si cap parell de les rectes r, s, t es tallen és que són paral·leles. ■

Observació 1.7.9. Hi ha un cas particular on $B_2 = M_{A_1A_3}, B_3 = M_{A_1A_3}, B_1 = M_{A_2A_3}$. En aquest, les tres mitjanes són concurrents en el baricentre, de tal manera que $(A_3, A_2, B_1) = -1, (A_1, A_3, B_2) = -1$ i $(A_2, B_1, B_3) = -1$.

Definició 1.7.10 (Rectes cevianes). Les rectes que passen per un vèrtex en un triangle es diuen cevianes.

Observació 1.7.11. Les mitjanes del triangle són cevianes i, en el cas de 1.7.8, $(A_2, A_3, B_1) = 1, (A_3, A_1, B_2) = -1, (A_1, A_2, B_3) = -1$ i, per tant, es compleix la relació

$$(A_2, A_3, B_1)(A_3, A_1, B_2)(A_1, A_2, B_3) = -1, \tag{1.7.17}$$

com correspon al fet que les tres mitjanes de qualsevol triangle són concurrents en el baricentre.

Observació 1.7.12. És interessant notar que aquests dos teoremes venen donats l'un de l'altre, si intercanviem punts per rectes i rectes per punts. Mirant els dibuixos:

1. Els punts D, E, F pertanyen als costats del triangle. Donem una condició necessària i suficient per tal que D, E, F pertanyin a una mateixa recta.
2. Les rectes r, s, t passen pels vèrtexs del triangle. Donem una condició necessària i suficient per tal que r, s, t passin per un mateix punt.

Observació 1.7.13. El teorema de Menelau ens diu que una recta real no pot tallar simultàniament els tres *costats* d'un triangle.

1.8 Orientació d'un espai afí

En aquesta secció suposarem un espai afí $(\mathbb{A}, E, \varphi)$, amb E un espai vectorial de dimensió n sobre $\mathbb{R}$.

Definició 1.8.1 (Orientació). Una orientació en E és una relació definida en $\mathfrak{B}$ $\{e_i\} \sim \{v_i\}$ si es compleix que

$$\det_{e_i}(v_1, \dots, v_n) > 0. \tag{1.8.1}$$

Proposició 1.8.2. *Una orientació en E és una classe d'equivalència en $\mathfrak{B}$.*

Demostració. Les propietats dels determinants ens impliquen que aquesta relació és d'equivalència:

1. $\det_{e_i}(e_i) = 1$ i, per tant, és reflexiva.
2. $\det_{e_i}(v_i) = \frac{1}{\det_{v_i}(e_i)}$, de tal manera que $\{e_i\} \sim \{v_i\}$ implica que $\{v_i\} \sim \{e_i\}$.
3. $\det_{e_i}(w_i) = \det_{e_i}(v_i) \det_{v_i}(w_i)$ ens dona que $\{e_i\} \sim \{v_i\}$ i $\{v_i\} \sim \{w_i\}$ impliquen $\{e_i\} \sim \{w_i\}$.

Fixada una base e_i, considerem l'aplicació

$$D : \mathfrak{B} : \mathbb{R} - \{0\},\ D(v_i) = \det_{e_i}(v_1, \dots, v_n). \tag{1.8.2}$$

Notem que $\mathfrak{B}_- = D^{-1}(-\infty, 0)$ i $\mathfrak{B}_+ = D^{-1}(0, \infty)$ són les dues classes d'equivalència de la relació: en efecte, totes les bases de $\mathfrak{B}_+$ estan relacionades amb e_i i, per tant, entre sí. D'altra banda, si $v_i, v_i' \in \mathfrak{B}_-$ aleshores:

$$\det_{v_i}(v_1', \dots, v_n') = \det_{v_i}(e_1, \dots, e_n) \cdot \det_{e_i}(v_1', \dots, v_n') > 0. \tag{1.8.3}$$

■

Definició 1.8.3 (Espai vectorial euclidià orientat). Un espai vectorial euclidià orientat és un parell $(E, [e_1, \ldots, e_n])$ on E és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i $e_1, \ldots, e_n$ és una base de E. $[e_1, \ldots, e_n]$ denota la classe d'equivalència d'E.

1. Direm que una base és directa o representa la orientació positiva si la seva classe és la orientació fixada.
2. En cas contrari, direm que és una base indirecta o representa la orientació negativa.

Definició 1.8.4. Direm que dues bases $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i $\{u_1, \ldots, u_n\}$ són de la mateixa orientació si $\det_{(e_i)}(u_1, \ldots, u_n) > 0$. En cas contrari, direm que són d'*orientacions oposades*.

Tenir la mateixa orientació és una relació d'equivalència en el conjunt de bases d'E, i dona lloc a dues classes d'equivalència que denominarem orientacions d'E. Orientar l'espai vectorial E és escollir una d'aquestes dues orientacions: l'orientació escollida es diu *positiva* i l'altra, *negativa*.

Un automorfisme $f : E \longrightarrow E$ conserva l'orientació si les bases $e_1, \ldots, e_n$ i $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ són de la mateixa orientació; és a dir, si

$$\det_{(e_i)}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det f > 0. \tag{1.8.4}$$

La definició anterior és, doncs, independent de la base $e_1, \ldots, e_n$. Si es dona que $\det f < 0$ direm que f inverteix la orientació.

Orientar l'espai afí $(\mathbb{A}, E, \varphi)$ és escollir una orientació de l'espai vectorial orientat E. Orientar una varietat lineal $a + F$ és escollir una orientació d'F.

Proposició 1.8.5. *Un endomorfisme f és ortogonal si, i només si, per a tota base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ tenim que $v_i := f(e_i)$ és també una base ortonormal. A més, la base v_i té la mateixa orientació que la base e_i si, i només si, $f \in SO(n)$.*

Demostració. Suposem que f és ortogonal i que la base e_i és ortonormal. Aleshores,

$$v_i \cdot v_j = f(e_i) \cdot f(e_j) = e_i \cdot e_j. \tag{1.8.5}$$

En direcció contrària, sigui e_i una base ortonormal. La matriu de canvi de base P de la base v_i en funció de e_i és, per construcció, la matriu de f. Com la matriu de Gram $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = \mathbb{I}$ i P és una matriu ortogonal, trobem que f és ortogonal. La afirmació sobre la preservació de la orientació és conseqüència de la relació:

$$\det f = \det_{e_i}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \det_{e_i}(v_1, \ldots, v_n). \tag{1.8.6}$$

■

1.9 Semiespais

En un espai afí real $(\mathbb{A}, E)$ de dimensió N cada hiperplà divideix la resta de punts d'A en dues zones de la següent manera: considerem a $A - H$ la relació

$$p \sim q \iff \text{el segment } \overrightarrow{pq} \text{ no talla } H. \tag{1.9.1}$$

Les propietats simètrica ($p \sim p$, $\forall p \in A - H$) i simètrica ($p \sim q \implies q \sim p$) d'aquesta relació són òbvies. Abans de demostrar la propietat transitiva ens cal caracteritzar la relació $p \sim q$ d'una altra forma. Sigui $a_1 y_1 + \cdots + a_n x_n + b = 0$ l'equació de l'hiperplà en un cert sistema de referència cartesià. Per a tot punt $y \in A - H$ de coordenades $(y^1, \ldots, y^n)$ designarem per a_y el nombre real

$$a_y = a_1 y_1 + \cdots + a_n x_n + b \neq 0. \tag{1.9.2}$$

Si el segment

$$\overline{pq} = \{x \in \mathbb{A}, x^i = (1-t)p^i + tq^i,\ i = 1, \ldots, n; 0 \leq t \leq 1\} \tag{1.9.3}$$

talla H, existeix un valor de t, $0 < t < 1$ tal que

$$a_1((1-t)p_1 + tq_1) + \cdots + a_n((1-t)p^n + tq^n) + b = 0. \tag{1.9.4}$$

Podem escriure aquesta expressió de la següent manera:

$$(1-t)a_p + ta_q = 0, \tag{1.9.5}$$

d'on $0 < t = \frac{a_p}{a_p - a_q} < 1$ i això és cert si, i només si, $a_p a_q < 0$. En altres paraules,

$$p \sim q \iff a_p \cdot a_q > 0. \tag{1.9.6}$$

D'aquí resulta immediatament que aquesta relació és d'equivalència i que divideix $A - H$ en dos subconjunts que anomenarem *semiespais d'A*. La noció de semiespai està relacionada amb el concepte d'orientació que hem definit a la secció anterior: en efecte, sigui $v_1, \ldots, v_{n-1}$ una base en la direcció d'H i sigui $c \in H$. Posem

$$a_x = \begin{vmatrix} x_1 - c_1 & v_{11} & \cdots & v^1_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - c_n & v_{n1} & \cdots & v^n_{n-1} \end{vmatrix} = \det(\overrightarrow{cx}, v_1, \ldots, v_{n-1}). \tag{1.9.7}$$

Així, $a_x = 0$ és una equació d'H i, si $p \in A - H$,

$$a_p = \det(\overrightarrow{cp}, v_1, \ldots, v_{n-1}) \neq 0. \tag{1.9.8}$$

Dos punts p, q són, per tant, del mateix semiespai si, i només si, les bases

$$\{\overrightarrow{cp}, v_1, \ldots, v_{n-1}\}, \{\overrightarrow{cq}, v_1, \ldots, v_{n-1}\}. \tag{1.9.9}$$

són de la mateixa orientació.

II

Aplicacions afins i afinitats

2.1 Definició d'aplicació afí i exemples

Definició 2.1.1 (Aplicació afí)**.** Donats dos espais afins $(\mathbb{A}, E_1), (\mathbb{A}_2, E_2)$ una aplicació afí és un parell d'aplicacions:

$$f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2, \quad \tilde{f} : E_1 \longrightarrow E_2 \tag{2.1.1}$$

tals que:

1. $\tilde{f}$ és lineal,
2. $\forall p \in \mathbb{A}_1, \forall \overrightarrow{u} \in E_1$, tenim $f(q) = f(p + \overrightarrow{u}) = f(p) + \tilde{f}(\overrightarrow{u})$.

Equivalentment, si en la segona propietat posem $q = p + u$, tenim que $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \tilde{f}(\overrightarrow{pq})$.

Observació 2.1.2.

1. Sovint es diu només que $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ és una aplicació afí i que $\tilde{f}$ és l'aplicació lineal associada. En altres paraules, $\tilde{f}$ està determinada per f: si f és una aplicació afí, llavors $\tilde{f}$ és única.
2. Si $\tilde{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}, \forall p, q$ aleshores $\forall p \in \mathbb{A}_1, \forall v \in E_1$ tenim que

$$\tilde{f}(v) = \tilde{f}(\overrightarrow{p(p+v)}) = \overrightarrow{f(p)f(p+v)} \implies f(p+v) = f(p) + \tilde{f}(v). \tag{2.1.2}$$

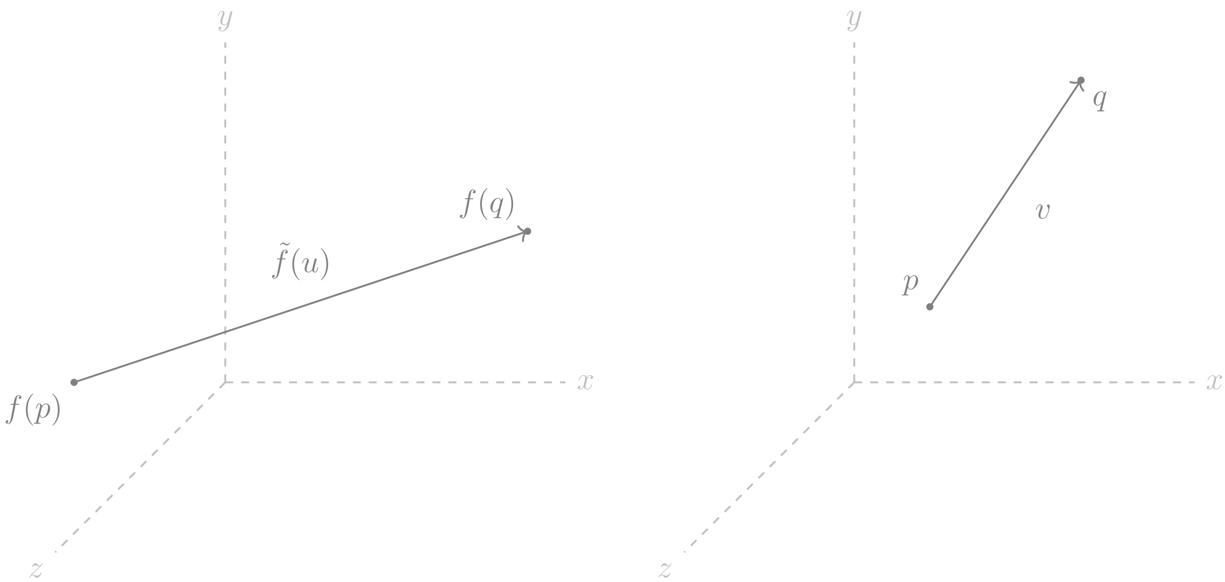


Figura 2.1: L'acció d'f com aplicació afí i l'equivalència de definicions.

Definició 2.1.3 (Afinitat)**.** Diem que una aplicació afí és una afinitat si és bijectiva. En altres paraules, una afinitat és una aplicació afí bijectiva d'un espai afí en ell mateix.

Exemple 2.1.4. Suposem que $(\mathbb{A}_1, E_1) = (\mathbb{A}_2, E_2) = (\mathbb{A}, E)$. En aquest cas, direm que p és un punt fix per una aplicació afí si $f(p) = p$.

1. Si $f(p) = p$ per a tot p, aleshores $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{pq}$. Així, la identitat és una afinitat amb $\tilde{f} = \mathbb{I}$ en E.
2. Fixem un vector no nul $u \in E$ i definim $f(p) = p + u$ la translació de vector u. Comprovem que és una afinitat: donats dos punts $p, q \in \mathbb{A}$, observem que $\overrightarrow{pf(p)} = \overrightarrow{qf(q)} = u$, aleshores
$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{f(p)p} + \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qf(q)} = \overrightarrow{pq}. \tag{2.1.3}$$
Per tant, f és una afinitat amb $\tilde{f} = \mathbb{I}$ en E. Notem que en aquests dos primers exemples l'endomorfisme és la identitat. Destaquem aquest cas en 2.1.6.

2.1.1 Exemples d'afinitats

Proposició 2.1.5. *Sigui $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una aplicació afí d'endomorfisme associat $\tilde{f} : E \longrightarrow E$. Aleshores:*

1. *f és la identitat o una translació si, i només si, $\tilde{f} = \mathbb{I}$ (que és una aplicació afí).*
2. *f és una homotècia si, i només si, $\tilde{f}$ és una homotècia de raó $\neq 0, 1$.*
3. *f és una simetria si, i només si, $f^2 = \mathbb{I}$ i $f \neq \mathbb{I}$.*
4. *f és una projecció si, i només si, $f^2 = f$ i $f \neq \mathbb{I}$.*

2.1.1.1 Translacions

Corol·lari 2.1.6. *Tota translació és una aplicació afí i una afinitat.*

Demostració. Recordant 1.2.1, tenim que $\forall p \in \mathbb{A}, \forall v \in E$ ens queda que
$$\tau_u(p + v) = p + v + u = p + u + v = \tau_u(p) + v. \tag{2.1.4}$$
Això diu que τ_u és afí amb la aplicació lineal associada $\tilde{\tau}_u(v)\forall v$; és a dir, $\tilde{\tau}_u(v) = \mathbb{I}$. ∎

2.1.1.2 Homotècies

Definició 2.1.7 (Homotècia). Sigui $(\mathbb{A}, E)$ un espai afí. Siguin $c \in \mathbb{A}$ i $r \in \mathbb{K}$ amb $r \neq 0$. L'homotècia de centre c i raó r es defineix com:
$$\begin{aligned} h_{c,r} : \ & \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A} \\ & x \longmapsto h_{c,r}(x) := c + r\overrightarrow{cx}. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

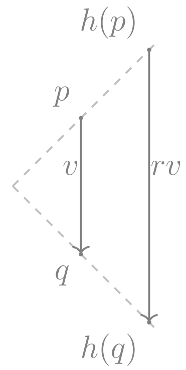


Figura 2.2: Homotècia

Proposició 2.1.8. *Una homotècia és una afinitat i bijectiva.*

Demostració. Vegem com és bijectiva $h_{c,r}$. Tenim:

$$h_{c,\frac{1}{r}}(h_{c,r}(p)) = h_{c,\frac{1}{r}}(c + r\overrightarrow{cp}) = c + \frac{1}{r}r\overrightarrow{cp} = p, \forall p. \tag{2.1.6}$$

Ens queda que la composició entre $h_{c,\frac{1}{r}}$ i $h_{c,r}$ és la identitat i, com que r és arbitrari, ja ha quedat demostrat. Ara comprovem que és una afinitat: en efecte, donats dos punts $p, q \in \mathbb{A}$ tenim

$$\overrightarrow{h(p)h(q)} = \overrightarrow{h(p)O} + \overrightarrow{Oh(q)} = r\overrightarrow{pO} + r\overrightarrow{Oq} = r\overrightarrow{pq}. \tag{2.1.7}$$

Per tant, h és una afinitat amb endomorfisme associat $\tilde{h} = rId$. ■

Observació 2.1.9. Suposem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

1. Si $r > 1$, llavors $h_{c,r}$ fa créixer les figures.
2. Si $0 < r < 1$, llavors $h_{c,r}$ contrau les figures.
3. Si $r < 0$, llavors $h_{c,r}$ inverteix les figures.
4. Si $r = 1$, ens queda que $h_{c,1} = \mathbb{I}$: $h_{c,1}(x) = c + \overrightarrow{cx}, \forall x$.
5. Si $r = -1$, llavors $h_{c,-1}$ es diu que és una simetria central.

Si escollim un sistema de referència i denotem per C les coordenades del centre c en notació vectorial, tenim que

$$\begin{gathered} X^* = C + r(X - C) = rX + (1-r)C, \\ \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-r)c_1 \\ \vdots \\ (1-r)c_n \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{2.1.8}$$

Fixem-nos en l'analogia amb 2.3.3. En particular, si escollim el centre c com a origen del sistema de referència tindrem que $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$ i aleshores les equacions de la homotècia $h_{c,r}$ seran $x_1^* = rx_1, \ldots, x_n^* = rx_n$.

Exemple 2.1.10. Les equacions en la referència canònica d'$\mathbb{R}^3$ de l'homotècia de centre $(1, 1, 2)$ i raó 3 són

$$\begin{aligned} x^* &= 3x - 2 \\ y^* &= 3y - 2 \\ z^* &= 3z - 4 \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

ja que $(1-r)C = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2.1.1.3 Simetria

Sigui $\mathbb{L} = a + F \subset \mathbb{A}$ una varietat lineal. Suposem que G és un subespai suplementari de F en E, $\dim F < n$, tal que $E = F \oplus G$. Un vector $u \in E$ descompondrà de manera única en una suma $u_F + u_G$ on cada sumand pertany al subespai que indica el subíndex.

Definició 2.1.11 (Simetria). Definim la simetria d'eix $\mathbb{L}$ i direcció G com l'aplicació

$$\begin{aligned} s: \ \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ p &\longmapsto s(p) := a + \overrightarrow{ap}_F - \overrightarrow{ap}_G. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

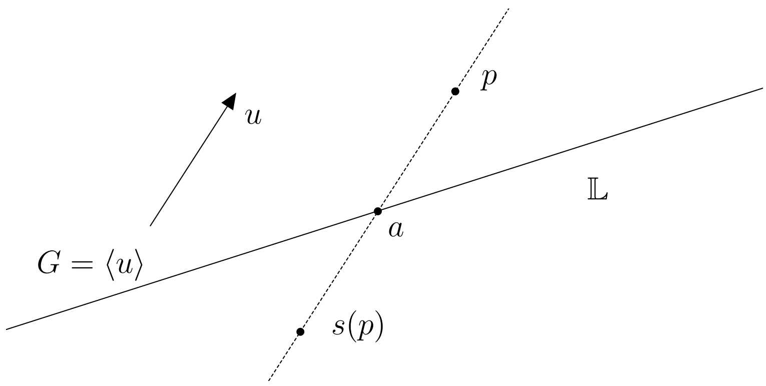


Figura 2.3: Simetria

Observació 2.1.12 (Simetria central). Si $\mathbb{L}$ és un punt l'anomenem simetria central, ja que per $\mathbb{L} = c \implies F = 0 \implies G = E$ i, pe definició, $v_F = 0$ i $v_G = v$ ens queda que $s(x) = c - \overrightarrow{cx}$ i $\tilde{s} = -\mathbb{I}$. Fixem-nos que aquesta és l'expressió d'una homotècia de centre c i raó -1, i són iguals si, i només si, es construeixen sobre el mateix c.

Observació 2.1.13. Atès que per a qualsevol parella de punts p, q es té que

$$\overrightarrow{s(p)s(q)} = \overrightarrow{s(p)a} + \overrightarrow{as(q)} = \overrightarrow{pa}_F - \overrightarrow{pa}_G + \overrightarrow{aq}_F - \overrightarrow{aq}_G = \overrightarrow{pq}_F - \overrightarrow{pq}_G, \tag{2.1.11}$$

obtenim que s és una afinitat amb endomorfisme associat $\tilde{s}$ determinat per ser la identitat sobre F i $-\mathbb{I}$ sobre G. Dit d'una altra manera, $\tilde{s}$ diagonalitza amb VAPS 1 i -1, F és el subespai de VEPs de VAP 1 i G és el subespai de VEPS de VAP -1. Notem que tots els punts de l'eix $\mathbb{L}$ són fixos i que, per la mateixa definició, s^2 és la identitat en $\mathbb{A}$.

El fet que tota simetria $s : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ sigui bijectiva és conseqüència de la proposició següent:

Proposició 2.1.14. $s(s(x)) = x, \forall x \in \mathbb{A}$.

Demostració. Ho provarem a partir de la següent cadena d'igualtats:

$$s(s(x)) = s(a + (\overrightarrow{ax})_F - (\overrightarrow{ax})_G), \tag{2.1.12}$$

on en la quarta igualtat hem utilitzat que $(v_F)_F = v_F, (v_F)_G = 0, (v_G)_F = 0, (v_G)_G = v_G$. Aleshores, s és exhaustiva perquè tot x és imatge de $s(x)$, i s és injectiva perquè $s(x) = s(y) \implies s(s(x)) = s(s(y)) \implies x = y$. ■

Ara, com a successió d'aquesta proposició, proposarem una definició alternativa de simetria i traurem una sèrie de conclusions a partir d'ella.

Definició 2.1.15 (Simetria). Una afinitat $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ es diu una simetria si $f^2 = \mathbb{I}$.

Suposant que el cos $\mathbb{K}$ no és de característica 2, els punts mitjos dels parells formats per un punt a i la seva imatge $f(a)$ són fixos:

$$m = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}f(a) \iff \overrightarrow{am} = \frac{1}{2}\overrightarrow{af(a)} \iff \overrightarrow{f(a)f(m)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{f(a)a} \iff f(m) = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}a = m. \tag{2.1.13}$$

Estudiem ara $\tilde{f}$. Com que $f^2 = \mathbb{I}$, també $\tilde{f}^2 = \mathbb{I}$ i el polinomi mínim de $\tilde{f}$ és un divisor de $x^2 - 1$. Hi ha tres possibilitats:

1. Si el polinomi mínim de $\tilde{f}$ és $(x-1)$, $\tilde{f} = \mathbb{I}$ i f és una translació amb punts fixos; per tant, $f = \mathbb{I}$.
2. Si el polinomi mínim de $\tilde{f}$ és $(x+1)$, $\tilde{f} = -\mathbb{I}$. Si p és un punt fix, aleshores $\forall a, \overrightarrow{pf(a)} = \tilde{f}(\overrightarrow{pa}) = -\overrightarrow{pa}$, i això equival a $p = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}f(a)$. Existeix, doncs, un únic punt fix p que és punt mig del parell $a, f(a) \forall a$. f es diu llavors una simetria central de centre p.
3. Si el polinomi mínim de $\tilde{f}$ és $(x-1)(x+1)$, $E = F \oplus G$, on F és un subespai invariant sobre el qual $\tilde{f}$ és $\mathbb{I}$ i G és un subespai invariant sobre el qual $\tilde{f}$ és $-\mathbb{I}$. Sigui p un punt fix. $\forall a \in \mathbb{A}$, si $\overrightarrow{pa} = u + v$ amb $u \in F$ i $v \in G$,

$$f(a) = f(p + \overrightarrow{pa}) = p + \tilde{f}(u+v) = p + u - v. \tag{2.1.14}$$

D'aquí resulta que els punts fixos de f són de la varietat $p + F$. Per altra banda,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(a)a} = 2v &\implies f(a) \in a + G, \\ u = \frac{1}{2}\overrightarrow{pa} + \frac{1}{2}\overrightarrow{pf(a)} &\implies \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}f(a) = p + u \in p + F, \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

i aquestes condicions determinen $f(a)$.

2.1.1.4 Projecció

Definició 2.1.16 (Projecció)**.** Una afinitat es diu una *projecció* si $f^2 = f$. Observem, primer de tot, que tot punt de $\operatorname{im} f$ és fix: $f(f(a)) = f(a), \forall a$. A més, si b és fix, $b = f(b) \in \operatorname{im} f$. Així doncs, $\operatorname{im} f$ és el conjunt de punts fixos d'f. Estudiem ara $\tilde{f}$. Es dona que, $\forall \overrightarrow{ab} \in E$:

$$\tilde{f}^2(\overrightarrow{ab}) = \tilde{f}(\overrightarrow{f(a)f(b)}) = \overrightarrow{f^2(a)f^2(b)} = \overrightarrow{f(a)f(b)} = \tilde{f}(\overrightarrow{ab}). \tag{2.1.16}$$

Utilitzant les mateixes notacions que a 2.1.1.3, donem una definició equivalent:

Definició 2.1.17 (Projecció)**.** La projecció sobre $\mathbb{L}$ en la direcció G és l'aplicació

$$\begin{aligned} \Pi : \ \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ p &\longmapsto \Pi(p) := a + \overrightarrow{ap}_F, \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

o sigui, els vectors de G són ara vectors del nucli (i, per tant, VEPs de VAP 0). Raonant de manera anàloga, trobem que és una aplicació afí (que no una afinitat, ja que no és bijectiva) i que la aplicació lineal associada és la identitat sobre F i és 0 sobre G. Es compleix que $\Pi(\mathbb{A}) = \mathbb{L}$ i $\Pi^2 = \Pi$.

Així doncs, $\tilde{f}^2 = \tilde{f}$ i el polinomi mínim de $\tilde{f}$ és un divisor de $x^2 - x$. Es poden donar tres casos:

1. Si el polinomi mínim de $\tilde{f}$ és x, $\tilde{f} = 0$ i $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \tilde{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{0}, \forall a, b \in \mathbb{A}$. Així doncs, $f(a) = f(b), \forall a, b \in \mathbb{A}$ i, per tant, f aplica tot $\mathbb{A}$ en el mateix punt.
2. Si el polinomi mínim de $\tilde{f}$ és $x - 1$, $\tilde{f} = \mathbb{I}$ i f és una translació. Ara bé, f té punts fixos; per tant, és una translació de vector $\overrightarrow{0}$; és a dir, f és la identitat d'$\mathbb{A}$.
3. Si el polinomi mínim de $\tilde{f}$ és $x(x-1)$, $E = F \oplus G$, on F és un subespai invariant sobre el qual $\tilde{f} = 0$ i G és un subespai invariant sobre el qual $\tilde{f} = \mathbb{I}$. Aleshores, si p és un punt fix,

$$f(a) = f(p + \overrightarrow{pa}) = p + \tilde{f}(\overrightarrow{pa}), \ \forall a \in \mathbb{A}. \tag{2.1.18}$$

Si $\overrightarrow{pa} = v + u, v \in F, u \in G, f(a) = p + u$. El conjunt de punts fixos de f és, en aquest cas, $p + G$. Per altra banda, $\overrightarrow{f(a)a} = \overrightarrow{f(a)p} + \overrightarrow{pa} = -u + (v + u) = v$, d'on $f(a) \in a + F$. El punt $f(a)$ és, per tant, la intersecció d'$a + F$ i $\operatorname{im} f = p + G$. Observem que $E = F \oplus G$ implica que aquesta intersecció es redueix sempre a un sol punt.

Proposició 2.1.18. *Les simetries són bijectives. Les projeccions, no. Anem a comprovar que les projeccions i les simetries són aplicacions afins. Per tant, les simetries són afinitats.*

Demostració. Siguin $p, q \in \mathbb{A}$ i sigui Π la projecció sobre $\mathbb{L} = a + F$ en una direcció $G, F \oplus G = E$:

$$\begin{gathered}\overrightarrow{\pi(p)\pi(q)} = -(\overrightarrow{ap})_F + (\overrightarrow{aq})_F = (\overrightarrow{pa}_F) + (\overrightarrow{aq})_F = (\overrightarrow{pq})_F \implies \Pi \text{ és afí amb } \tilde{\Pi}(v) = v_F, \\ \left.\begin{aligned} u &= u_F + u_G \\ v &= v_F + v_G \end{aligned}\right\} \implies u + v = (u_F + v_F) + (u_G + v_G) \implies u_F + v_F = (u + v)_F \end{gathered} \tag{2.1.19}$$

En el cas de simetries:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{s(p)s(q)} &= -(\overrightarrow{ap})_F + (\overrightarrow{ap})_G + (\overrightarrow{aq})_F - (\overrightarrow{aq})_G = \\ &= (\overrightarrow{pa})_F + (\overrightarrow{aq})_F - (\overrightarrow{pa})_G - (\overrightarrow{aq})_G = \\ &= (\overrightarrow{pq})_F = (\overrightarrow{pq})_G \implies \text{afí amb } \tilde{s}(v) = v_F - v_G \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

■

2.2

Propietats de les aplicacions afins

Propietat 2.2.1 (Propietats de les aplicacions afins). *Siguin $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2, g : \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ dues aplicacions afins. Aleshores:*

1. *La composició $g \circ f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ és afí i $(\widetilde{g \circ f}) = (\tilde{g} \circ \tilde{f})$.*
2. *f és injectiva si, i només si, $\tilde{f}$ ho és.*
3. *f és exhaustiva si, i només si, $\tilde{f}$ ho és.*
4. *f és bijectiva si, i només si, $\tilde{f}$ ho és.*
5. *Una aplicació afí f envia una varietat lineal $\mathbb{L} = a + F$ a la varietat lineal $f(\mathbb{L}) = f(a) + \tilde{f}(F)$.*
6. *Sigui $\mathbb{M}$ una varietat lineal tal que $f^{-1}(\mathbb{M}) \neq \emptyset$ i sigui $a \in f^{-1}(\mathbb{M})$. Aleshores, si $\mathbb{M} = f(a) + G$, tindrem que $f^{-1}(\mathbb{M}) = a + f^{-1}(G)$.*
7. *Si f és una afinitat bijectiva amb aplicació lineal associada $\tilde{f}$, llavors f^{-1} és una afinitat amb aplicació lineal associada $\tilde{f}^{-1}$.*
8. *Siguin $a, b, c \in \mathbb{A}_1$ tres punts alineats amb $b \neq c$, aleshores $f(a), f(b), f(c) \in \mathbb{A}_2$ també estan alineats o són el mateix punt. Si $f(b) \neq f(c)$, aleshores $(a, b, c) = (f(a), f(b), f(c))$, és a dir, la raó simple es manté per aplicacions afins.*

Demostració. Demostrarem que f injectiva $\iff \tilde{f}$ és injectiva.

$\implies$ Suposem f injectiva. Siguin $u, v \in E_1$ amb $\tilde{f}(u) = \tilde{f}(v)$. Aleshores, $f(p + u) = f(p) + \tilde{f}(u) = f(p) + \tilde{f}(v) = f(p + v)$. f injectiva $\implies p + u = p + v \implies u = v$. Amb això ja veiem que $\tilde{f}$ és injectiva.

$\impliedby$ Suposem que $\tilde{f}$ és injectiva. Siguin $p, q \in \mathbb{A}_1$ tals que $f(p) = f(q)$. Aleshores, $\tilde{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} = 0 \implies \overrightarrow{pq} = 0 \implies p = q$ i, per tant, f és injectiva.

Demostrem que f és exhaustiva $\iff$ $\tilde{f}$ és exhaustiva.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Suposem f exhaustiva. Escollim un punt $p \in A_1$. Donat $v \in E_2$ qualsevol, existeix algun $q \in \mathbb{A}_1$ amb $f(q) = f(p) + v$ ja que f és exhaustiva. Aleshores:

$$f(p) + v = f(q) = f(p + \overrightarrow{pq}) = f(p) + \tilde{f}(\overrightarrow{pq}). \tag{2.2.1}$$

Això implica que $v = \tilde{f}(\overrightarrow{pq})$ i demostra que $\tilde{f}$ és exhaustiva.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Finalment, suposem $\tilde{f}$ exhaustiva. Escollim també un punt $p \in \mathbb{A}_1$. Donat que $q \in \mathbb{A}_2$, existeix algun $u \in E_1$ tal que $\tilde{f}(u) = \overrightarrow{f(p)q}$ perquè $\tilde{f}$ és exhaustiva. Aleshores:

$$f(p + u) = f(p) + \tilde{f}(u) = f(p) + \overrightarrow{f(p)q} = q. \tag{2.2.2}$$

Demostrem el primer punt amb la simple línia següent:

$$g(f(p + v)) = g(f(p) + \tilde{f}(v)) = g(f(p)) + \tilde{g}(\tilde{f}(v)), \tag{2.2.3}$$

on hem suposat f afí i g afí en la primera i segona igualtat, respectivament. Ara demostrem que si f és una afinitat bijectiva amb aplicació lineal associada $\tilde{f}$, llavors f^{-1} és una afinitat amb aplicació lineal associada $\tilde{f}^{-1}$. Pels apartats anteriors, solament hem de demostrar que $\tilde{f}^{-1}(\overrightarrow{cd}) = \overrightarrow{f^{-1}(c)f^{-1}(d)}$; però això es dedueix immediatament de la següent expressió:

$$\tilde{f}(\overrightarrow{f^{-1}(c)f^{-1}(d)}) = \overrightarrow{ff^{-1}(c)ff^{-1}(d)} = \overrightarrow{cd}. \tag{2.2.4}$$

I amb això hem demostrat que l'antiimatge de $\tilde{f}$ coincideix amb la imatge de $\tilde{f}$. ■

Teorema 2.2.2. *Siguin $(\mathbb{A}_1, E_1), (\mathbb{A}_2, E_2)$ dos espais afins. Fixem punts $p_1 \in \mathbb{A}_1, p_2 \in \mathbb{A}_2$ i suposem donada una aplicació lineal $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$. Aleshores, existeix una única aplicació afí $(f, f) : (\mathbb{A}_1, E_1) \longrightarrow (\mathbb{A}_2, E_2)$ tal que $f(p_1) = p_2$ i $\tilde{f} = \varphi$. En altres paraules, una aplicació afí queda totalment determinada per l'aplicació lineal associada i la imatge d'un punt.*

Demostració. Comencem veient la unicitat. Si existeix tal aplicació afí $(f, \tilde{f})$ i suposem que $g : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ també satisfà $\tilde{g} = \varphi$ i $g(p) = q$, aleshores

$$g(x) = g(p_1 + \overrightarrow{p_1x}) = g(p_1) + \tilde{g}\overrightarrow{p_1x} = p_2 + \varphi(\overrightarrow{p_1x}) = f(x); \tag{2.2.5}$$

per tant, p_1, p_2 i h la determinen completament. Això també ens diu com hem de definir f per provar l'existència. Posem $f(x) = p_2 + \varphi(\overrightarrow{p_1x})$ i $f(y) = p_2 + \varphi(\overrightarrow{p_1y})$. Per tant,

$$\overrightarrow{f(x)f(y)} = \overrightarrow{f(x)p_2} + \overrightarrow{p_2f(y)} = -\varphi(\overrightarrow{p_1x}) + \varphi(\overrightarrow{p_1y}) = \varphi(\overrightarrow{p_1y} - \overrightarrow{p_1x}) = \varphi(\overrightarrow{xy}). \tag{2.2.6}$$

Per tant, f és una aplicació afí i, a més, $\tilde{f} = \varphi$. A més, $f(p) = q + \varphi(\overrightarrow{pp}) = q + 0 = q$. ■

Observació 2.2.3. Una aplicació afí queda determinada per la imatge d'un sistema de referència o bé per la imatge d'$n + 1$ punts linealment independents.

Corol·lari 2.2.4. *Siguin $(\mathbb{A}_1, E_1), (\mathbb{A}_2, E_2)$ dos espais afins i sigui n la dimensió del primer.*

1. *Fixat un sistema de referència $R = \{p_0; e_1, \ldots, e_n\}$ en $(\mathbb{A}_1, E_1)$ i donats $q_0 \in \mathbb{A}_2$ i $v_1, \ldots, v_n \in E_2$ qualssevol, existeix una única aplicació afí $(f, \tilde{f}), f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ tal que $f(p_0) = q_0$ i $\tilde{f}(e_i) = v_i$,*

2. *Donats $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{A}_1$ linealment independents i $n+1$ punts qualssevol $q_0, \dots, q_n \in \mathbb{A}_2$ (poden ser repetits, fins i tot), existeix una única aplicació afí $(f, \tilde{f})$ tal que $f(p_i) = q_i, \forall i$.*

Demostració. Demostrem primerament el segon apartat. Com que $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$ és una base de E_1, existeix una única $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ lineal tal que $\varphi(\overrightarrow{p_0p_i}) = q_0q_i, \forall i$. Per 2.2.2, $\exists!\ f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ amb $\tilde{f} = \varphi$ i $f(p_0) = q_0$. Aleshores:

$$f(p_i) = f(p_0 + \overrightarrow{p_0p_i}) = f(p_0) + \tilde{f}(\overrightarrow{p_0p_i}) = q_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0p_i}) = q_0 + \overrightarrow{q_0q_i} = q_i, \forall i. \tag{2.2.7}$$

Sigui $\mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ també satisfà $g(p_i) = q_i, \forall i$. Llavors,

$$\tilde{g}(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{g(p_0)g(p_i)} = \overrightarrow{q_0q_i}, \forall i \implies \tilde{g} = \varphi \xrightarrow{2.2.2} g = f. \tag{2.2.8}$$

■

Demostració amb coordenades. Sigui $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ una aplicació afí amb $\dim(E_1) = n$ i $\dim(E_2) = m$. Escollim sistemes de referència

$$\{p; e_1, \dots, e_n\}, (\mathbb{A}_1, E_1);\ \{q; v_1, \dots, v_m\}, (\mathbb{A}_2, E_2). \tag{2.2.9}$$

Aleshores, $f(p)$ té coordenades $(b_1, \dots, b_m)$: $\overrightarrow{qf(p)} = b_1v_1 + \dots + b_mv_m$ i $f(e_i)$ té components $a_1^iv_1 + \dots + a_m^iv_m, \forall i$. Podem trobar $f(x), \forall x$ en coordenades posant $x = (x_1, \dots, x_n) : \overrightarrow{px} = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ i ara

$$\begin{aligned}\overrightarrow{qf(x)} = \overrightarrow{qf(p)} + \overrightarrow{f(p)f(x)} = \overrightarrow{qf(p)} + \tilde{f}(\overrightarrow{px}) =\\ \tilde{f}(\overrightarrow{px}) = \tilde{f}(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) =\\ = x_1\tilde{f}(e_1) + \dots + x_n\tilde{f}(e_n) = x_1(a_1^1v_1 + \dots + a_m^1v_m) + \dots + x_n(a_1^nv_1 + \dots + a_m^nv_m) =\\ = (x_1a_1^1 + \dots + x_na_1^n)v_1 + \dots + (x_1a_m^1 + \dots + x_na_m^n)v_m.\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Si diem $f(x) = (x_1^*, \dots, x_m^*)$, podem posar $\overrightarrow{qf(x)} = x_1^*v_1 + \dots + x_m^*v_m$ i les equacions de f seran:

$$\begin{cases} x_1^* = a_1^1x_1 + \dots + a_1^nx_n + b_1, \\ \vdots \\ x_m^* = a_m^1x_1 + \dots + a_m^nx_n + b_m; \end{cases} \tag{2.2.11}$$

En notació de matrius ens queda que:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2.2.12}$$

i ens queda una expressió de la forma $\tilde{X}^* = \tilde{M}\tilde{X} + B$, l'expressió general d'una aplicació afí. ■

Observació 2.2.5.

1. $\tilde{M}$ és la matriu de $\tilde{f}$ en les bases $e_1, \dots, e_n$ d'E_1 i $v_1, \dots, v_m$ d'E_2.
2. B és el vector de coordenades de $f(p)$.
3. Hem tornat a demostrar el teorema inicial: f està determinada per $\tilde{M}$ i B.
4. f és una afinitat si, i només si, $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2$ i $\tilde{M}$ és invertible. En tal cas, $n = m$.

Notació 2.2.6 (Punt imatge)**.** El punt imatge es denotarà de la següent manera: $f(x) = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$.

Exemple 2.2.7. Demostrem que existeix una única afinitat f d'$\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tal que

$$\begin{matrix} f(1,-1) = (1,0), & a = (1,-1) & a^* = (1,0) \\ f(0,2) = (-2,2), & b = (0,2) & b^* = (-2,2) \\ f(-1,2) = (3,3). & c = (-1,2) & b^* = (3,3) \end{matrix} \tag{2.2.13}$$

i trobem les equacions d'f en la referència canònica:

$$\begin{matrix} \overrightarrow{ab} = (-1,3) & \overrightarrow{a^*b^*} = (-3,2) \\ \overrightarrow{ac} = (-2,3) & \overrightarrow{a^*c^*} = (2,3) \end{matrix} \text{ linealment independents} \implies a, b, c \text{ afinment independents.} \tag{2.2.14}$$

Per 2.2.2, existeix una única aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ afí amb $f(a) = a^*$, $f(b) = b^*$, $f(c) = c^*$ i tenim que

$$\begin{gathered} \tilde{M} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \tilde{M} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & \frac{-8}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{2.2.15}$$

De fet, per a $f(a) = a^* \iff f(1,-1) = (1,0)$ ens queda:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & \frac{-8}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \iff b_1 = \frac{10}{3}, b_2 = \frac{4}{3}. \tag{2.2.16}$$

Ara, donarem una proposició que recorda força a 1.4.2.

Proposició 2.2.8. *Una aplicació de conjunts $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ és una afinitat si, i només si, $x^1 + \cdots + x^r = 1$, aleshores $f(x) = \sum_{i=1}^r x^i f(a_i)$.*

Demostració. Sigui $p \in \mathbb{A}_1$ un punt qualsevol. Tenim $\overrightarrow{px} = \sum_{i=1}^r x^i \overrightarrow{pa_i}$, d'on

$$\overrightarrow{f(p)f(x)} = \tilde{f}(\overrightarrow{px}) = \sum_{i=1}^r x^i \tilde{f}(\overrightarrow{pa_i}) = \sum_{i=1}^r x^i \overrightarrow{f(p)f(a_i)}, \tag{2.2.17}$$

com volíem demostrar. ■

Corol·lari 2.2.9. *Tota afinitat transforma el baricentre d'r punts en el baricentre de llurs imatges.*

Proposició 2.2.10. *Una aplicació de conjunts $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ és una afinitat si, i només si, $x^1 + \cdots + x^r = 1$,*

$$f\left(\sum_{i=1}^r x^i a_i\right) = \sum_{i=1}^r x^i f(a_i). \tag{2.2.18}$$

Demostració. Hem de definir què serà l'aplicació lineal associada a f. Observem que la condició $\tilde{f}(\overrightarrow{ab}) = \overrightarrow{f(a)f(b)}$ ens determina ja $\tilde{f}$. L'únic problema és que cada vector $u \in E_1$ admet moltes representacions de la forma $u = \overrightarrow{ab}$. Per evitar aquesta pluralitat fixem un punt $p \in \mathbb{A}_1$ i prenguem tots els vectors amb origen p. Així doncs, definim:

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f}: & E_1 & \longrightarrow & E_2 \\ & \overrightarrow{px} & \longmapsto & \tilde{f}(\overrightarrow{px}) := \overrightarrow{f(p)f(x)}. \end{array} \tag{2.2.19}$$

Provem que $\tilde{f}$ és lineal: donats $\overrightarrow{px}$ i $\overrightarrow{py}$, sigui $\overrightarrow{px} + \overrightarrow{py} = \overrightarrow{pz}$; aleshores:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\overrightarrow{px} + \overrightarrow{py}) = \tilde{f}(\overrightarrow{pz}) = \overrightarrow{f(p)f(z)} \\ \tilde{f}(\overrightarrow{px}) + \tilde{f}(\overrightarrow{py}) = \overrightarrow{f(p)f(x)} + \overrightarrow{f(p)f(y)}, \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

i hauríem de veure que $\overrightarrow{f(p)f(z)} = \overrightarrow{f(p)f(x)} + \overrightarrow{f(p)f(y)}$. Això equival a veure que $f(z) = -f(p) + f(x) + f(y)$. La condició de l'enunciat ens diu que això serà cert si $z = -p + x + y$, és a dir, si $\overrightarrow{pz} = \overrightarrow{px} + \overrightarrow{py}$, que és precisament d'on hem partit.

Sigui ara $\overrightarrow{px}$ i $\overrightarrow{py} = \lambda\overrightarrow{px}$. $\tilde{f}(\overrightarrow{px}) = \overrightarrow{f(p)f(x)}$, $\tilde{f}(\overrightarrow{py}) = \overrightarrow{f(p)f(y)}$ i hem de veure que $\overrightarrow{f(p)f(y)} = \lambda\overrightarrow{f(p)f(x)}$. Això vol dir que $f(y) = (1-\lambda)f(p) + \lambda f(x)$. N'hi ha prou amb veure $y = (1-\lambda)p + \lambda x$, és a dir, que $\overrightarrow{py} = \lambda\overrightarrow{px}$, i això és cert per hipòtesi. Només resta comprovar que $\tilde{f}$ és l'aplicació lineal associada a f. En efecte, $\forall a, b \in \mathbb{A}$:

$$\tilde{f}(\overrightarrow{ab}) = \tilde{f}(\overrightarrow{pb} - \overrightarrow{pa}) = \tilde{f}(\overrightarrow{pb}) - \tilde{f}(\overrightarrow{pa}) = \overrightarrow{f(p)f(b)} - \overrightarrow{f(p)f(a)} = \overrightarrow{f(a)f(b)}. \tag{2.2.21}$$

■

Proposició 2.2.11 (Les afinitats conserven les varietats lineals). *Sigui $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ una aplicació afí. Sigui $\mathbb{L} = a + F$ una varietat lineal a $\mathbb{A}_1$. Aleshores: $f(\mathbb{L}) = f(a) + \tilde{f}(F)$.*

Demostració. Si $p \in \mathbb{L}$, llavors $p = a + v$ amb $v \in F$.

$$f(p) = f(a + v) = f(a) + \tilde{f}(v) \in f(a) + \tilde{f}(F) \tag{2.2.22}$$

El recíproc és el següent: sigui $q \in f(a) + \tilde{f}(F)$. Llavors, $q = f(a) + \tilde{f}(w)$ amb $w \in F$. Per tant, $q = f(a) + \tilde{f}(w) = f(a + w)$, on $a + w \in \mathbb{L} \implies q \in f(\mathbb{L})$. ■

Proposició 2.2.12. *Les afinitats conserven el paral·lelisme.*

Demostració. És suficient suposar que f és una aplicació afí.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{L}_1 = a_1 + F_1 \\ \mathbb{L}_2 = a_2 + F_2 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{c} f(\mathbb{L}_1) = f(a_1) + \tilde{F_1} \\ f(\mathbb{L}_2) = f(a_2) + \tilde{f}(F_2) \end{array}\right\} \implies f(\mathbb{L}_1) \parallel f(\mathbb{L}_2). \tag{2.2.23}$$

Suposant que $F_1 \subseteq F_2$, aleshores $\tilde{f}(F_1) \subseteq \tilde{f}(F_2)$. ■

Proposició 2.2.13 (Les afinitats conserven la raó simple). *Sigui $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ una aplicació afí injectiva. Siguin $a, b, c \in \mathbb{A}_1$ punts alineats i diferents. Sigui $\mathbb{L}$ la recta que passa per a, b, c. Llavors, $f(\mathbb{L})$ és una recta que conté $f(a), f(b), f(c)$.*

Demostració. Posem $(a, b, c) = \lambda$. Com que estan alineats, $\overrightarrow{ac} = \lambda\overrightarrow{bc}$. Posem $\tilde{f}(\overrightarrow{ac}) = \tilde{f}(\lambda\overrightarrow{bc}) = \lambda\tilde{f}(\overrightarrow{bc})$. Si substituïm $\tilde{f}(\overrightarrow{ac}) = \overrightarrow{f(a)f(c)}$ i $\lambda\overrightarrow{f(b)f(c)}$, tenim que la raó simple $(f(a), f(b), f(c)) = \lambda$ es compleix. ■

Teorema 2.2.14. *Si el cos $\mathbb{K}$ no és de característica 2, una aplicació $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ és una afinitat si, i només si, conserva punts alineats i llurs raons simples.*

2.3

Determinació i matrius associades

2.3.1 Matriu associada a una aplicació afí

Sigui $(f, \tilde{f}) : (\mathbb{A}_1, E_1) \longrightarrow (\mathbb{A}_2, E_2)$ una aplicació afí. Fixem sistemes de referència $R_1 := \{p; e_1, \dots, e_n\}$, $R_2 := \{q; v_1, \dots, v_m\}$ en $\mathbb{A}_1$ i $\mathbb{A}_2$, respectivament. Suposem que $f(p)$ té coordenades $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ en la referència R_2 i que $\tilde{f}(e_i) = a_1^i v_1 + \dots + a_m^i v_m$. És a dir, la matriu de $\tilde{f}$ en aquestes bases és:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}. \tag{2.3.1}$$

També suposarem donades

$$\begin{cases} f : \tilde{X}^* = \tilde{M}\tilde{X} + B \\ g : \tilde{X}^* = \tilde{N}\tilde{X} + C \end{cases} \quad g \circ f : \tilde{X}^* = \tilde{M}(\tilde{M}\tilde{X} + B) + C = \tilde{N}\tilde{M}\tilde{X} + (\tilde{N}B + C) \tag{2.3.2}$$

Definició 2.3.1 (Matriu associada a f). Anomenem matriu associada a f (o bé la matriu de l'afinitat f) en les referències R_1, R_2 a la matriu:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \alpha_1 \\ & \tilde{M} & & \vdots \\ & & & \alpha_m \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{M} & \alpha \\ 0 & 1 \end{array}\right) \tag{2.3.3}$$

Tenim que

$$f(x) = f(p + \overrightarrow{px}) = f(p) + \tilde{f}(\overrightarrow{px}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \tilde{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{2.3.4}$$

on $(x_1, \dots, x_n)$ són coordenades de x en R_1. Per tant, si $(x_1^*, \dots, x_m^*)$ són les coordenades de $f(x)$ en R_2, tenim que

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_m^* \\ 1 \end{pmatrix}, X^* = MX. \tag{2.3.5}$$

i en notació ampliada ens queda que

$$\left.\begin{array}{c} f : X^* = MX \\ g : X^* = NX \end{array}\right\}, \; g \circ f : X^* = NMX,$$
$$M = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{M} & B \\ 0 & 1 \end{array}\right), N = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{N} & C \\ 0 & 1 \end{array}\right) \implies NM = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{N}\tilde{M} & \tilde{N}B + C \\ 0 & 1 \end{array}\right) \tag{2.3.6}$$

Corol·lari 2.3.2. *Si $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ és una afinitat bijectiva amb matriu $\tilde{M}$, f^{-1} és una afinitat bijectiva amb matriu $\tilde{M}^{-1}$.*

Observació 2.3.3. L'expressió matricial anterior es pot escriure en forma d'equacions

$$\begin{aligned} x_1^* &= \textstyle\sum_{i=1}^n a_1^i x_i + \alpha_1, \\ &\vdots \\ x_m^* &= \textstyle\sum_{i=1}^n a_m^i x_i + \alpha_m; \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

de manera que les coordenades x_i^* del punt imatge depenen linealment de les coordenades x_i del punt inicial. Com la imatge d'una referència determina de manera única una afinitat, la matriu també la determina. Això ens diu que un cop fixada una referència podem donar una afinitat mitjançant un sistema d'equacions com l'anterior.

2.4 Varietats lineals invariants per una afinitat

En aquest apartat $(\mathbb{A}_1, E_1) = (\mathbb{A}_2, E_2) = (\mathbb{A}, E)$ i $(f, \tilde{f}) : (\mathbb{A}, E) \longrightarrow (\mathbb{A}, E)$. Suposarem que $\tilde{f}$ és un automorfisme, és a dir, que f és una afinitat.

Definició 2.4.1 (Punt fix). Anomenem punt fix a un punt $p \in \mathbb{A}$ si $f(p) = p$, és a dir, és un punt tal que s'aplica a si mateix. En el cas que ens ocupa aquesta secció imposarem que $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^*, \ldots, x_n^*) = (x_1, \ldots, x_n)$.

Observació 2.4.2. Les translacions de vector $v \neq 0$ no tenen punts fixos.

Definició 2.4.3 (Varietat lineal invariant). Diem que una varietat lineal $\mathbb{L} = a + F$ és invariant si es dona que $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. Com que $f(a + F) = f(a) + \tilde{f}(F)$, la varietat $a + F$ és invariant si, i només si,

1. $\tilde{f}(F) \subset F$ i
2. $\overrightarrow{qf(q)} \in F$.

Observació 2.4.4. Com que tota afinitat és bijectiva, les condicions $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$ i $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$ són equivalents. La primera condició ens diu que les direccions de les varietats invariants són subespais invariants.

Observació 2.4.5.

1. La varietat lineal de punts fixos ($\neq \emptyset$) és un cas particular de varietat lineal invariant.
2. Els punts fixos són varietats lineals invariants de dimensió 0.
3. La condició que $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$ no vol dir que $f(p) = p$, $\forall p \in \mathbb{L}$, sinó que $f(p) \in \mathbb{L}$, $\forall p \in \mathbb{L}$. En general, els punts de $\mathbb{L}$ no seran punts fixos de f.
4. En efecte, notem que si $u \in F$, aleshores $f(a), f(a + u) \in \mathbb{L}$; per tant, $\tilde{f}(u) \in F$. Obtenim que $\tilde{f}(F) = F$.

Propietat 2.4.6 (Propietats del conjunt de punts fixos).

1. *El conjunt de punts fixos és una varietat lineal.*
2. *Si $p_1, \ldots, p_k$ són fixos, aleshores tots els punts de la varietat lineal $\{p_1\} + \cdots + \{p_k\}$ són fixos.*
3. *Si 1 no és VAP de l'endomorfisme $\tilde{f}$, aleshores l'afinitat té un únic punt fix.*

Demostració. Fixem un sistema de referència. Suposem que les equacions de f són

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2.4.1}$$

Els punts fixos no són sinó varietats lineals de dimensió 0 que es transformen en ells mateixos. En notació ampliada, tenim que compleixen $x^* = Ax+b \iff x = Ax+b \iff (A-\mathbb{I})x = -b$. Per tant, es poden trobar mitjançant el sistema

$$(A-\mathbb{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \ (A-\mathbb{I})x = -b \tag{2.4.2}$$

Això demostra el primer apartat i el segon n'és una conseqüència. Notem finalment que si 1 no és VAP, aleshores $\det(A-\mathbb{I}) \neq 0$ i el sistema de punts fixos és compatible determinat. ■

Corol·lari 2.4.7. *En particular, si p_0, p_1 són punts fixos, aleshores tots els punts de la recta $p_0 + \langle \overrightarrow{p_0p_1} \rangle$ són fixos.*

Observació 2.4.8 (Què és el conjunt de solucions de $(A-\mathbb{I})x = -b$?). Tenim diverses possibilitats:

1. El conjunt buit: f no té punts fixos. És el cas de les translacions, ja que la matriu associada a l'endomorfisme $\tilde{f}$ és la identitat.
2. Un únic punt: el sistema $(A-\mathbb{I})x+b = 0$ té solució única si, i només si, $A-\mathbb{I}$ és invertible; $\det(A-\mathbb{I}) \neq 0$. En tal cas, la solució és:

$$P = -(A-\mathbb{I})^{-1}b \tag{2.4.3}$$

3. Si $\dim E = n$ i $\mathrm{rg}(A-\mathbb{I}) = k < n$, llavors el sistema $(A-\mathbb{I})x = -b$ té infinites solucions o bé no en té cap.

El conjunt de totes les solucions és una varietat lineal amb direcció el subespai $F = \ker(A-\mathbb{I})$. Aquí, $\dim F = n-k$ i F és el subespai de vectors propis de $\tilde{f}$ de valor propi 1.

Observació 2.4.9. Això últim també ho podem demostrar sense coordenades: si $\mathbb{L} = a + F$ és la varietat lineal de punts fixos de f, llavors

$$\mathbb{L} = \{a+v \mid f(a+v) = a+v\} = \{a+v \mid \tilde{f}(v) = v\}, \tag{2.4.4}$$

on v és un VEP de VAP 1 i $f(a+v) = a + \tilde{f}(v)$ donada la invariància del punt $a+v$.

2.4.1 Recta invariant

Definició 2.4.10 (Recta invariant). Si una recta $r = a + \langle v \rangle$ és invariant, aleshores $\tilde{f}(\langle v \rangle) = \langle v \rangle$. És a dir, el vector director de r és propi.

Procés 2.4.11. *Primerament cal trobar els VEPs d'$\tilde{f}$ i imposar que $\overrightarrow{pf(p)}$ sigui VEP. Així determinarem les rectes invariants que tenen aquest VEP com a vector director.*

Exemple 2.4.12. Tenim que f ve donada per $x^* = 3x - y + 1$ i $y^* = 4x - 2y + 3$. Comprovem que $\mathbb{L} : x - y + 1 = 0$ és invariant per f. Hem de trobar que $(x, y) \in \mathbb{L} \implies f(x, y) \in \mathbb{L}$. Ara, $(x, y) \in \mathbb{L} \iff x - y + 1 = 0 \iff y = x + 1$. Ens queda:

Proposició 2.4.13. *Si p és un punt fix de f i v és un vector propi de $\tilde{f}$, llavors $\mathbb{L} = p + \langle v \rangle$ és una recta invariant de f.*

Demostració. Suposem que $\tilde{f}(v) = \alpha v$. Llavors,

$$f(p + \lambda v) = f(p) + \lambda \tilde{f}(v) = f(p) + \lambda \alpha v = p + \lambda \alpha v \in \mathbb{L}, \forall \lambda \implies f(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L} \tag{2.4.5}$$

■

Aquesta condició no és necessària. Una condició necessària i suficient perquè $\mathbb{L} = a + \langle v \rangle$ sigui una recta invariant de f és el teorema següent.

Teorema 2.4.14. *Una recta $a + \langle v \rangle$ és invariant per una afinitat f si, i només si,*

1. *v és un vector propi de $\tilde{f}$,*
2. *$\overrightarrow{af(a)} \in \langle v \rangle$.*

Demostració.

$\implies$ Suposem els dos apartats de tal manera que $\tilde{f} = \alpha v$ i $\overrightarrow{af(a)} = \beta v$. Tenim que

$$f(a + \lambda v) = f(a) + \lambda \tilde{f}(v) = f(a) + \lambda \alpha v = a + \beta v + \lambda \alpha v = a + (\beta + \lambda \alpha) v \implies f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L} \tag{2.4.6}$$

$\impliedby$ Suposem que $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. Ara, $\mathbb{L} = a + \langle v \rangle$ i $f(\mathbb{L}) = f(a) + \langle \tilde{f}(v) \rangle$ i $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L} \implies \langle \tilde{f}(v) \rangle = \langle v \rangle \iff \tilde{f}(v) = \alpha v$ per a algun α. Ens falta dir que $a \in \mathbb{L}$ i $f(a) \in \mathbb{L} \implies \overrightarrow{af(a)} \in \langle v \rangle$.

■

Exemple 2.4.15. Tenim una afinitat f determinada per $x^* = 3x - y + 1$ i $y^* = 4x - 2y + 3$ i ara ens queda que

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{2.4.7}$$

Busquem els vectors propis de M i ens queda que

$$\det(M - \alpha \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \alpha & -1 \\ 4 & -2 - \alpha \end{vmatrix} = -6 - 3\alpha + 2\alpha + \alpha^2 + 4 = (\alpha - 2)(\alpha + 1) \tag{2.4.8}$$

Per al cas $\alpha = 2$, $\ker(M - 2Id) = \langle (1, 1) \rangle$. Estudiem si f té alguna recta invariant en aquesta direcció:

$$\begin{gathered} a = (x, y) \implies f(a) = (3x - y + 1, 4x - 2y + 3) \\ \overrightarrow{af(a)} = (2x - y + 1, 4x - 3y + 3) \\ \overrightarrow{af(a)} \in \langle (1, 1) \rangle \iff 2x - y + 1 = 4x - 3y + 3 \iff -2x + 2y - z = 0 \iff x - y + 1 = 0. \end{gathered} \tag{2.4.9}$$

En canvi, per al cas $\alpha = -1$, tenim que

$$\begin{gathered} \ker(M + \mathbb{I}) = \langle (1, 4) \rangle, \ \overrightarrow{af(a)} = (2x - y + 1, 4x - 3y + 3), \\ \overrightarrow{af(a)} \in \langle (1, 4) \rangle \iff -4(2x - y + 1) + (4x - 3y + 3) = 0 \iff 4x - y + 1 = 0. \end{gathered} \tag{2.4.10}$$

Aquesta afinitat f té dues rectes invariants. El seu punt d'intersecció és l'únic punt fix de f. Tenim també que $f(1, 2) = (2, 3)$ i que $f(1, 5) = (-1, -3)$. La restricció de f a cada recta invariant és una homotècia (de raons respectives 2 i -1).

2.4.2 Hiperplans invariants

es pot generalitzar a varietats de qualsevol dimensió. Donat un endomorfisme φ d'un espai vectorial E, direm que un subespai $F \subset E$ és invariant per φ si $\varphi(F) \subseteq F$. En cas que φ sigui bijectiu, la condició que $\varphi(F) \subseteq F$ és equivalent a $\varphi(F) = F$, ja que si $\varphi(F) \subseteq F$ i $\dim \varphi(F) = \dim F$, aleshores $\varphi(F) = F$.

Teorema 2.4.16. *Una varietat lineal $\mathbb{L} = a + F$ és invariant per una afinitat f si, i només si:*

1. *F és un subespai invariant de $\tilde{f}$,*
2. *$\overrightarrow{af(a)} \in F$.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ Suposem que es compleixen les dues condicions. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{r}\tilde{f}(F) \subseteq F\\ \overrightarrow{af(a)} \in F\end{array}\right\} \Longrightarrow f(a+v) = f(a) + \tilde{f}(v) = a + u + w,\ \forall v \in F,\ w \in F. \tag{2.4.11}$$

Per tant, $f(a+v) \in a + F$, $\forall v \in F$ i això implica que $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$.

$\Longleftarrow$ Ara suposem que $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. Sabem que

$$\mathbb{L} = a + F \Longrightarrow f(\mathbb{L}) = f(a)\tilde{f}(F). \tag{2.4.12}$$

Si $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$, llavors $\tilde{f}(F) = F$ i això vol dir que F és invariant per $\tilde{f}$. A més,

$$a \in \mathbb{L},\ f(a) \in \mathbb{L} \Longrightarrow \overrightarrow{af(a)} \in F. \tag{2.4.13}$$

■

Observació 2.4.17. Aquest teorema és difícil d'aplicar en exemples concrets; és complicat trobar els subespais invariants d'un endomorfisme.

Com que hem suposat l'aplicació afí bijectiva, podem imposar la invariància demanant la condició equivalent $f^{-1}(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$.

Proposició 2.4.18. *Sigui $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una afinitat que en certa referència té matriu M. Un hiperplà d'equació $A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B = 0$ és invariant per f si, i només si, $(A_1, \ldots, A_n, B)$ és un VEP de M^T i almenys un dels coeficients A_i és no nul.*

Demostració. Si $A_1x_1 + \cdots + A_nX_n + B = 0$ és l'equació d'un hiperplà H en un sistema de referència fixat, aleshores

$$f^{-1}(H) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in H\}. \tag{2.4.14}$$

Per tant, $f^{-1}(H)$ és l'hiperplà d'equació $A_1x_1^* + \cdots + A_nx_n^* + B = 0$. Suposem que les equacions de f són:

$$x_i^* = \sum_j a_j^i x_j + b_i,\ i = 1, \ldots, n \tag{2.4.15}$$

i la matriu associada a f és

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_1^n & \cdots & a_n^n & b_n\\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1\end{array}\right) \tag{2.4.16}$$

L'equació de l'antiimatge serà la següent:

$$\begin{aligned} A_1x_1^* + \cdots + A_nx_n^* + B &= A_1\left(\sum_j a_j^n x_j + b_n\right) + B \\ = (A_1a_1^1 + \cdots + A_na_1^n)x_1 + \cdots &+ (A_1a_n^1 + \cdots + A_nx_n^n)x_n + (A_1b_1 + \cdots + A_nb_n + B) = 0. \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

Hem obtingut que els coeficients de l'equació $f^{-1}(H)$ s'obtenen aplicant M^T als de H:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & \cdots & a_1^n & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n & 0 \\ \hline b_1 & \cdots & b_n & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ B \end{pmatrix}. \tag{2.4.18}$$

Per tal que $f^{-1}(H) = H$, els nous coeficients han de ser proporcionals als originals. I, per tant, hem obtingut el que volíem. ∎

2.4.2.1 Plans invariants a $\mathbb{R}^3$

Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una afinitat. Escollim un sistema de referència. Llavors, f s'expressa com $X^* = \hat{M}\hat{X}$ (forma ampliada). Tenim que

$$\hat{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & B \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right). \tag{2.4.19}$$

Suposem que un pla $\mathbb{L} : ax + by + cz + d = 0$ és invariant per f. Aleshores, $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$ i també $f^{-1}(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. L'equació de $\mathbb{L}$ es pot escriure en forma vectorial:

$$ax + by + cz + d = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff A^T\hat{X} = 0,\ A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \tag{2.4.20}$$

L'equació d'$f^{-1}(\mathbb{L})$ també és calculable:

$$(x, y, z) \in f^{-1}(\mathbb{L}) \iff f(x, y, z) \in \mathbb{L} \iff (x^*, y^*, z^*) \in \mathbb{L} \iff ax^* + by^* + cz^* + d = 0 \tag{2.4.21}$$

D'aquí sorgeix que $\mathbb{L}$ és invariant per f^{-1} si, i només si, les equacions

$$\begin{matrix} A^T\hat{X} = 0, \\ a^T\hat{M}\hat{X} = 0 \end{matrix} \text{ corresponen a un mateix pla } \iff A^T\hat{M} = \lambda A^t, \lambda \in \mathbb{R} \iff \hat{M}^T A = \lambda A. \tag{2.4.22}$$

Com a conclusió, veiem que un pla $\mathbb{L} : ax + by + cz + d = 0$ és invariant per f si, i només si, (a, b, c, d) és un vector propi de $\hat{M}^T$. Aquest mateix mètode calcula els hiperplans invariants en qualsevol dimensió.

Observació 2.4.19. Considerant la dimensió de l'hiperplà 2, ens dona les rectes invariants. Així doncs, podem aplicar aquest mètode per a trobar les rectes invariants.

Exemple 2.4.20 (Exemple anterior aplicat a aquest mètode)**.**

$$f:\begin{cases} x^* = 3x - y + 1 \\ y^* = 4x - 2y + 3 \end{cases}, \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \hat{M}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.4.23}$$

té els valors propis $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$. Ara,

$$\ker(\hat{M}^T - \mathbb{I}) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,0,1) \rangle \implies \text{no dona recta invariant.}$$

$$\ker(\hat{M}^T + \mathbb{I}) = \ker\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,1) \rangle \implies x - y + 1 = 0 \tag{2.4.24}$$

$$\ker(\hat{M}^T - 2Id) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \langle (4,-1,1) \rangle \implies 4x - y + 1 = 0$$

Ara introduirem el concepte d'*homologia*, que és àmpliament discutit en aquest capítol.

Definició 2.4.21 (Homologia)**.** Una homologia és una afinitat amb un hiperplà de punts fixos. Dins de la homologia distingim:

- la *raó* de la homologia: el valor propi r tal que $\tilde{h} = rId$;
- l'*eix* de la homologia: correspon al vector de la recta de punts fixos, és a dir, al VEP de VAP 1;
- la *direcció* de la homologia: correspon al VEP de VAP r.

Observació 2.4.22. Si E té dimensió 1, els seus únics endomorfismes són les homotècies vectorials. Per tant, per a $\dim E = 1$ les homologies són homotècies.

2.5 Epíleg: classificació de les afinitats

2.5.1 Classificació de les afinitats en dimensió 1

Si $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ és una afinitat, llavors $\tilde{f} : E \longrightarrow E$ és un endomorfisme bijectiu amb $\dim E = 1$. Per tant, $\tilde{f}(v) = rv, \forall v \in E$, on $r \neq 0$ i $\tilde{f} = rId$. En qualsevol base la matriu de $\tilde{f}$ és (r) i $\det \tilde{f} = r$.

1. Si $r = 1$, llavors $\tilde{f} = \mathbb{I}$ i f és una translació: si el vector translació és $u \neq \overrightarrow{0}$, $f : x^* = x + \alpha$; $u = \overrightarrow{0}$, f és la identitat i $f : x^* = x$.
2. Si $r \neq 1$, llavors $\tilde{f} = rId$ i f és una homotècia de raó r amb un únic punt fix. Si escollim com a origen del sistema de referència el centre de la homotècia, llavors f s'expressa com $f : x^* = rx$. En el cas particular $r = -1$, és una simetria central.

2.5.2 Classificació de les afinitats en dimensió 2

Si $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ és una afinitat, llavors $\tilde{f} : E \longrightarrow E$ és un endomorfisme bijectiu amb $\dim E = 2$.

Cas 1 f té algun punt fix. Separarem tres possibilitats diferents:

1. $f = \mathbb{I}$.
2. f té una recta de punts fixos,
3. f té un únic punt fix.

L'afinitat f es diu *homologia* i la recta $\mathbb{L}$ de dos punts fixos es diu l'*eix* de la homologia. Si $\mathbb{L} = a + \langle v \rangle$, llavors $f(a+v) = a + v \implies \tilde{f}(v) = v$ i, per tant, la direcció de l'eix és un subespai propi de $\tilde{f}$ de valor propi 1. Ara hi ha dues possibilitats:

1. $\tilde{f}$ té un altre valor propi $r \neq 1$. En aquest cas, f es diu *homologia general*. Si ω és un vector propi de valor propi r i prenem $\{a; v, w\}$ com a sistema de referència, f s'expressa així:

$$\begin{cases} f(a) = a \\ \tilde{f}(v) = v \\ \tilde{f}(\omega) = r\omega \end{cases}, \quad f : \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x^* = x \\ y^* = ry \end{cases} \tag{2.5.1}$$

La recta de punts fixos és la recta $y = O$. Totes les rectes de direcció $\langle \omega \rangle$ són invariants. Tenen per equació $x = \lambda$, amb λ qualsevol. La restricció de f a cada recta invariant de direcció $\langle \omega \rangle$ és una homotècia de raó r: $y^* = ry$.

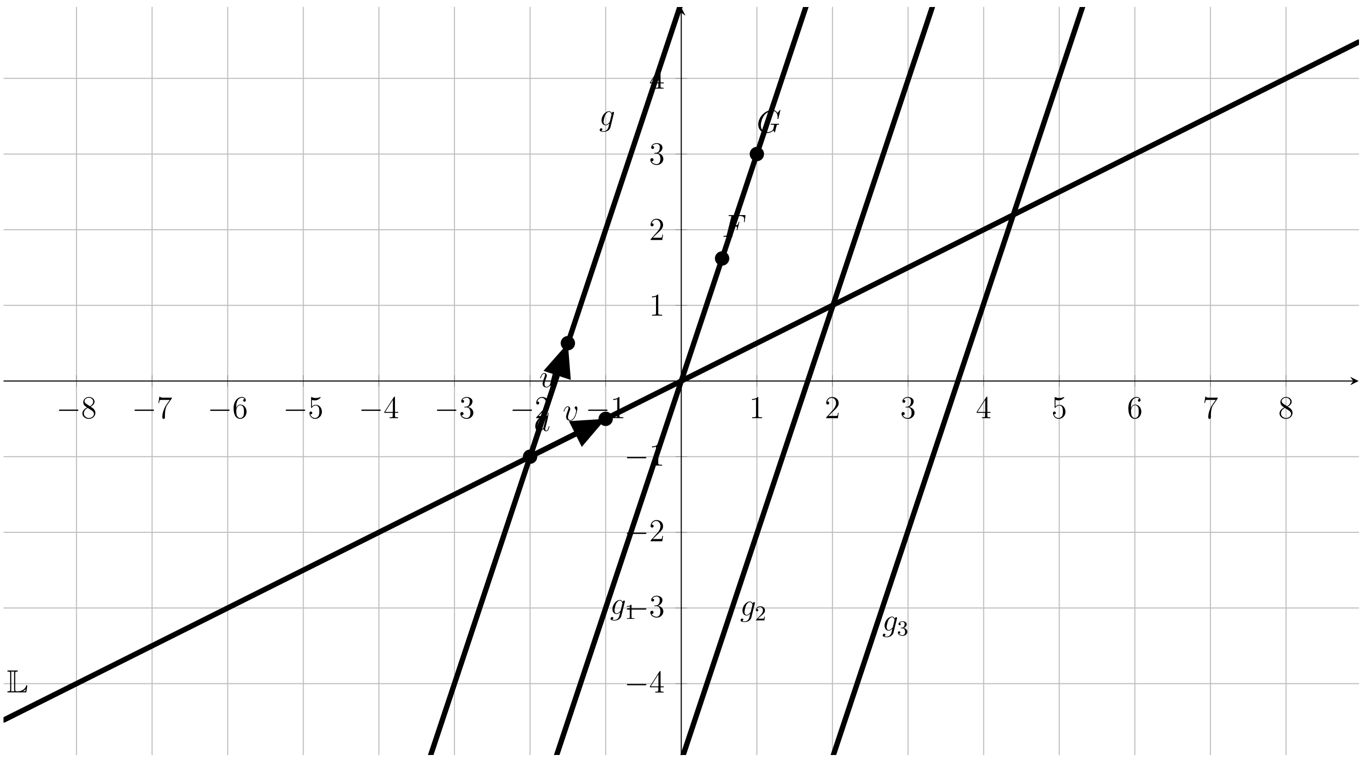


Figura 2.4: g_i representen el feix de rectes invariants i $\mathbb{L}$ l'eix.

2. Ara suposem que 1 és l'únic valor propi de $\tilde{f}$. Quan passa això, f es diu *homologia especial*. Si $f \neq \mathbb{I}$, llavors $\tilde{f}$ no és diagonalitzable i hi ha una base v, ω tal que $\tilde{f}$ té la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prenem $\{a; v, \omega\}$ com a sistema de referència i

$$\begin{cases} f(a) = a \\ \tilde{f}(v) = v \\ \tilde{f}(\omega) = v + \omega \end{cases}, \quad f : \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^* = x + y \\ y^* = y \end{cases} \tag{2.5.2}$$

$\mathbb{L} = a + \langle v \rangle$ és la recta de punts fixos. La recta de punts fixos té l'equació $y = 0$, i totes les rectes de direcció $\langle v \rangle$ són invariants. Tenen per equació $y = \lambda$ amb λ arbitrari. La restricció de f a cada recta invariant $y = \lambda$ és una translació $x^* = x + \lambda$.

f té un únic punt fix p. En aquest cas, la matriu $M - \mathbb{I}$ és invertible i, per tant, $\tilde{f}$ no té el valor propi 1. Separant casos:

1. Si $\tilde{f} = rId$, llavors f és una homotècia de raó r i centre p. En qualsevol sistema de referència amb origen p les equacions de f són:

$$f : \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \begin{cases} x^* = rx, \\ y^* = ry. \end{cases} \tag{2.5.3}$$

   Totes les rectes que passen per l'origen són invariants.

2. $\tilde{f}$ té dos valors propis diferents r, s, llavors f es diu *hiperbòlica.* Si escollim vectors propis v, ω de valors propis respectius r, s, llavors en el sistema de referència $\{p; v, \omega\}$ ens queda:

$$\begin{cases} f(p) = p \\ \tilde{f}(v) = rv \\ \tilde{f}(\omega) = s\omega \end{cases}, \quad f : \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \begin{cases} x^* = rx \\ y^* = sy \end{cases} \tag{2.5.4}$$

   f té dues rectes invariants que es tallen en el punt fix. Les restriccions de f a les rectes invariants són homotècies.

3. Si $\tilde{f}$ té un únic valor propi r i $\tilde{f} \neq r\mathbb{I}$, aleshores $\tilde{f}$ no és diagonalitzable i direm que f és *parabòlica.* En un sistema de referència $\{p; v, \omega\}$ adient,

$$f : \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \begin{cases} x^* = rx + y \\ y^* = ry \end{cases} \tag{2.5.5}$$

   Hi ha una única recta invariant, que és $y = 0$. La restricció de f a la recta invariant és una homotècia: $x^* = rx$.

4. Si $\tilde{f}$ no té cap valor propi, llavors f es diu *el·líptica.* En aquest cas, f no té rectes invariants. No podem donar cap expressió simplificada per a f. En aquesta categoria hi ha els *girs*, que estudiarem quan tinguem la noció d'*angle.*

Observació 2.5.1. Aquí influeix clarament el cos sobre el qual construïm l'espai afí: sobre $\mathbb{C}$, a diferència d'$\mathbb{R}$, el polinomi característic sempre descomposa en factors simples i sempre hi ha valors propis. Per tant, sobre $\mathbb{C}$ mai es podrà donar una $\tilde{f}$ el·líptica.

Cas 2 f no té punts fixos. $\tilde{f}$ aleshores té un VAP 1. Sigui $u \neq 0$ un VEP de VAP 1. Les equacions de f en un sistema $\{p; u, v\}$ (p, v qualssevol) són del tipus:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x + by + c \\ y^* &= ny + d. \end{aligned}\right\} \tag{2.5.6}$$

Si $n \neq 1$, n és un altre valor propi de $\tilde{f}$ i podem escollir, com a segon vector de la base, un vector de VAP n. Les equacions seran:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x + c \\ y^* &= ny + d \end{aligned}\right\} \tag{2.5.7}$$

amb $c \neq 0$ perquè no hi hagi punts fixos. L'única recta invariant té equació:

$$y = \frac{d}{1-n}. \tag{2.5.8}$$

Si escollim l'origen p del sistema de referència sobre aquesta recta, sigui $p = \left(x_0, \frac{d}{1-n}\right)$, resulta que $\overrightarrow{pf(p)} = (c, 0) = cu$. D'aquí, resulta que en el sistema de referència $\{p; cu, v\}$ les equacions de f són:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x + 1 \\ y^* &= ny \end{aligned}\right\} \tag{2.5.9}$$

$n = \det \tilde{f}$. Aquestes afinitats són homologies generals seguides d'una translació de direcció la de la recta de punts fixos de la homologia. Aquesta composició és, a més, commutativa.
Si $n = 1$, l'únic VAP és 1. Si aquest és de multiplicitat 2, $\tilde{f} = \mathbb{I}$ i l'afinitat és una translació de vector $w \neq 0$. En una referència del tipus $\{p; w, v\}$ les equacions de f són:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x + 1 \\ y^* &= y \end{aligned}\right\} \tag{2.5.10}$$

Si la multiplicitat del VAP 1 és 1, a les equacions de f en el sistema $\{p; u, v\}$ (u VEP de VAP 1):

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x + by + c \\ y^* &= y + d \end{aligned}\right\} \tag{2.5.11}$$

i $b \neq 0$ a la força. A més, com que no existeixen punts fixos, $d \neq 0$. En aquestes circumstàncies, l'afinitat no té tampoc cap recta invariant. Podem escollir, però, el vector $\overrightarrow{pf(p)} = cu + dv = w$ com a segon vector de la base; aleshores:

$$\tilde{f}(w) = c\tilde{f}(u) + d\tilde{f}(v) = cu + d(bu + v) = dbu + w. \tag{2.5.12}$$

D'aquí resulta que en el sistema de referència $\{p; dbu, w\}$ les equacions de f són:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x + y \\ y^* &= y + 1 \end{aligned}\right\} \tag{2.5.13}$$

Es tracta, doncs, d'una homologia especial seguida d'una translació de direcció diferent de la del feix de rectes invariants.
Ho detallem del tot en el següent teorema:

Teorema 2.5.2. *Si f no té punts fixos, llavors f és una translació o bé una homologia seguida d'una translació.*

Demostració. Escollim un sistema de referència i expressem f com $X^* = MX + B$. Els punts fixos de f són solucions de $X = MX + B \iff (M - \mathbb{I})X = -B$. Com que per hipòtesi f no té punts fixos, la matriu $M - \mathbb{I}$ *no* és invertible. Si $M = \mathbb{I}$, llavors f és una translació. Si $M \neq \mathbb{I}$, podem escollir un vector propi $v \in \ker(M - \mathbb{I})$ de valor propi 1. Ara escollim un sistema de referència qualsevol i escrivim f com $X^* = MX + B$. Sigui τ la translació de vector $-B$. Aleshores, $\tau \circ f$ s'expressa com $X^* = MX$ i, per tant, té un punt fix $X = 0$. Aquest punt fix, que denotarem per p és precisament l'origen del sistema de referència que hàgim escollit. Com que p és un punt fix de $\tau \circ f$ i v és un vector propi de valor propi 1 d'$\tilde{f}$ (i, per tant, també de $\widetilde{\tau \circ f}$, ja que $\tau = \mathbb{I}$), la recta $p + \langle v \rangle$ és una recta de punts fixos de $\tau \circ f$: $f(p + \lambda v) = f(p) + \lambda \tilde{f}(v) = p + \lambda v$. Això demostra que $\tau \circ f$ és una homologia. Si denotem $h = \tau \circ f$, llavors $f = \tau^{-1} \circ h$; és a dir, f és una homologia seguida d'una translació. ■

III

Espais vectorials euclidians

3.1 Formes bilineals i producte escalar

Considerarem un espai vectorial E sobre un cos $\mathbb{K}$ de dimensió finita n. Suposarem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definició 3.1.1 (Forma bilineal en E)**.** És una aplicació

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (u, v) & \longmapsto & \varphi(u, v) := \lambda \end{array} \tag{3.1.1}$$

Podem veure, doncs, que φ assigna un escalar a cada parell de vectors i que és lineal en les dues variables.

Propietat 3.1.2 (Propietats de les formes bilineals)**.** *Com que és lineal en les dues variables, podem dir que satisfà, donats $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$ i $\lambda \in \mathbb{K}$:*

1. $\varphi(u_1 + u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$,
2. $\varphi(u, v_1 + v_2) = \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2)$,
3. $\varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u, v)$,
4. $\varphi(u, \lambda v) = \lambda\varphi(u, v)$.

Definició 3.1.3 (Forma bilineal simètrica)**.** Diem que φ és simètrica si $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ per a tot $u, v \in E$.

Definició 3.1.4 (Forma bilineal definida positiva)**.** φ és definida positiva si $\varphi(u, u) \geq 0$ per a tot $u \neq 0$ i $\varphi(u, u) = 0$ si, i només si, $u = 0$.

Sigui $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ una aplicació bilineal. Donada una base $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E denotem $g^i_j := \varphi(e_i, e_j)$.

Definició 3.1.5 (Matriu de Gram)**.** Anomenem *Matriu de Gram* en la base $\mathfrak{B}$ la matriu

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) := \begin{pmatrix} g^1_1 & \cdots & g^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^n_1 & \cdots & g^n_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & \cdots & e_1 \cdot e_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n \cdot e_1 & \cdots & e_n \cdot e_n \end{pmatrix} \tag{3.1.2}$$

Observem que gràcies a la bilinealitat, per a vectors u, v amb coordenades $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ respectivament, tenim que

$$\varphi(u, v) = (a_1, \ldots, a_n) \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \tag{3.1.3}$$

aquesta expressió se sol escriure com $\varphi(u, v) = u^t_{\mathfrak{B}} \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) \cdot v_{\mathfrak{B}}$, on $v_{\mathfrak{B}} = \mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(v)$ denota el vector columna de coordenades de v en la base $\mathfrak{B}$ i $u^t_{\mathfrak{B}} = \mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(u)^t$ denota el vector de coordenades de u en la base $\mathfrak{B}$. Quan la base queda clara pel context, simplifiquem l'expressió.

Observació 3.1.6. La matriu de Gram és la única matriu que satisfà $\varphi(u,v) = u_{\mathfrak{B}}^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) \cdot v_{\mathfrak{B}}$, per a tot $u, v \in E$, atès que $\varphi(e_i, e_j) = g_j^i = e_i^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) \cdot e_{\mathfrak{B}}$.

Proposició 3.1.7. *Sigui φ una forma bilineal en E. Són equivalents:*

1. *φ és simètrica,*
2. *per a tota base de E la matriu de Gram és simètrica,*
3. *existeix una base tal que la matriu de Gram en aquesta base és simètrica.*

Demostració.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Si φ és simètrica aleshores $g_j^i = g(e_i, e_j) = g(e_j, e_i) = g_i^j$. Així doncs, φ és simètrica, tal i com volíem provar

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ És trivial.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Escollim una base $\mathcal{B}$ per la qual $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ és simètrica. Aleshores,

$$\varphi(u,v) = u^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) \cdot v = (u^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) \cdot v)^t = v^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)^t \cdot u = \varphi(v,u), \tag{3.1.4}$$

on en la segona igualtat hem usat que $u^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) \cdot v$ és una matriu 1×1. En la tercera, hem aplicat les propietats de la transposició i en la quarta, la definició de forma bilineal.

■

Definició 3.1.8 (Matriu de canvi de base). Donades dues bases $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $\mathfrak{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$, denotem per $\mathcal{P} = \mathcal{M}_{(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')}(\mathbb{I})$ la matriu de canvi de base de $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}'$. Amb la notació introduïda abans, tenim que $u_{\mathfrak{B}'} = \mathcal{P} \cdot u_{\mathfrak{B}}$.

Proposició 3.1.9 (Canvi de base). *Sigui φ una forma bilineal en E. Denotem per $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ i $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}'}(\varphi)$ les matrius de Gram de φ en les bases $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}'$, respectivament. Aleshores, es té*

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = \mathcal{P}^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}'}(\varphi) \cdot \mathcal{P}, \tag{3.1.5}$$

on $\mathcal{P} = \mathcal{M}_{(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')}$ és la matriu de canvi de base.

Demostració. Donats $u, v \in E$ tenim

$$\varphi(u,v) = u_{\mathfrak{B}'}^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}'}(\varphi) \cdot u_{\mathfrak{B}'} = (P \cdot u_{\mathfrak{B}})^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}'}(\varphi) \cdot (P \cdot u_{\mathfrak{B}}) = u_{\mathfrak{B}}^t \cdot \mathcal{P}^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}'}(\varphi) \cdot P \cdot u_{\mathfrak{B}}. \tag{3.1.6}$$

Com que $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ és la única matriu tal que $\varphi(u,v) = u_{\mathfrak{B}}^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}'}(\varphi) \cdot u_{\mathfrak{B}}$, obtenim la igualtat

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = \mathcal{P}^t \cdot \mathcal{G}_{\mathfrak{B}'}(\varphi) \cdot P. \tag{3.1.7}$$

■

Observació 3.1.10. Notem que, en contrast amb els canvis de base per endomorfismes, ens apareix la transposada $\mathcal{P}^t$ en comptes de la inversa $\mathcal{P}^{-1}$.

3.2 Espais vectorials euclidians

Considerarem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i més endavant comentarem les particularitats de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o d'un altre cos arbitrari. Escriurem $u \cdot v$ com uv, però no uu en lloc d'$u \cdot u$. Anàlogament amb v.

Definició 3.2.1 (Producte escalar). Un *producte escalar* en un espai vectorial E és una forma bilineal $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ que és simètrica i definida positiva. Un espai vectorial Euclidià és aquell $\mathbb{R}$-espai vectorial dotat d'un producte escalar.

Notació 3.2.2. Donat un producte escalar $\varphi : E \times E \longrightarrow E$, també se sol denotar $\varphi(u, v) := uv$.

Sigui $(E, \cdot)$ un espai vectorial Euclidià. Tenim el següent conjunt de definicions, força importants.

Definició 3.2.3 (Vectors ortogonals). Dos vectors u, v són ortogonals si $uv = 0$.

Definició 3.2.4 (Vector unitari). Un vector u és unitari si $u \cdot u = 1$.

Definició 3.2.5 (Base ortogonal). Una base $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ és *ortogonal* si $e_i e_j = 0, \forall i \neq j$ (és a dir, els vectors de la base són ortogonals dos a dos). Això equival a demanar que la matriu de Gram $\mathcal{G}$ sigui diagonal en aquesta base.

Definició 3.2.6 (Base ortonormal). Una base $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ és *ortonormal* si és ortogonal i està formada per vectors unitaris. Equivalentment, si la matriu de Gram $\mathcal{G}$ és la identitat en aquesta base.

Exemple 3.2.7. Siguin $u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n)$ dos vectors de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$. Aleshores, $uv = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ defineix un producte escalar: és lineal en cada variable, és clarament simètric i $uu = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$, essent 0 només quan $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Diem que el producte escalar és estàndard. Si φ és un producte escalar arbitrari en un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i e_i és una base ortonormal, aleshores G és la identitat i obtenim que el càlcul en coordenades té la mateixa expressió que el producte escalar estàndard en $\mathbb{R}^n$.

Definició 3.2.8 (Norma). Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una norma a E és una aplicació

$$\begin{array}{rccl} \|\ \ \| : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ (sempre a } \mathbb{R}!) \\ & v & \longmapsto & \|v\| \end{array} \tag{3.2.1}$$

que compleix

1. $\|v\| = 0 \iff v = \overrightarrow{0}$,
2. $\|kv\| = |k| \cdot \|v\|$,
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular).

$|k|$ indica el valor absolut si $k \in \mathbb{R}$ o bé indica el mòdul si $k \in \mathbb{C}$.

Observació 3.2.9. Qualsevol espai vectorial E amb una norma és un *espai mètric*: $d(u, v) := \|u - v\|$.

Lema 3.2.10 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz). *Es compleix que*

$$|uv|^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v), \forall u, v \in E \tag{3.2.2}$$

Demostració. Si $v = \overrightarrow{0}$, aleshores la desigualtat és certa. Suposem $v \neq \overrightarrow{0}$ i considerem $k = \frac{uv}{v \cdot v}$. Aleshores:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u - kv)(u - kv) = u \cdot u - k(vu) - k(uv) + k\overline{k}(v \cdot v) \\ &= u \cdot u - \frac{(uv)(vu)}{v \cdot v} - \frac{\overline{(uv)}(uv)}{v \cdot v} + \frac{(uv)\overline{(uv)}}{v \cdot v} \\ &= u \cdot u - \frac{(uv)\overline{(uv)}}{v \cdot v} = u \cdot u - \frac{|uv|^2}{v \cdot v}, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

d'on $|uv|^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v), \forall u, v \in E$. ■

Proposició 3.2.11. *Sigui E un espai vectorial amb un producte escalar. L'aplicació*

$$\begin{array}{rccl} \|\ \ \|: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & v & \longmapsto & \|v\| := \sqrt{v \cdot v} \end{array} \tag{3.2.4}$$

és una norma.

Demostració. La primera condició de norma resulta del fet que el producte escalar és ben definit, $v \cdot v \geq 0,\ \forall v$. És definida positiva perquè $\|v\| = 0 \iff v \cdot v = 0 \iff v = 0$. Observem que $(kv)(kv) = k\overline{k}(v \cdot v) = |k|^2(v \cdot v)$. Per demostrar l'última, la desigualtat triangular, fem el següent:

$$\begin{aligned} (u+v)(u+v) &= u \cdot u + uv + vu + v \cdot v \\ &= u \cdot u + v \cdot v + (uv + \overline{uv}) \\ &\leq u \cdot u + v \cdot v + 2|uv| \leq \text{ aplicant la proposició anterior} \\ &\leq u \cdot u + v \cdot v + 2\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v} = (\sqrt{u \cdot u} + \sqrt{v \cdot v})^2, \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

d'on $\sqrt{(u+v)(u+v)} \leq \sqrt{u \cdot u} + \sqrt{v \cdot v} \iff \|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$. ■

Observació 3.2.12 (Producte escalar estàndard)**.**

- Siguin $u = (x_1, \ldots, x_n)$ i $v = (y_1, \ldots, y_n)$ dos vectors de l'espai $\mathbb{R}^n$. El *producte escalar estàndard* es defineix com

$$uv := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n. \tag{3.2.6}$$

  Per a tot vector $u = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ la *norma de u* és

$$\|u\| := \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_n^2}. \tag{3.2.7}$$

- Geomètricament es pot provar que

$$v \cdot \omega = \|v\| \cdot \|\omega\| \cdot \cos\theta, \tag{3.2.8}$$

  on θ és l'angle que formen els vectors v i ω. Això explica la terminologia (v i ω són ortogonals si, i només si, v i ω són perpendiculars).
- Si (E, φ) és un espai vectorial Euclidià i $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base ortonormal, aleshores $\mathcal{G}$ és la identitat i el càlcul en coordenades del producte φ té la mateixa expressió que el producte escalar estàndard de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.2.13. L'espai vectorial $E = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ amb el producte escalar

$$\varphi(p(x), q(x)) := \int_0^1 p(x)q(x)dx. \tag{3.2.9}$$

Teorema 3.2.14 (Teorema de Pitàgores)**.** *Si $u \cdot v = 0$, aleshores $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.*

Demostració.

$$\|u+v\|^2 = (u+v)(u+v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v) \tag{3.2.10}$$

■

3.3

Ortogonalització de Gram-Schmidt

Donat un espai vectorial Euclidià $(E, \cdot)$ ens proposem trobar una base de E que sigui ortonormal. Per fer-ho, ens servirem del mètode de Gram-Schmidt.

Definició 3.3.1 (Projecció). Si $u, v \in E$ amb $u \neq 0$ definim la projecció de v en u com el vector

$$\mathrm{pr}_u(v) = \left(\frac{v \cdot u}{u \cdot u}\right) u. \tag{3.3.1}$$

per a $u = 0$ definim $\mathrm{pr}_u(v) = 0$ per a tot v. Un parell de consideracions:

1. L'expressió entre parèntesi és un escalar i per tant $\mathrm{pr}_u(v)$ és un múltiple del vector u.
2. Si representem u, v en uns eixos coordenats de $\mathbb{R}^n$, geomètricament $\mathrm{pr}_u(v)$ correspon a la projecció ortogonal de v en la direcció marcada per u.

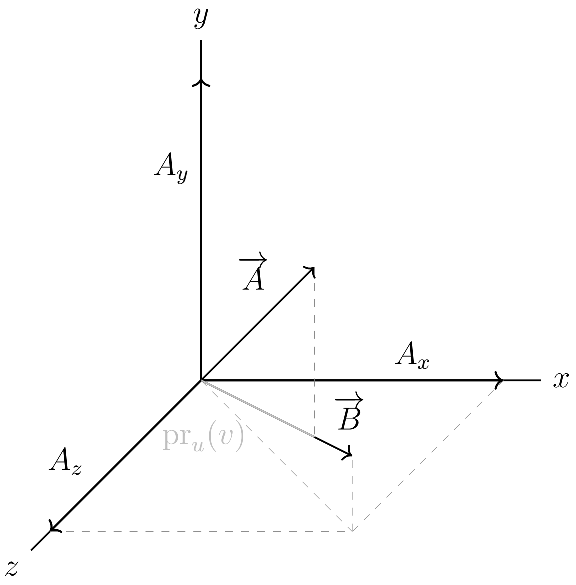


Figura 3.1: Representació del producte escalar $\mathrm{pr}_u(v)$.

3. Observem que $\mathrm{pr}_{\lambda u} = \mathrm{pr}_u(v)$ per a tot $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, de manera que en efecte $\mathrm{pr}_u(v)$ depèn només de v i de la direcció de u.

Procés 3.3.2 (Procés d'ortogonalització de Gram-Schmidt). *El procés d'ortogonalització de Gram-Schmidt consisteix en, donada una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ d'E, trobar una base ortogonal $\{u_1, \dots, u_n\}$ d'E, de la següent manera:*

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - \mathrm{pr}_{u_1}(v_2), \\ u_3 &= v_3 - \mathrm{pr}_{u_1}(v_3) - \mathrm{pr}_{u_2}(v_3), \\ &\vdots \\ u_n &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{pr}_{u_i}(v_n). \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Proposició 3.3.3. *Els vectors $\{u_1, \ldots, u_n\}$ obtinguts pel procés pel procés de Gram-Schmidt formen una base ortogonal d'E.*

Demostració. Observem que per tot $1 \leq i \leq n$, el vector u_i és de la forma

$$u_i = v_i + \sum_{1 \leq j < i} a_j v_j. \tag{3.3.3}$$

En particular, la matriu de coordenades de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ en la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ té tot uns a la diagonal i zeros per sota de la diagonal, de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3.4}$$

on $*$ indiquen escalars arbitraris. Com que la matriu té determinant 1, és invertible i els vectors formen una base. La ortogonalitat dos a dos dels vectors se segueix per construcció. ■

Definició 3.3.4 (Procés d'ortonormalització de Gram-Schmidt). Si després d'aplicar 3.3.2 normalitzem els vectors u_i posant

$$e_i := \frac{u_i}{\|u_i\|} = \frac{u_i}{\sqrt{u_i \cdot u_i}} \tag{3.3.5}$$

parlem de *procés d'ortonormalització de Gram-Schmidt.*

Exemple 3.3.5. Vegem un exemple de com aplicar el procés d'ortogonalització de Gram-Schmidt en $\mathbb{R}^2$. Considerem els vectors $v_1 = (2,1)$ i $v_2 = (1,4)$. Aquests dos vectors són linealment independents i per tant formen una base de $\mathbb{R}^2$, però $v_1 \cdot v_2 = 6 \neq 0$ i per tant no són ortogonals. Prenem $u_1 := v_1 = (2,1)$ i $u_2 := v_2 - \mathrm{pr}_{u_1}(v_2) = v_2 - \mathrm{pr}_{v_1}(v_2)$. La projecció de v_2 en la direcció de v_1 és

$$\mathrm{pr}_{v_1}(v_2) = \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \frac{6}{5}(2,1). \tag{3.3.6}$$

Per tant, $u_2 = \frac{7}{5}(-1,2)$. És immediat comprovar que $\{u_1, u_2\}$ és una base ortogonal. Si volem definir ara una base ortonormal, només cal calcular

$$\begin{aligned} \|u_1\| &= \sqrt{(2,1)\cdot(2,1)} = \sqrt{5} \\ \|u_2\| &= \sqrt{\frac{7}{5}(-1,2)\cdot\frac{7}{5}(-1,2)} = \frac{7}{\sqrt{5}}. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Aleshores, si $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$ i $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$, la base $\{e_1, e_2\}$ és ortonormal.

Observació 3.3.6. El mètode de Gram-Schmidt funciona sobre qualsevol cos de característica $\neq 2$. Recordem que la característica d'un cos és el menor nombre de vegades que s'ha de sumar la identitat multiplicativa per a obtenir la identitat additiva.

Corol·lari 3.3.7. *Sigui $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal.*

1. *φ és un producte escalar si, i només si, hi ha una base en què la matriu de Gram de φ és la identitat.*
2. *Si φ és un producte escalar aleshores la matriu de Gram $\mathcal{G}(\varphi)$ de φ en qualsevol base satisfà $\det(\mathcal{G}(\varphi)) > 0$.*

Demostració. Si φ és un producte escalar, aleshores el mètode de Gram-Schmidt ens proporciona una base en què la matriu de Gram és la identitat. Recíprocament, si $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ és la identitat en certa base $\mathfrak{B}$, aleshores és clar que la forma bilineal φ és simètrica (per ser-ho la matriu de Gram). A més, per a tot parell $u, v \in E$, tenim

$$\varphi(u, v) = u^t \cdot v = \sum_i a_i b_i, \tag{3.3.8}$$

on $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ són les coordenades de u, v respectivament. En particular,

$$\varphi(u, u) = \sum_i a_i^2 \geq 0 \tag{3.3.9}$$

i $\varphi(u, u) = 0$ si, i només si, $a_i = 0$ per tot i, la qual cosa és equivalent a demanar que $u = 0$. Per tant, φ és definida positiva.

Per provar el segon punt. Sigui $\mathfrak{B}$ una base qualsevol i sigui $\mathfrak{B}'$ una base ortonormal. Aleshores, per la fórmula del canvi de base, existeix una matriu $\mathcal{P}$ amb $\det(\mathcal{P}) \neq 0$ tal que $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = \mathcal{P}^t \cdot I \cdot \mathcal{P}$ (ja que la matriu de Gram en la base ortonormal és la identitat). Prenent determinants obtenim

$$\det(\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)) = \det(\mathcal{P})^2 > 0. \tag{3.3.10}$$

■

Exemple 3.3.8. Considerem la forma bilineal $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que en certa base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ té matriu de Gram

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.3.11}$$

Aquesta matriu té determinant positiu (fins i tot és simètrica), però no representa un producte escalar ja que $\varphi(e_1, e_1) = 0$. Observem que els termes de la diagonal de la matriu de Gram d'un producte escalar $g_{ii} = \varphi(e_i, e_i)$ són sempre positius i això no es compleix en cap terme de la diagonal de la matriu de l'exemple. Ens podríem preguntar si les condicions $g_{ii} > 0$ són suficients, però resulta que no: per exemple, en $\mathbb{R}^4$ la forma bilineal simètrica φ que en la base canònica té per matriu de Gram

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.12}$$

satisfà que el determinant és positiu i també que ho són tots els termes de la diagonal. En canvi, no representa un producte escalar: $\varphi((1, -1, 0, 0), (1, -1, 0, 0)) = -2 < 0$.

Definició 3.3.9 (Submatriu $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)_r$). Sigui $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ la matriu de Gram d'una forma bilineal $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ en una base $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de E. Per a $r \geq 1$, denotarem per $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)_r$ la matriu obtinguda a partir de les primeres r files i r columnes de la matriu $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$. En altres paraules:

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)_r := \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1} & \cdots & g_{rr} \end{pmatrix}. \tag{3.3.13}$$

La matriu $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)_r$ també es pot interpretar com la matriu de la restricció de φ al subespai generat per $\{v_1, \ldots, v_r\}$

Si φ és definida positiva també ho serà la seva restricció a un subespai; per tant, es complirà que $\det(\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)_r) > 0$ per a tot $r \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposició 3.3.10. *Sigui $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica en E. Són equivalents:*
1. *La forma bilineal φ és definida positiva.*
2. *Per a tota base de E, la matriu de Gram $\mathcal{G}$ en aquesta base satisfà $\det(\mathcal{G}_r) > 0$, $\forall 1 \leq r \leq n$.*
3. *Existeix una base tal que la matriu de Gram $\mathcal{G}$ en aquesta base satisfà $\det(\mathcal{G}_r) > 0$, $\forall 1 \leq r \leq n$.*

3.4 Subespais ortogonals i relació amb el dual

3.4.1 Subespais ortogonals

Fixem un espai euclidià $(E, \cdot)$. Donat un conjunt S de vectors d'E, en definirem el subespai ortogonal $S^\perp$. Les propietats de $S^\perp$ són anàlogues a les propietats dels anul·ladors que vam definir per a l'espai dual.

Definició 3.4.1 (Subespai ortogonal). Donat un subconjunt S de E definim l'ortogonal de S com el conjunt de vectors ortogonals a tots els elements de S

$$S^\perp := \{x \in E \mid u \cdot x = 0, \forall u \in S\}. \tag{3.4.1}$$

Proposició 3.4.2. *Sigui S un subconjunt de E, on $(E, \cdot)$ és un espai vectorial Euclidià. Tenim que*
1. *$S^\perp$ és subespai vectorial d'E.*
2. *$S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.*
3. *Si $T \subseteq S$, aleshores $S^\perp \subseteq T^\perp$.*

Demostració. Siguin $x, y \in S^\perp$, o sigui $x \cdot u = y \cdot u = 0$, per a tot $u \in S$. Aleshores, $(x + y) \cdot u = x \cdot u + y \cdot u = 0$. Per tant, $x + y \in S^\perp$. Anàlogament, si $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $\lambda x \in S^\perp$. Pel que fa al tercer apartat, suposem que $F \subseteq G$ i que $x \in G^\perp$. Aleshores, x és ortogonal a tots els vectors de G, en particular ho és als d'F. Per tant, $x \in F^\perp$. ∎

Proposició 3.4.3. *Sigui $(E, \cdot)$ un espai vectorial Euclidià. Si F és un subespai vectorial d'E, aleshores:*
1. *$E = F \oplus F^\perp$.*
2. *$\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.*
3. *$(F^\perp)^\perp = F$.*

Demostració. És immediat veure que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Prenem una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de F i la completem a una base de E tal que $\{v_1, \ldots, v_k e_{k+1}, \ldots, e_n\}$. Apliquem ara el mètode de Gram-Schmidt per convertir aquesta base en una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$.

Observem que $u_j \in F^\perp$ quan $j \in \{k+1, \dots, n\}$. Per tant, qualsevol $v \in E$ es pot escriure de forma única com

$$v = (a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k) + (a_{k+1} u_{k+1} + \cdots + a_n u_n) \tag{3.4.2}$$

on el primer parèntesi pertany a F i el segon a $F^\perp$. Això prova que $E = F \oplus F^\perp$. La fórmula de les dimensions se segueix de la suma directa. És fàcil verificar que $F \subseteq (F^\perp)^\perp$. Per dimensions obtenim la igualtat d'espais vectorials. ■

Proposició 3.4.4. *Si F, G són dos subespais d'un subespai euclidià $(E, \cdot)$, aleshores*

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \ \textit{i}\ (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp. \tag{3.4.3}$$

Demostració. Per a la primera igualtat, provarem les dues inclusions. Si $x \in (F+G)^\perp$, aleshores $x(u+v) = 0$ per tot $u \in F$ i $v \in G$. En particular, si prenem $u = 0$ tenim que $xv = 0$ per tot $v \in G$, i si $v = 0$ obtenim que $xu = 0$ per a tot $u \in F$. Per tant, $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Per l'altra inclusió, suposem que $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Aleshores, $xu = 0$ per tot $u \in F$ i $xv = 0$ per a tot $v \in G$, la qual cosa implica que $x(u+v) = 0$ i, per tant, $x \in (F+G)^\perp$. Per provar la segona igualtat cal simplement aplicar la primera igualtat a $F^\perp$ i $G^\perp$:

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp = F \cap G. \tag{3.4.4}$$

Aplicant l'ortogonal a ambdós costats de la igualtat obtenim la igualtat buscada. ■

Proposició 3.4.5. *Si $S = \{u_1, \dots, u_s\}$ és un conjunt de vectors d'un espai euclidià, ortogonals dos a dos, aleshores aquest conjunt és linealment independent.*

Demostració. En efecte, si S és un conjunt de vectors diferents de $\overrightarrow{0}$ i ortogonals dos a dos, S és linealment independent. Si $\sum \lambda^i v_i = \overrightarrow{0}$ amb $v_i \in S$, per a cada v_k tenim

$$0 = \varphi(\sum \lambda^i v_i, v_k) = \sum \lambda^i \varphi(v_i, v_k) = \lambda^k \varphi(v_k, v_k). \tag{3.4.5}$$

Però $\varphi(v_k, v_k) \neq 0$, ja que $v_k \neq \overrightarrow{0}$. Per tant, $\lambda^k = 0, \forall k$, tal i com volíem. ■

Proposició 3.4.6. *Si (E, φ) és un espai vectorial Euclidià i $\{e_1, \dots, e_n\}$ és una base ortonormal $\mathfrak{B}$, aleshores les coordenades d'un vector $u \in E$ són $(\varphi(u, e_1), \dots, \varphi(u, e_n))$. En altres paraules,*

$$u = \sum_i a_i e_i, \ \textit{amb}\ a_i = \varphi(u, e_i). \tag{3.4.6}$$

Demostració. Si $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ és una base ortonormal, aleshores $u_1, \dots, u_n$ són unitaris i ortogonals dos a dos. De fet, la matriu del producte escalar φ és la matriu identitat tal que ens queda:

$$\varphi(u_i, u_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{3.4.7}$$

Sabent tot això, sigui $e_j \in \mathfrak{B}, j \in \{1, \dots, n\}$ i $v = \sum_i^n b_i e_i$. Aleshores, multipliquem a banda i banda per e_j i ens queda que $v \cdot e_j = \varphi(v, e_j) = e_j \cdot \sum_i^n b_i e_i$. Tenint en compte, per (3.4.7), que $\varphi(e_i, e_j) = 1 \iff i = j$, ens queda que $\varphi(v, e_j) = b_j$, tal i com volíem demostrar. ■

3.4.2 Espai dual

Definició 3.4.7. Sigui E un espai vectorial. Definim l'espai dual d'E com

$$E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K}). \tag{3.4.8}$$

I es compleix que $\dim E^* = \dim E \cdot \dim \mathbb{K} = \dim E$. Els elements d'$E$ són aplicacions lineals $\omega : E \longrightarrow \mathbb{K}$ i s'anomenen *formes lineals.*

Suposem que $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base d'E.

Definició 3.4.8 (Base d'E^*). Considerem n formes $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ linealment independents i que ens generin tot l'espai de les aplicacions d'E a $\mathbb{K}$. Definim:

$$e_i^*(e_k) := \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq k, \\ 1, & \text{si } i = k. \end{cases} \tag{3.4.9}$$

El conjunt de formes lineals $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ és una base d'E^* o base dual de $\mathfrak{B}$.

Donada una aplicació lineal $f : E \longrightarrow F$ i una forma lineal $\omega : F \longrightarrow \mathbb{K}$ de F, aleshores composant obtenim una forma lineal d'E: $\omega \circ f : E \longrightarrow \mathbb{K}$.

Definició 3.4.9 (Aplicació dual). Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal. Definim l'aplicació dual $f^* : F^* \longrightarrow E^*$ com $f^*(w) := \omega \circ f$.

Proposició 3.4.10. *Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal i $A = \mathcal{M}_{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2}(f)$ la matriu d'f en bases $\mathfrak{B}_1 = \{u_i\}$ i $\mathfrak{B}_2 = \{v_j\}$ d'E i de F respectivament. Aleshores, la matriu d'$f^* : F^* \longrightarrow E^*$ en les bases $\mathfrak{B}_2^*$ i $\mathfrak{B}_1^*$ és*

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{B}_2^*, \mathfrak{B}_1^*}(f^*) = A^t. \tag{3.4.10}$$

Definició 3.4.11 (Anul·lador). Sigui $A \subset E$ un subconjunt d'E. Es defineix l'anul·lador d'A com

$$A^0 := \{\omega \in E^* \mid \omega(e) = 0, \ \forall e \in F\}. \tag{3.4.11}$$

Proposició 3.4.12. *Se satisfan les condicions següents:*

1. *A^0 és un subespai vectorial d'E^*,*
2. *si $B \subseteq A$, aleshores $A^0 \subseteq B^0$,*
3. *si F és un subespai d'E, aleshores $\dim F^0 = \dim E - \dim F$.*

La següent definició ens servirà per justificar la definició de producte vectorial que treballem en aquesta assignatura.

Definició 3.4.13 (Φ). Si E té un producte escalar φ, podem definir l'aplicació:

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E & \longrightarrow & E^* \\ & u & \longmapsto & (\Phi(u))(v) := \varphi(u, v) = u \cdot v. \end{array} \tag{3.4.12}$$

Proposició 3.4.14. *Φ és un isomorfisme d'espais vectorials.*

Demostració. Hem de demostrar totes les condicions necessàries: Φ és ben definida, és lineal, és injectiva i exhaustiva.

1. $\Phi(u)$ és lineal, ja que:

$$\begin{aligned}(\Phi(u))(v_1+v_2) &= u\cdot(v_1+v_2) = u\cdot v_1 + u\cdot v_2 = (\Phi(u))v_1 + (\Phi(u))v_2,\\ (\Phi(u))(\lambda v) &= u\cdot(\lambda v) = \lambda(u\cdot v) = \lambda((\Phi(u))(v)),\ \forall\lambda\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

2. Φ és en ella mateixa lineal:

$$\begin{aligned}(\Phi(v_1+v_2))(v) &= (u_1+u_2)\cdot v = u_1\cdot v + u_2\cdot v = (\Phi(u_1))(v) + (\Phi(u_2))(v),\ \forall v\in E\\ (\Phi(\lambda u))(v) &= (\lambda u)\cdot v = \lambda(u\cdot v) = \lambda((\Phi(u))(v)) = (\lambda(u))(v),\ \forall v\in E.\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

3. Φ és injectiva: suposem que $\Phi(u)=0$. Aleshores, $(\Phi(u))(v)=0,\ \forall v\in E$, que vol dir que $u\cdot v=0,\ \forall v\in E$. En particular, $u\cdot u=0$ i això implica que $u=0$.
4. Φ és exhaustiva: $\mathrm{im}(\Phi)$ és un subespai vectorial d'E^*. Com que Φ és injectiva, tenim que $\dim\ker(\Phi)=0$ i, per tant, $\dim(\mathrm{im}(\Phi))=\dim E$. Com que $\dim E=\dim E^*$, resulta que $\dim(\mathrm{im}(\Phi))=\dim E^*$ i la inclusió $\mathrm{im}(\Phi)\subseteq E^*$ és una igualtat.

■

En definitiva, Φ porta el subespai ortogonal $F^\perp$ d'un subespai $F\subseteq E$ al subespai d'E^* incident a F:

$$\Phi(F^\perp) = \{f\in E^* \mid f=\Phi(u),\ u\in F^\perp\}. \tag{3.4.15}$$

Si $v\in F$, llavors $(\Phi(u))(v)=u\cdot v=0,\ \forall u\in F^\perp$ i això implica que $v\in F^{\perp\perp}=F$. Per tant,

$$\Phi(F^\perp) = \{f\in E^* \mid f(v)=0,\ \forall v\in F\}. \tag{3.4.16}$$

IV

Formes canòniques dels endomorfismes

Intentarem donar una base d'E en la qual la matriu de f en aquesta base sigui el més senzilla possible. Per exemple, veurem que tota matriu de mida 2×2 amb coeficients complexos és conjugada a una, i només una, d'aquestes dues matrius.

4.1 Polinomi mínim

E és un espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$. Fixem també un endomorfisme $f : E \longrightarrow E$. Ens interessa principalment la situació en què E té dimensió finita n. A partir del nostre endomorfisme f i d'un polinomi arbitrari $P(t)$ definirem un nou endomorfisme $P(f)$. Per això, utilitzarem potències de f:

$$f^0 = \mathbb{I},\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f, \dots, f^r = f \circ f^{r-1}. \tag{4.1.1}$$

Notem que si $n = \dim E$, aleshores $\dim \operatorname{End}(E) = n^2$ i per tant, les potències d'un endomorfisme f no poden ser totes linealment independents.

Definició 4.1.1 (Endomorfisme $P(f)$). Sigui $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m \in \mathbb{K}[t]$ un polinomi amb coeficients en $\mathbb{K}$. Definim l'endomorfisme $P(f) : E \longrightarrow E$ com

$$P(f) := a_0 f^0 + a_1 f^1 + \cdots + a_m f^m. \tag{4.1.2}$$

Exemple 4.1.2. Considerem $P(t) = t - \lambda$. Aleshores, $P(f) = f - \lambda\mathbb{I}$. Si $Q(t) = (t-2)(t-1) = t^2 - 3t + 2$, aleshores $Q(f) = f^2 - 3f + 2\mathbb{I}$.

Proposició 4.1.3. *Si $P(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t]$ són dos polinomis, aleshores:*

1. $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$, $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.
2. *Els endomorfismes $P(f)$ i $Q(f)$ commuten: $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.*

Definició 4.1.4. L'aplicació Φ_f

$$\begin{array}{llcl} \Phi_f : & \mathbb{K}[t] & \longrightarrow & \operatorname{End}(E) \\ & P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m & \longmapsto & \Phi_f(P(t)) := P(f) = a_0 f^0 + a_1 f^1 + \cdots + a_m f^m \end{array} \tag{4.1.3}$$

En aquesta aplicació, com veiem, s'envia tot polinomi $P(t)$ a l'endomorfisme $P(f)$ definit anteriorment.

Proposició 4.1.5. *L'aplicació Φ_f és lineal i hi ha un polinomi $M(t) \in \mathbb{K}[t]$ tal que* $\ker(\Phi_f) = \{P(t) \in \mathbb{K}[t] \mid P(t) = Q(t)M(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t]\}$. *En altres paraules, el nucli ve donat pel conjunt de múltiples d'$M(t)$. A més, si E té dimensió finita es té $M(t) \neq 0$.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ La linealitat de Φ_f se segueix de la proposició anterior. Per tant, el seu nucli és un subespai vectorial. Si $\ker(\Phi_f) \neq \{0\}$, escollim un polinomi $M \neq 0$ de $\ker(\Phi_f)$ de manera que sigui de mínim grau entre tots els polinomis no nuls de $\ker(\Phi_f)$. Vegem que $\ker(\Phi_f) = (M)$, on (M) és l'ideal generat pel conjunt de múltiples d'M. En efecte, $(M) \subset \ker(\Phi_f)$ per la proposició anterior.

$\Longleftarrow$ Si $P(f)$ =)0, sigui $P(t) = Q(t)M(t) + R(t)$ la divisió entera de P entre M. Aleshores, $R(f) = P(f) - Q(f) \circ M(f) = 0$ i, per tant, $R(t) \in \ker(\Phi_f)$ i té grau menor que $M(t)$, d'on deduïm que $R = 0$ i $P(t) \in (M)$.

Si E té dimensió finita, aleshores $\mathrm{End}(E)$ també és de dimensió finita, i com que l'espai vectorial $\mathbb{K}[t]$ no és de dimensió finita, l'aplicació Φ_f no pot ser injectiva, la qual cosa implica que $\ker(\Phi_f) \neq \{0\}$. ■

Observació 4.1.6 (Ideal). Com ja esmentàvem abans, la notació $(M(t))$ on $M(t)$ és un polinomi indica l'ideal generat per aquest polinomi; és a dir, tots els polinomis de la forma $Q(t)M(t)$, amb $Q(t)$ polinomis qualssevol. Observem que si $R(t)$ és un polinomi qualsevol i $P(t) \in (M(t))$ aleshores $R(t)P(t) \in (M(t))$.

Definició 4.1.7 (Polinomi anul·lador). Els elements de $\ker(\Phi_f)$ s'anomenen polinomis anul·ladors d'f.

Definició 4.1.8 (Polinomi mínim). Si E té dimensió finita, el polinomi mínim de f és l'únic polinomi anul·lador $\mu_f(t)$ que satisfà $\ker(\Phi_f) = (\mu_f(t))$ i tal que el coeficient del terme de major grau és 1.

Exemple 4.1.9. Suposem que $E = \{0\}$ i $f = 0$ és l'únic endomorfisme d'E. Aleshores, tot polinomi $P(t)$ va a parar a l'endomorfisme trivial i per tant, $\ker(\Phi_f) = \mathbb{K}[t]$. D'aquí, deduïm que el polinomi mínim és $\mu_f(t) = 1$.

El polinomi mínim està estretament relacionat amb el polinomi característic.

Proposició 4.1.10. *Si E té dimensió finita, tota arrel del polinomi característic d'f és una arrel del polinomi mínim.*

Demostració. Sigui $\mu_f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$. Si λ és una arrel de $p_f(t)$, aleshores hi ha $0 \neq v \in E$ tal que $f(v) = \lambda v$. Per tant, tenim que $f^i(v) = \lambda^i v$ per a tot i. Deduïm, doncs, que

$$0 = \mu_f(t)v = a_0 v + a_1 f(v) + \cdots + a_m f^m(v) = a_0 v + a_1 \lambda v + \cdots + \lambda^m v = \mu_f(\lambda)v. \tag{4.1.4}$$

Com que $v \neq 0$, resulta $\mu_f(\lambda) = 0$ i, per tant, λ és arrel de $\mu_f(t)$. ■

4.2 Subespais invariants

Definició 4.2.1 (Invariant per l'acció d'A). Si A és una matriu de mida $n \times n$ que descompon en blocs de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{4.2.1}$$

on A_1 és la matriu $n_1 \times n_1$ i A_2 és una matriu $n_2 \times n_2$ amb $n = n_1 + n_2$ els subespais E_1 i E_2 de $\mathbb{K}^n$, generats respectivament pels n_1 primers vectors de la base canònica i pels últims n_2 vectors de la base canònica de $\mathbb{K}^n$ són *invariants de l'acció d'A*. És a dir, es té $Av \in E_i, \forall v \in E_i$.

Definició 4.2.2 (Subespai f-invariant). Diem que un subespai F d'E és invariant per f, o f-invariant, si $f(F) \subset F$.

Definició 4.2.3 (Restricció de f en F). En un subespai f-invariant, f indueix un endomorfisme d'F que denotarem per $f|_F$. Es té: $f|_F(v) := f(v), \forall v \in F$. En particular, $f|_F$ és un endomorfisme tal que

$$f' = f|_F : \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & F \\ v & \longmapsto & f(v) \end{array} \tag{4.2.2}$$

i anomenarem *restricció de f en F*.

Proposició 4.2.4. *Sigui $F \subseteq E$ un subespai f-invariant i sigui $f' := f|_F$ la restricció de f a F. Aleshores, el polinomi mínim $\mu_{f'}(t)$ de f' divideix el polinomi mínim $\mu_f(t)$ de f.*

Demostració. Recordem que $\mu_f(t)$ és un element del nucli de l'aplicació Φ_f que envia un polinomi $P(t)$ a l'endomorfisme $P(f)$ d'E. En particular, sabem que $\mu_f(f) = 0$. Això implica que $\mu_f(f)(u) = 0, \forall u \in E$ i, per tant, es té que $\mu_f(f')(v) = \mu_f(f)(v) = 0, \forall v \in F$. Per tant, el polinomi $\mu_f(x)$ és un element del nucli de l'aplicació que envia un polinomi $P(t)$ a l'endomorfisme $P(f')$ de F. Per tant, $\mu_f(t)$ és un múltiple de $\mu_{f'}(t)$. ■

Corol·lari 4.2.5. *Siguin $F, G \subseteq E$ dos subespais f-invariants. Si les restriccions a F i a G tenen polinomis mínims primers entre ells, aleshores $F \cap G = \{0\}$.*

Demostració. Si F, G són f-invariants, aleshores també ho és $F \cap G$ i, per la proposició anterior, 4.2.4, el seu polinomi mínim és 1 (ja que per la proposició, sabem que el polinomi mínim de la restricció a $F \cap G$ divideix els polinomis mínims de les restriccions a F i G, respectivament), però per hipòtesi aquests són primers entre ells. Anem a veure que H és un espai vectorial i g és un endomorfisme tal que $\mu_g(t) = 1$, aleshores $H = \{0\}$. En efecte, en aquest cas la proposició 4.1.5 ens diu que $\ker(\Phi_g) = (1) = \mathbb{K}[t]$ i, per tant, Φ_g és l'aplicació lineal $\Phi_g = 0$. En paritcular, $0 = \Phi_g(1) = \mathbb{I}_H$ i, per tant, $H = \{0\}$. Aplicant aquest resultat a $H = F \cap G$ obtenim el corol·lari. ■

Proposició 4.2.6. *Si $P(t)$ és un polinomi, aleshores els subespais $\ker(P(f))$ i $\operatorname{im}(P(f))$ d'E són subespais f-invariants.*

Demostració. Això es pot reescriure com: *si $f : V \longrightarrow V$ és lineal, aleshores, per cada polinomi $P[x]$ els subespais $\operatorname{im} P(f)$ i $\ker P(f)$ són f-invariants.* Per a aquesta demostració usarem una observació, la següent:

Observació 4.2.7. Per a cada polinomi P tenim que $f \circ P(f) = P(f) \circ f$.

Suposem $\lambda \in \ker P(f)$. Considerem l'expressió $P(f)(f(\lambda))$. D'aquí és fàcil veure que $P(f)(f(\lambda)) = f(P(f)(\lambda))$, i $P(f)(\lambda) = 0$, concretament $f(\lambda) \in \ker P(f)$, per hipòtesi. Així doncs, $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Hem deduït que $\ker P(f) \subset \ker f$. Anàlogament, suposem $\lambda = p(f)(\mu) \in \operatorname{im} P(f)$. Aleshores, apliquem f a ambdós costats de la igualtat i ens queda $f(\lambda) = f(p(f)(\mu)) = p(f)(f(\mu))$ per linealitat, d'on $f(\lambda) \in \operatorname{im} P(f)$. ■

Proposició 4.2.8. *Sigui $\mu_f(t) = P(t)Q(t)$ amb P, Q primers entre ells. Aleshores,*

$$E = \ker(P(f)) \oplus \ker(Q(f)). \tag{4.2.3}$$

A més, el polinomi mínim de la restricció d'f a $\ker(P(f))$ és $P(t)$, i el polinomi mínim de la restricció a f a $\ker(Q(f))$ és $Q(t)$. [CL09]

Demostració. Els polinomis $P(t)$ i $Q(t)$ són anul·ladors de $\ker(P(f))$ i $\ker(Q(f))$, respectivament. Per tant, per la proposició 4.1.5 i com que $P(t)$ i $Q(t)$ són primers entre ells, sabem que els polinomis mínims de les restriccions a $\ker(P(f))$ i $\ker(Q(f))$, respectivament, són primers entre ells. Per tant, podem aplicar el corol·lari 4.2.5 i afirmar que $\ker(P(f)) \cap \ker(Q(f)) = \{0\}$. D'altra banda, és fàcil veure que $\operatorname{im}(Q(f)) \subset \ker(P(f))$ i $\operatorname{im}(P(f)) \subset \ker(Q(f))$. Comprovem la primera inclusió: si $u = Q(f)(v) \in \operatorname{im}(Q(f))$ aleshores es té $P(f)(u) = P(f)Q(f)(v) = \mu_f(f)(v) = 0$ i, per tant, $u \in \ker(P(f))$. Suposant $n = \dim E$, aquestes inclusions ens indiquen que

$$\begin{aligned} n = \dim\ker(P(f)) + \dim\operatorname{im}(P(f)) &\leq \dim\ker(P(f)) + \dim\ker(Q(f)) \\ &= \dim(\ker(P(f)) \oplus \ker(Q(f))) \leq n. \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Les dues inclusions són, doncs, igualtats i ens queda $E = \ker(P(f)) \oplus \ker(Q(f))$. Sigui ara f' la restricció d'f a $\ker(P(f))$ i f'' la restricció a $\ker(Q(f))$. Com que $P(t)$ i $Q(t)$ són anul·ladors de f' i f'', respectivament, sabem que $\mu_{f'}(t)$ divideix $P(t)$ i que $\mu_{f''}(t)$ divideix $q(t)$. D'altra banda, el polinomi $\mu_{f'}(t) \cdot \mu_{f''}(t)$ és un polinomi anul·lador de f. En efecte, usant la descomposició $E = \ker(P(f)) \oplus \ker(Q(f))$ podem escriure tot vector d'E com $u = u_1 + u_2$ de forma única, on $u_1 \in \ker(P(f))$ i $u_2 \in \ker(Q(f))$ i obtenim que

$$\mu_{f'}(f)\mu_{f''}(f)(u) = \mu_{f''}(f)\mu_{f'}(f)(u_1) + \mu_{f'}(f)\mu_{f''}(f)(u_2) = 0 + 0 = 0. \tag{4.2.5}$$

Per tant, sabem que $\mu_{f'}(t)\mu_{f''}(t)$ és múltiple de $P(t)Q(t)$. Juntament amb el fet que $\mu_{f'}(t) \mid P(t)$ i $\mu_{f'}(t) \mid Q(t)$, deduïm que $\mu_f(t)\mu_{f''}(t) = \mu_f(t)$. Així doncs, ens queda que $\mu_{f'}(t) = P(t)$ i $\mu_{f''}(t) = Q(t)$. ■

Naturalment, si ara $P(t)$ o $Q(t)$ descompon en factors primers, podem descompondre $\ker(P(f))$ o $\ker(Q(f))$ en suma de subespais invariants i procedir iterativament amb aquest mètode tantes vegades com sigui possible. Ho enunciem de la següent manera:

Teorema 4.2.9 (Primer teorema de descomposició). *Si el polinomi mínim de f és*

$$\mu_f(t) = \mu_1(t)^{n_1} \cdots \mu_r(t)^{n_r} \tag{4.2.6}$$

on $\mu_i(t)$ són factors irreductibles de $\mu_f(t)$ aleshores es té una descomposició en subespais f-invariants tal que

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r, \tag{4.2.7}$$

on $E_i = \ker(\mu_i(f)^{n_i})$ i el polinomi mínim de la restricció de f a E_i és $\mu_i(t)^{n_i}$. A més, aquesta és la única descomposició d'E com a suma directa de subespais f-invariants que satisfà aquesta propietat.

Demostració. Per la proposició 4.2.8 obtenim una descomposició com la que queda enunciada en aquest teorema. Per tant, només cal provar la unicitat de la descomposició. Suposem que donada la següent descomposició en subespais invariants $E = E^1 \oplus \cdots \oplus E^r$ de forma que el polinomi mínim de la restricció de f a F_i té polinomi mínim $\mu_i(t)^{n_i}$. Aquesta darrera condició ens implica que $F_i \subseteq \ker(\mu_i(f)^{n_i})$. Mirant les dimensions, tenim que

$$n = \dim F_1 + \cdots + \dim F_r \leq \dim\ker(\mu_1(f)^{n_1}) + \cdots + \dim\ker(\mu_r(f)^{n_r}) = n. \tag{4.2.8}$$

Totes les desigualtats de (4.2.8) han de ser igualtats i, finalment, obtenim que $F_i = \ker(\mu_i(f)^{n_i})$, $i = 1, \ldots, r$. ■

Observació 4.2.10. Si escrivim la matriu A d'f en una base E formada per les bases de cadascun dels subespais E_i, aleshores obtenim una matriu diagonal a blocs, de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}, \tag{4.2.9}$$

on A_i és la matriu de $f|_{E_i}$ en la base d'E_i (aquí, les matrius A_i són matrius quadrades de mida $\dim E_i \times \dim E_i$ i els zeros indiquen matrius trivials de la mida que els correspongui). Per tant, veiem que l'estudi d'A es redueix a l'estudi individual de cada bloc A_i.

Exemple 4.2.11. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorfisme d'$\mathbb{R}^2$ en què la base canònica té per matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}. \tag{4.2.10}$$

Calculant iterativament les potències d'A tenim que $A^2 = \mathbb{I}_2$. Així doncs, $A^3 = A$ i $A^4 = \mathbb{I}_2$, i així successivament. Per tant, podem deduir fàcilment que el polinomi $P(t) = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$ és un polinomi anul·lador d'f. Suposem diversos casos:

1. $\mu_f(t) = (t-1)$: aleshores, $\mu_f(f) = f - \mathbb{I}_2 = 0$, d'on deduïm que $f = \mathbb{I}_2$.
2. $\mu_f(t) = (t+1)$: aleshores, $f = -\mathbb{I}_2$.

Com que, clarament, aquestes conclusions no són certes, cal que $P(t) \mid \mu_f(t)$. Per tant, tenim que $\mu_f(t) = P(t) = (t-1)(t+1)$. Usant 4.2.9 (ITD), podem escriure $E = E_1 \oplus E_2$, on $E_1 = \ker(f - \mathbb{I}) = \langle(1,-1)\rangle$ i $E_2 = \ker(f + \mathbb{I}) = \langle(1,-3)\rangle$. La restricció de f a E_1 és $\mathbb{I}$, mentre que la restricció de f a E_2 és $-\mathbb{I}$. Per tant, la matriu de f en la base $\{(1,-1),(1,-3)\}$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.2.11}$$

Veiem que, en aquest cas, E_1 i E_2 no són més que els subespais propis 1 i -1, respectivament.

Definició 4.2.12 (Involució). Sigui un endomorfisme $f : E \longrightarrow E$ d'un espai vectorial E. f és una *involució* si $f^2 = \mathbb{I}$.

Exemple 4.2.13. Com a generalització de l'exemple anterior, considerem una involució f d'un espai E, tal que $\dim E = n$. Aleshores, com en l'exemple anterior, $\mu_f(t) \mid (t^2-1) = (t+1)(t-1)$ és un polinomi anul·lador d'f i dividirem en els següents casos:

1. $\mu_f(t) = (t-1)$: aleshores, $f = \mathbb{I}$.
2. $\mu_f(t) = (t+1)$: aleshores, $f = -\mathbb{I}$.
3. $\mu_f(t) = (t+1)(t-1)$: aleshores, $E = E_1 \oplus E_2$, on el polinomi mínim de la restricció $f|_{E_1}$ és $(t-1)$ i el polinomi mínim de la restricció $f|_{E_2}$ és $(t+1)$. Per tant, la restricció $f|_{E_1}$ és $\mathbb{I}$ i la restricció $f|_{E_2}$ és $-\mathbb{I}$. Prenent la unió de les bases de E_1 i E_2, la matriu de f en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k_1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{k_2} \end{pmatrix}, \tag{4.2.12}$$

on k_1, k_2 són les dimensions d'E_1 i E_2, respectivament.

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \ddots\\ 1\end{array}}\right\} r \text{ files} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}-1\\ \ddots\\ -1\end{array}}\right\} n-r \text{ files.} \end{array}$$

Figura 4.1: Descomposant $\mathbb{I}_{k_2}$ i $\mathbb{I}_{k_1}$ ens quedaria una matriu tal que així. Font: [CL09]

Definició 4.2.14 (Estructura complexa en E). Sigui un espai vectorial E complex. Un endomorfisme f d'E és una *estructura complexa en* E si f compleix que $f \circ f = -\mathbb{I}$ i, a més, hi ha una base tal que la matriu d'f en aquesta base és diagonal amb $\pm i$ a la diagonal.

Proposició 4.2.15. *Si k és un valor propi de f, aleshores $(t-k) \mid \mu_f(t)$.*

Teorema 4.2.16 (Teorema de diagonalització). *Un endomorfisme és diagonalitzable si, i només si, el seu polinomi mínim descompon en factors lineals no repetits.*

Demostració.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Provem primer que si $\mu_f(t) = (t-a_1)\cdots(t-a_r)$ amb $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$, aleshores f és diagonalitzable. Recordem primer que per la proposició 4.1.10, tot valor propi és arrel de $\mu_f(t)$. Per 4.2.9 (PTD), podem escriure $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$, on $E_i = \ker(f - a_i\mathbb{I})$. Observem que E_i no és més que el subespai propi de valor propi a_i (a més, si a_i no és valor propi, aleshores per definició de valor propi $E_i = \{0\}$). Per tant, sabem que existeix una base de vectors propis d'E formada per la unió de les bases d'E_i.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Ara ens toca suposar que f és diagonalitzable. Així, siguin $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ els valors propis d'f. Sabem que E és suma directa d'espais propis tal que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s$, on E_i és el subespai propi de valor propi λ_i. El polinomi mínim d'f restringida a E_i és justament $(t-\lambda_i)$. Això implica que el polinomi $P(t) := (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_s) \mid \mu_f(t)$. Per veure que $\mu_f(t) = P(t)$ solament cal demostrar que $P(t)$ és anul·lador de f. Donat $u \in E$, prenem la descomposició formada per la suma directa $u = u_1 + \cdots + u_s, u_s \in E_i$ i prenem $(f-\lambda_1\mathbb{I})\cdots(f-\lambda_s\mathbb{I})(u)$.

$$\begin{aligned} &(f-\lambda_1\mathbb{I})\cdots(f-\lambda_s\mathbb{I})(u) \\ &= (f-\lambda_2\mathbb{I})\cdots(f-\lambda_s\mathbb{I})(f-\lambda_1\mathbb{I})(u_1) \\ &+ (f-\lambda_1\mathbb{I})(f-\lambda_3\mathbb{I})\cdots(f-\lambda_s\mathbb{I})(f-\lambda_2\mathbb{I})(u_2) + \cdots + \\ &+ (f-\lambda_1\mathbb{I})\cdots(f-\lambda_s\mathbb{I})(u_s) = \overrightarrow{0} + \cdots + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}. \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Com a nota final, es pot donar un cop d'ull a la demostració oferta a [CL09]. ∎

V

Espais afins euclidians

5.1 Projecció ortogonal

5.1.1 Definició

Sigui E un espai vectorial amb producte escalar. Sigui F un subespai d'E i sigui $v \in E$. Com que $E = F \oplus F^\perp$, podem escriure $v = v_F + w$ de manera única amb $v_F \in F$ i $w \in F^\perp$. El vector v_F s'anomena *projecció ortogonal de v sobre F*.

5.1.2 Càlcul de projeccions

Proposició 5.1.1. *Sigui $e_1, \dots, e_k$ una base ortonormal d'F. Aleshores,*

$$\mathrm{pr}_F(v) = (v \cdot e_1)e_1 + \cdots + (v \cdot e_k)e_k. \tag{5.1.1}$$

Demostració. Ampliem $e_1, \dots, e_k$ a una base ortonormal $e_1, \dots, e_n$ d'E. Escrivim v en components:

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1} + \cdots + x_n e_n. \tag{5.1.2}$$

D'altra banda, $x_1 = v \cdot e_1, \dots, x_k = v e_k$, ja que la base $e_1, \dots, e_n$ és ortonormal. ■

Observació 5.1.2. Observem que $(v \cdot e_i)e_i$ és la projecció ortogonal de v sobre $\langle e_i \rangle$.

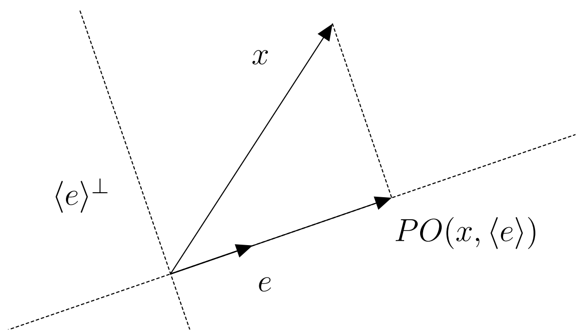
Demostració alternativa de Cauchy-Schwarz. Posem $F = \langle v \rangle = \langle e_1 \rangle$ amb $\|e_1\| = 1$. Llavors,

$$\mathrm{pr}_F(u) = (u \cdot e_1)e_1 = \left(u \cdot \frac{v}{\|v\|}\right) \frac{v}{\|v\|} = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v. \tag{5.1.3}$$

Pel teorema de Pitàgores, $\|\mathrm{pr}_F(u)\|^2 + \|u - \mathrm{pr}_F(u)\|^2 = \|u\|^2$. Aleshores,

$$\begin{aligned} 0 \le \|u - \mathrm{pr}_F(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|\mathrm{pr}_F(u)\|^2 = \|u\|^2 - \frac{(u \cdot v)^2}{\|v\|^4}\|v\|^2 \\ \|u\|^2 - \frac{(u \cdot v)^2}{\|v\|^2} \implies |u \cdot v| \le \|u\| \cdot \|v\|. \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

■



5.2 Producte vectorial

Volem relacionar el producte vectorial i l'espai dual, ja que la definició del primer no és sinó conseqüència del segon. De fet, tota convergència sorgeix del següent fet:

Proposició 5.2.1. *Tot producte escalar en un espai vectorial E defineix un isomorfisme canònic $E \simeq E^*$, on E^* és l'espai dual d'E.*

5.2.1 Producte vectorial

Sigui E un espai vectorial amb un producte escalar tal que $\dim E = 3$. Fixem també una base ortonormal e_1, e_2, e_3 d'E.

Teorema 5.2.2. *Donats $u, v \in E$, existeix un únic vector $u \wedge v$ tal que*

$$(u \wedge v) \cdot w = \det_{e_i}(u, v, w), \ \forall w \in E. \tag{5.2.1}$$

Demostració. Donada la base ortonormal fixada i dos vectors $u, v \in E$, podem definir una aplicació $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(w) = \det_{e_i}(u, v, w)$. Aquesta aplicació és lineal, ja que

$$\begin{aligned} f(w_1, w_2) &= \det_{e_i}(u, v, w_1 + w_2) = \det_{e_i}(u, v, w_1) + \det_{e_i}(u, v, w_2) = f(w_1) + f(w_2). \\ f(\lambda w) &= \det_{e_i}(u, v, \lambda w) = \lambda \det_{e_i}(u, v, w) = \lambda f(w), \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Per tant, $f \in E^*$. Aleshores, existeix un únic vector d'E, que denotem per $u \wedge v$, tal que

$$(\Phi(u \wedge v))(w) = (u \wedge v) \cdot w, \ \forall w \in E. \tag{5.2.3}$$

■

Definició 5.2.3 (Producte vectorial). El producte vectorial d'u i v és una operació bilineal que retorna el vector $u \wedge v$, el qual té les següents propietats:

1. $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$;
2. $(\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $u \wedge (v_1 + v_2) = u \wedge v_1 + u \wedge v_2$;
4. $u \wedge (\lambda v) = \lambda(u \wedge v), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Demostració. Donat $w \in E$ qualsevol, tenim per 5.2.2 que

$$\begin{aligned} ((u_1 + u_2) \wedge v) \cdot w &= \det(u_1 + u_2, v, w). \\ (u_1 \wedge v + u_2 \wedge v) \cdot w &= (u_1 \wedge v) \cdot w + (u_2 \wedge v) \cdot w \xrightarrow{\det(u_1,v,w)+\det(u_2,v,w)} \det(u_1 + u_2, v, w). \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Per tant, $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$. Les altres igualtats es demostren per analogia. ■

Propietat 5.2.4 (Altres propietats del producte vectorial).

1. *$v \wedge u = -(u \wedge v), \ \forall u, v \in E$.*
2. *$u \wedge v$ és ortogonal a u i a v.*

3. *$u \wedge u = 0$, $\forall u \in E$.*
4. *$u \wedge v = 0 \iff u, v$ són linealment dependents.*
5. *Si $u \wedge v \neq 0$, aleshores $\langle u \wedge v \rangle = \langle u, v \rangle^{\perp}$.*
6. *$e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$.*
7. *Donats $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ i $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ tenim que*

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix}. \tag{5.2.5}$$

8. *$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$.*
9. *$(u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = 0$ (identitat de Jacobi).*
10. *$(u_1 \wedge u_2) \cdot (v_1 \wedge v_2) = (u_1 \cdot v_1)(u_2 \cdot v_2) - (u_1 \cdot v_2)(u_2 \cdot v_1)$.*
11. *Donats u, v no nuls, $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ tal que*

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\| &= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin(\theta) \\ u \cdot v &= \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Demostració. Ho dividirem en 11 demostracions diferents, una per cada apartat.

1. Donat $w \in E$ qualsevol, aplicant les propietats dels determinants:

$$-(u \wedge v) \cdot w = -\det(u, v, w) = \det(v, u, w). \tag{5.2.7}$$

2. És directe donat que el determinant d'una matriu amb dues columnes iguals és 0:

$$\begin{aligned} (u \wedge v) \cdot u = \det(u, v, u) = 0, \\ (u \wedge v) \cdot v = \det(u, v, v) = 0. \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

3. Com que $v \wedge u = -(u \wedge v)$, $u \wedge u = -(u \wedge u) \iff 2(u \wedge u) = 0 \iff u \wedge u = 0$.
4. Si $v = \lambda u$, aleshores $u \wedge v = u \wedge (\lambda u) = \lambda(u \wedge u) = 0$. Recíprocament, si $u \wedge v = 0$ llavors $\det(u, v, w) = 0$, $\forall w \in E$ i això implica que u, v són linealment dependents. En cas contrari, podríem escollir w tal que u, v, w fos una base de E i, per tant, $\det(u, v, w) \neq 0$.
5. Com que $(u \wedge v) \cdot u = 0$ i $(u \wedge v) \cdot v = 0$, tenim que $\langle u \wedge v \rangle \subseteq \langle u, v \rangle^{\perp}$. Ara bé, si $u \wedge v \neq 0$, u, v són linealment independents i $\dim\langle u, v \rangle = 2$. Així doncs, $\dim\langle u, v \rangle = \dim\langle u, v \rangle^{\perp}$ i, per tant, la inclusió ha de ser igualtat.
6. $e_1 \wedge e_2 \in \langle e_1, e_2 \rangle^{\perp} = \langle e_3 \rangle$, ja que la base e_1, e_2, e_3 és ortonormal per hipòtesi. Per tant, $e_1 \wedge e_2 = \lambda e_3$ per a algun $\lambda \in \mathbb{R}$. A més,

$$\lambda = (\lambda e_3) \cdot e_3 = (e_1 \wedge e_2) \cdot e_3 = \det_{e_i}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{5.2.9}$$

Les altres dues igualtats es demostren de la mateixa manera, tenint en compte que

$$\det_{e_i}(e_2, e_3, e_1) = \det_{e_i}(e_3, e_1, e_2) = 1. \tag{5.2.10}$$

7. Per bilinealitat, tenim:

$$\begin{aligned} u\wedge v &= (x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)\wedge(y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3) = x_1y_1e_1\wedge e_1+x_1y_2e_1\wedge e_2+x_1y_3e_1\wedge e_3 \\ &+ x_2y_1e_2\wedge e_1 + x_2y_2e_2\wedge e_2 + x_2y_3e_2\wedge e_3 + x_3y_1e_3\wedge e_1 + x_3y_2e_3\wedge e_2 + x_3y_3e_3\wedge e_3 \\ &= (x_1y_2-x_2y_1)e_3-(x_1y_3-x_3y_1)e_2+(x_2y_3-x_3y_2)e_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2\end{vmatrix} e_3 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3\end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3\end{vmatrix} e_1 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

8. Si $u\wedge v=0$, llavors u, v són linealment dependents. Si $v=\lambda u$, llavors:

$$(u\cdot w)(\lambda u) - ((\lambda u)\cdot w)u = \lambda(u\cdot w)u - \lambda(u\cdot w)u = 0. \tag{5.2.12}$$

Si $u\wedge v\neq 0$, aleshores $(u\wedge v)\wedge w\in\langle u\wedge v\rangle^{\perp} = \langle u, v\rangle$. Per tant, $(u\wedge v)\wedge w = \alpha u+\beta v,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Per determinar-los, fem el següent:

$$\begin{gathered} \left.\begin{aligned} u &= (x_1,x_2,x_3), \\ v &= (y_1,y_2,y_3), \\ w &= (z_1,z_2,z_3) \end{aligned}\right\} \quad u\wedge v = (x_2y_3-x_3y_2, x_3y_1-x_1y_3, x_1y_2-x_2y_1). \\ (u\wedge v)\wedge e_1 = (0, x_1y_2-x_2y_1, -x_3y_1+x_1y_3) = -y_1(x_1,x_2,x_3)+x_1(y_1,y_2,y_3), \\ (u\wedge v)\wedge e_2 = (-x_1y_2+x_2y_1, 0, x_2y_3-x_3y_2) = -y_2(x_1,x_2,x_3)+x_2(y_1,y_2,y_3), \\ (u\wedge v)\wedge e_3 = (x_3y_1-x_1y_3, -x_2y_3+x_3y_2, 0) = -y_3(x_1,x_2,x_3)+x_3(y_1,y_2,y_3). \end{gathered} \tag{5.2.13}$$

En tots tres casos es compleix que $(u\wedge v)\wedge w = -(v\cdot w)u+(u\cdot w)v$. Com que tots dos membres de la igualtat depenen linealment de w, és suficient haver comprovat la igualtat en una base.

9. Aplicant que $(u\wedge v)\wedge w = (u\cdot w)v-(v\cdot w)u$, tenim:

$$\left.\begin{aligned} (u\wedge v)\wedge w &= (u\cdot w)v-(v\cdot w)u \\ (v\wedge w)\wedge u &= (v\cdot u)w-(w\cdot u)v \\ (w\wedge u)\wedge v &= (w\cdot v)u-(u\cdot v)w \end{aligned}\right\} (u\wedge v)\wedge w+(v\wedge w)\wedge u+(w\wedge u)\wedge v = 0. \tag{5.2.14}$$

10. Primerament, $(u_1\wedge u_2)\cdot(v_1\wedge v_2) = \det(u_1,u_2,v_1\wedge v_2)$. Ara operem:

$$\begin{aligned} \det(v_1\wedge v_2, u_1, u_2) &= ((v_1\wedge v_2)\wedge u_1)\cdot u_2 = ((v_1\cdot u_1)v_2-(v_2\cdot u_1)v_1)\cdot u_2 \\ &= (u_1\cdot v_1)(u_2\cdot v_2)-(u_1\cdot v_2)(u_2\cdot v_1). \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

11. Apliquem la fórmula anterior:

$$\|u\wedge v\|^2 = (u\wedge v)\cdot(u\wedge v) = (u\cdot u)(v\cdot v)-(u\cdot v)(v\cdot u) = \|u\|^2\|v\|^2-(u\cdot v)^2. \tag{5.2.16}$$

Si definim $a=\frac{\|u\wedge v\|}{\|u\|\cdot\|v\|}$ i $b=\frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$, aleshores,

$$a^2+b^2 = \frac{\|u\wedge v\|^2+(u\cdot v)^2}{\|u\|^2\|v\|^2} = 1. \tag{5.2.17}$$

Per tant, $a=\sin(\theta),\ b=\cos(\theta)$ per a algun θ. A més, $a\geq 0 \implies 0\leq\theta\leq\pi$.

■

Observació 5.2.5. Cal tenir en compte que el producte vectorial no és associatiu. Per exemple,

$$\begin{aligned} e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) &= e_1 \wedge e_3 = -e_2, \\ (e_1 \wedge e_1) \wedge e_2 &= 0 \wedge e_2 = 0. \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

Falta discutir com depèn el producte vectorial de la base ortonormal e_1, e_2, e_3 escollida al principi. Sigui u_1, u_2, u_3 una altra base ortonormal. Llavors:

$$\det_{e_i}(u, v, w) = \det_{e_i}(u_1, u_2, u_3) \cdot \det_{e_i}(u, v, w), \ \forall u, v, w \in E. \tag{5.2.19}$$

Escrivim els vectors $\mathfrak{B}_2 = u_1, u_2, u_3$ en components en la base $\mathfrak{B}_1 = e_1, e_2, e_3$ i obtindrem una matriu $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1} = \mathcal{M}$, que és la matriu de canvi de base. Com que totes dues bases són ortonormals, tenim que $\mathcal{M}^T \mathcal{M} = \mathbb{I}$, però:

$$\mathcal{M}^T \mathcal{M} = \mathbb{I} \implies \det(\mathcal{M}^T \mathcal{M}) = 1 \implies \det(M)^2 = 1 \implies \det(\mathcal{M}) = \pm 1. \tag{5.2.20}$$

Per tant, $\det_{e_i}(u_1, u_2, u_3) = \pm 1$. Això ens diu que $\det_{e_i}(u, v, w) = \pm \det_{u_i}(u, v, w), \ \forall u, v, w \in E$. Ara bé, donat que e_1, e_2, e_3 i u_1, u_2, u_3 siguin totes dues ortonormals.

Observació 5.2.6. El producte vectorial s'ha de definir en un espai vectorial euclidià orientat $(E, [e_1, e_2, e_3])$ de dimensió 3 on la base e_1, e_2, e_3 sigui ortonormal. Aleshores, el valor dels determinants no varia si canviem e_1, e_2, e_3 per qualsevol altra base ortonormal u_1, u_2, u_3 positiva.

Proposició 5.2.7. *Si u, v són vectors tals que $u \wedge v \neq 0$, aleshores $u, v, u \wedge v$ és una base positiva.*

Demostració. Directament, $\det_{e_i}(u, v, u \wedge v) = (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 > 0$. ■

5.3

Distància entre varietats lineals

Definició 5.3.1 (espai afí euclidià). Un espai afí euclidià és un espai afí $(\mathbb{A}, E)$ on l'espai vectorial E té definit un producte escalar.

Definició 5.3.2 (Distància). Una distància entre dos punts $p, q \in \mathbb{A}$ com $d(p, q) := \|\overrightarrow{pq}\|$, és a dir, la distància és una aplicació

$$\begin{aligned} d: \quad A \times A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto d(p, q) := \|\overrightarrow{pq}\|, \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

on es compleix:

1. $d(p, q) \geq 0$,
2. $d(p, q) = 0 \iff p = q$,
3. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ (desigualtat triangular).

Teorema 5.3.3 (Teorema de Pitàgores). $\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{qr} = 0 \implies d(p, r)^2 = d(p, q)^2 + d(q, r)^2$.

Definició 5.3.4 (Distància entre varietats lineals). Donades dues varietats lineals $\mathbb{L}_1 = a_1 + F_1$ i $\mathbb{L}_2 = a_2 + F_2$, tenim que la distància entre varietats lineals és la mínima distància que dos punts de varietats lineals arriben a assolir:

$$d(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2) := \inf\{d(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{L}_1, \ x_2 \in \mathbb{L}_2\}. \tag{5.3.2}$$

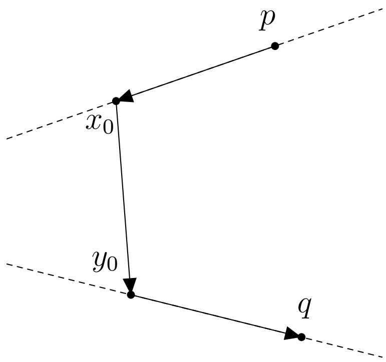


Figura 5.1: La distància entre dues varietats lineals.

Teorema 5.3.5. *Donades $\mathbb{L}_1$ i $\mathbb{L}_2$, existeixen $p \in \mathbb{L}_1$ i $q \in \mathbb{L}_2$ tals que $d(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2) = d(p, q)$.*

Demostració. Posem $\mathbb{L}_1 = a_1 + F_1$ i $\mathbb{L}_2 = a_2 + F_2$. És suficient demostrar que existeixen $p \in \mathbb{L}_1$ i $q \in \mathbb{L}_2$ tals que $\overrightarrow{pq} \in F_1^\perp \cap F_2^\perp$. Podem expressar

$$\overrightarrow{a_1 a_2} = u + v,\ u \in F_1 + F_2,\ v \in (F_1 + F_2)^\perp. \tag{5.3.3}$$

Ara posem $u = u_1 + u_2$ amb $u_1 \in F_1$ i $u_2 \in F_2$. Considerem els punts $p = a_1 + u_1$ i $q = p + v$. Tenim que $p \in \mathbb{L}_1$ i, a més:

$$q = p + v = a_1 + u_1 + v = a_1 + u - u_2 + v = a_1 + \overrightarrow{a_1 a_2} - u_2 = a_2 - u_2 \tag{5.3.4}$$

i, per tant, $q \in \mathbb{L}_2$. Com que $\overrightarrow{pq} = v \in (F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$, la demostració està acabada. ∎

Teorema 5.3.6. *Suposem que existeixen punts $p \in \mathbb{L}_1$ i $q \in \mathbb{L}_2$ tals que $\overrightarrow{pq}$ és ortogonal a F_1 i F_2 (ho podem posar com $\overrightarrow{pq} \in F_1^\perp \cap F_2^\perp$). Llavors, $d(p, q) = d(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2)$.*

Demostració. Per a tot parell de punts $x_1 \in \mathbb{L}_1$ i $x_2 \in \mathbb{L}_2$, volem calcular la distància entre x_1 i x_2:

$$d(x_1, x_2)^2 = \|\overrightarrow{x_1 x_2}\|^2 = \|\overrightarrow{x_1 p} + \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{q x_2}\|^2 \xrightarrow{\text{Pitàgores}} \|\overrightarrow{pq}\|^2 + \|\overrightarrow{x_1 p} + \overrightarrow{q x_2}\|^2 \geq \|\overrightarrow{pq}\|^2 = d(p, q)^2. \tag{5.3.5}$$

on hem tingut en compte que $\overrightarrow{x_1 p} \in F_1, \overrightarrow{q x_2} \in F_2$ i $\overrightarrow{pq} \in F_1^\perp \cap F_2^\perp$ i que

$$\begin{matrix} \overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{x_1 p} = 0 \\ \overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{q x_2} = 0 \end{matrix} \implies \overrightarrow{pq} \cdot (\overrightarrow{x_1 p} + \overrightarrow{q x_2}) = 0. \tag{5.3.6}$$

Per tant, $d(x_1, x_2)^2 \geq d(p, q)^2 \implies d(x_1, x_2) \geq d(p, q),\ \forall x_1 \in \mathbb{L}_1, x_2 \in \mathbb{L}_2$. ∎

5.3.1 Distància entre un punt i un hiperplà

En cas que les dues varietats lineals siguin un punt i un hiperplà, respectivament, podem calcular la distància entre ells de la següent manera: $\mathbb{L}_1 = \{p\}$ i $\mathbb{L}_2 = a + F,\ \dim F = n - 1$. Considerem el punt $p_{\mathbb{L}_2} = (p + F^\perp) \cap \mathbb{L}_2$, que s'anomena projecció ortogonal de p sobre $\mathbb{L}_2$. Notem que $F^\perp$ és una recta, ja que $\dim F^\perp = 1$; $p_{\mathbb{L}_2}$ existeix donat que $p + F^\perp$ no és paral·lela a $\mathbb{L}$: el punt p existeix i és únic. Com que $\overrightarrow{p p_{\mathbb{L}_2}} \in F^\perp$ i podem aplicar el teorema: $d(p, \mathbb{L}_2) = d(p, p_{\mathbb{L}_2})$.

El vector $u = \frac{\overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p}}{\|\overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p}\|}$ és unitari i

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p} = \|\overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p}\|u &\implies \overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p} \cdot u = \|\overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p}\|(u \cdot u) = \|\overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p}\| \\ \overrightarrow{ap} = \overrightarrow{ap_{\mathbb{L}_2}} + \overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p} &\implies \overrightarrow{ap} \cdot u = \overrightarrow{ap_{\mathbb{L}_2}} \cdot u + \overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p} \cdot u = \|\overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p}\| = d(p, \mathbb{L}). \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Per tant,

$$\overrightarrow{ap} \cdot u = d(p, \mathbb{L}),\ u = \frac{\overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p}}{\|\overrightarrow{p_{\mathbb{L}_2}p}\|}. \tag{5.3.8}$$

Podem acotar-ho una mica més dient que $d(p, \mathbb{L}) = |\overrightarrow{ap} \cdot v|$, on v és un vector unitari en la direcció $F^{\perp}$, és a dir, que n'és generador. En tal cas,

$$v = \pm \frac{\overrightarrow{p_{\mathbb{L}}p}}{\|\overrightarrow{p_{\mathbb{L}}p}\|}. \tag{5.3.9}$$

Proposició 5.3.7. *Es compleix que la distància d'un punt a un hiperplà és:*

$$d(p, \mathbb{L}) = \frac{|A_1p_1 + \cdots + A_np_n + B|}{\sqrt{(A_1)^2 + \cdots + (A_n)^2}}. \tag{5.3.10}$$

Demostració. Utilitzarem el següent lema per demostrar-ho.

Lema 5.3.8. *En referència ortonormal, el vector $(A_1, \ldots, A_n)$ és ortogonal a l'hiperplà d'equació $A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B = 0$.*

Suposem que l'hiperplà $\mathbb{L}$ té equació $\mathbb{L} = A_1x_1 + \cdots + A_nX_n + B = 0$, en una referència ortonormal $\{q; e_1, \ldots, e_n\}$. La direcció de $\mathbb{L}$ és

$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid A_1x_1 + \cdots + A_nX_n + B = 0\}. \tag{5.3.11}$$

Com que la referència és ortonormal, $A_1x_1 + \cdots + A_nX_n + B = (A_1, \ldots, A_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n)$; $(A_1, \ldots, A_n) \in F^{\perp}$. Aleshores, $v = \frac{(A_1, \ldots, A_n)}{\sqrt{(A_1)^2 + \cdots + (A_n)^2}}$ és un generador unitari de $F^{\perp}$. D'aquí:

$$\begin{aligned} d(p, \mathbb{L}) = |\overrightarrow{ap} \cdot v| &= \frac{1}{\sqrt{(A_1)^2 + \cdots + (A_n)^2}} |(p_1 - a_1, \ldots, p_n - a_n) \cdot (A_1, \ldots, A_n)| \\ &= \frac{1}{\sqrt{(A_1)^2 + \cdots + (A_n)^2}} |A_1p_1 + \cdots + A_np_n - (A_1a_1 + \cdots + A_na_n)| \\ &= \frac{|A_1p_1 + \cdots + A_np_n + B|}{\sqrt{(A_1)^2 + \cdots + (A_n)^2}},\ \text{on } v \text{ és ortogonal a la direcció d'}\mathbb{L}. \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

■

Exemple 5.3.9. Donats $p = (-1, 0, 4)$ i $\mathbb{L} : 2x - 5y + z - 1$, podem trobar els vectors generadors d'$\mathbb{L}$ de tal manera que $\mathbb{L} = (1, 0, -1) + \langle(1, 0, -2), (0, 1, 5)\rangle$. Aleshores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & e_2 \\ -2 & 5 & e_3 \end{vmatrix} = e_3 + 2e_1 - 5e_2 = v_1 \wedge v_2,\ F^{\perp} = \langle(2, -5, 1)\rangle. \tag{5.3.13}$$

Volem trobar una recta r que sigui la recta perpendicular al pla $\mathbb{L}$, $p + F^{\perp}$:

$$r = (-1, 0, 4) + \langle (2, -5, 1) \rangle, \ r = \begin{cases} 5x + 2y + 5 = 0 \\ x - 2z + 9 = 0 \end{cases} \tag{5.3.14}$$

La intersecció $r \cap \mathbb{L}$ resulta en una varietat lineal de dimensió 0, un punt, donat que tracen un sistema compatible determinat:

$$p_{\mathbb{L}} = \left(-\frac{32}{30}, \frac{5}{30}, \frac{119}{30} \right), \ \overrightarrow{pp_{\mathbb{L}}} = \left(-\frac{2}{30}, \frac{5}{30}, \frac{-1}{30} \right) \implies d(p, \mathbb{L}) = \|\overrightarrow{pp_{\mathbb{L}}}\| = \frac{1}{\sqrt{30}}. \tag{5.3.15}$$

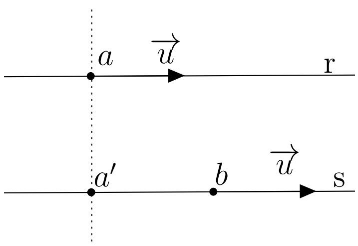
Però com treballem a $\mathbb{R}^3$ amb referència canònica, la qual és ortonormal, podem aplicar la fórmula:

$$d(p, \mathbb{L}) = \frac{|2 \cdot (-1) - 5 \cdot 0 + 4 - 1|}{\sqrt{4 + 25 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{30}}. \tag{5.3.16}$$

5.3.2 Distància entre dues rectes de l'espai tridimensional

5.3.2.1 Rectes paral·leles

Suposem que les rectes són paral·leles: posem $r = a + \langle u \rangle$ i $s = b + \langle u \rangle$. Per definició, la distància entre r i s coincideix amb la distància entre a i un punt $a' \in s$ tal que $\overrightarrow{aa'} \cdot u = 0$. El càlcul d'$a'$ es pot fer tallant s amb el pla ortogonal a r i a s que passa per a.



Proposició 5.3.10. *Si la referència és ortonormal, podem calcular la distància sense necessitat de trobar el punt a', de la següent manera:*

$$d(r, s) = \|\overrightarrow{aa'}\| = \frac{\|\overrightarrow{ab} \wedge u\|}{\|u\|}. \tag{5.3.17}$$

Demostració. En efecte, si la referència és ortonormal:

$$\overrightarrow{ab} \wedge u = (\overrightarrow{aa'} + \overrightarrow{a'b}) \wedge u = \overrightarrow{aa'} \wedge u + \overrightarrow{a'b} \wedge u = \overrightarrow{aa'} \wedge u. \tag{5.3.18}$$

Prenent la norma, i tenint en compte que $\overrightarrow{aa'}$ i u formen un angle de 90 graus, tenim que:

$$\|\overrightarrow{ab} \wedge u\| = \|\overrightarrow{aa'}\| \cdot \|u\| \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = d(a, a') \cdot \|u\| \iff d(r, s) = \frac{\|\overrightarrow{ab} \wedge u\|}{\|u\|}. \tag{5.3.19}$$

■

5.3.2.2 Rectes encreuades

Suposem que ara les rectes són no paral·leles, és a dir, $r = a + \langle u \rangle$ i $s = b + \langle v \rangle$ són disjuntes i u, v són linealment independents.

Teorema 5.3.11. *Donades dues rectes r, s que s'encreuen (no es tallen ni són paral·leles) a $\mathbb{R}^3$, existeix una única recta t que talla r i s perpendicularment. Es compleix que $d(r, s) = d(x_0, y_0)$.*

Demostració. Com hem indicat ja, podem considerar punts variables:

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda u \in r, \\ y &= b + \mu v \in s, \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

i imposar que $\overrightarrow{xy} \cdot u = \overrightarrow{xy} \cdot v = 0$ (en altres paraules, que el vector $\overrightarrow{xy}$ és ortogonal a u, v). D'aquesta manera, obtenim punts únics $x_0 \in r$ i $y_0 \in s$ determinant l'única recta que talla i és perpendicular a r i s simultàniament. Diem que aquesta recta és la perpendicular comuna a r i s. Tenim, doncs, que $d(r, s) = d(x_0, y_0)$. ■

Demostració alternativa. Posem $\mathbb{L}_1 = a_1 + F_1$ i $\mathbb{L}_2 = a_2 + F_2$. És suficient demostrar que existeixen $x_0 \in \mathbb{L}_1$ i $y_0 \in \mathbb{L}_2$ tals que $x_0 y_0 \in F_1^\perp \cap F_2^\perp$. Podem expressar $\overrightarrow{a_1 a_2}$ com la suma directa de dos vectors u, v: $\overrightarrow{a_1 a_2} = u + v$ amb $u \in F_1 + F_2$ i $v \in (F_1 + F_2)^\perp$. Ara posem $u = u_1 + u_2$ tals que $u_1 \in F_1$ i $u_2 \in F_2$. Considerem, doncs, els punts $x_0 = a_1 + u_1$ i $y_0 = x_0 + v$. En conseqüència, $a_0 \in \mathbb{L}_1$. Operant:

$$y_0 = a_1 + u_1 + v = a_1 + u - u_2 + v = a_1 + \overrightarrow{a_1 a_2} - u_2 = a_2 - u_2. \tag{5.3.21}$$

Per tant, $y_0 \in \mathbb{L}_2$. Com que $\overrightarrow{x_0 y_0} = v \in (F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$, la demostració està acabada. ■

Observació 5.3.12. La perpendicular comú de r i s també es pot pensar com la intersecció dels plans $a + \langle u, u \wedge v \rangle$ i $b + \langle v, u \wedge v \rangle$. El teorema, doncs, es pot provar de la següent manera:

Demostració alternativa. Considerem els plans $\mathbb{L} = a + \langle u, u \wedge v \rangle$ i $\mathbb{M} = b + \langle v, u \wedge v \rangle$ on el producte vectorial està referit a la base canònica d'$\mathbb{R}^3$. Notem que $r \subset \mathbb{L}$ i $s \subset \mathbb{M}$. Com que $u, v, u \wedge v$ és una base d'$\mathbb{R}^3$ els plans $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$ no són paral·lels. Sigui $t \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$. Si posem $t = c + \langle w \rangle$, llavors:

$$\langle w \rangle = \langle u, u \wedge v \rangle \cap \langle v, u \wedge v \rangle = \langle u \wedge v \rangle \tag{5.3.22}$$

i, per tant, t és perpendicular a r i a s. A més:

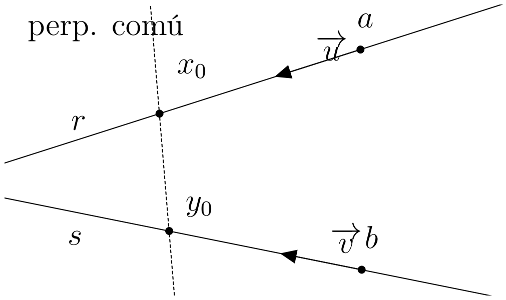
$$\begin{aligned} r \subset \mathbb{L}, t \subset \mathbb{L} &\implies r \cap t \neq \emptyset \implies \exists p = r \cap t, \\ s \subset \mathbb{M}, t \subset \mathbb{M} &\implies s \cap t \neq \emptyset \implies \exists q = s \cap t. \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

Si existís una altra recta t' que tallés r i s perpendicularment, llavors t' tindria la direcció $\langle u \wedge v \rangle$. Posant $p' = t' \cap r$, $q' = t' \cap s$ tindríem que:

$$\begin{aligned} p' \in r, a \in r &\implies \overrightarrow{ap'} \in \langle u \rangle. \\ t' = p' + \langle u \wedge v \rangle = a + \overrightarrow{ap'} + \langle u \wedge v \rangle &\subset a + \langle u, u \wedge v \rangle. \end{aligned} \tag{5.3.24}$$

Obtenim $t' \subset \mathbb{L}$ i, anàlogament, $t' \subset \mathbb{M}$ i, per tant, $t' = \mathbb{L} \cap \mathbb{M} = t$. ■

Per calcular la distància entre les rectes $r = a + \langle u \rangle$ i $s = b + \langle v \rangle$ considerem un vector $w \in \langle u, v \rangle^\perp$ ortogonal a u, v. Observem que w i $\overrightarrow{x_0 y_0}$ són proporcionals.



Proposició 5.3.13. *Es compleix que*

$$d(r,s) = \frac{|(u \wedge v \cdot \overrightarrow{ab})|}{\|u \wedge v\|} = \frac{\det(u, v, \overrightarrow{ab})}{\|u \wedge v\|}. \tag{5.3.25}$$

Demostració. Descomposem $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ax_0} + \overrightarrow{x_0 y_0} + \overrightarrow{y_0 b}$, i com $\overrightarrow{ax_0} \in \langle u \rangle$ i $\overrightarrow{y_0 b} \in \langle v \rangle$ i $\overrightarrow{x_0 y_0} \in \langle u \rangle^\perp \cap \langle v \rangle^\perp = \langle u \wedge v \rangle$. Ara, considerem $(u \wedge v) \cdot \overrightarrow{ab}$ i resolem:

$$\begin{aligned} (u \wedge v) \cdot \overrightarrow{ab} = (u \wedge v) \cdot \overrightarrow{ax_0} + (u \wedge v) \cdot \overrightarrow{x_0 y_0} + (u \wedge v) \cdot \overrightarrow{y_0 b} &= (u \wedge v) \cdot \overrightarrow{x_0 y_0} \\ |(u \wedge v) \cdot \widehat{ab}| = |(u \wedge v) \cdot \overrightarrow{x_0 y_0}| &= \|(u \wedge v)\| \cdot \|\overrightarrow{x_0 y_0}\| \\ d(r,s) = \|\overrightarrow{x_0 y_0}\| = \frac{|u \wedge v| \cdot \overrightarrow{ab}}{\|u \wedge v\|} &= \frac{\det(u, v, \overrightarrow{ab})}{\|u \wedge v\|}. \end{aligned} \tag{5.3.26}$$

■

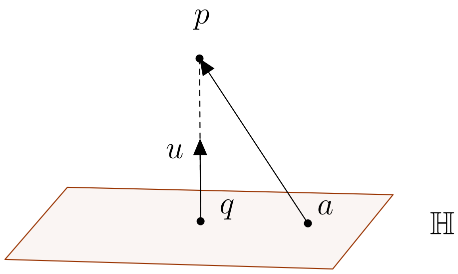


Figura 5.2: Distància entre un punt i un hiperplà

VI

Endomorfismes ortogonals

6.1

Definició i propietats

La desigualtat de Cauchy-Schwartz ens diu que

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\| \iff -\|u\| \cdot \|v\| \leq u \cdot v \leq \|u\| \cdot \|v\| \xrightarrow{u,v\neq 0} -1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1. \quad (6.1.1)$$

Aleshores, existeix un únic nombre real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que:

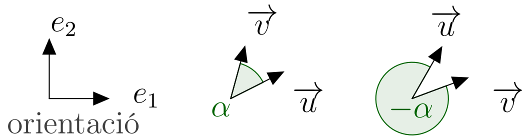
$$\cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}. \quad (6.1.2)$$

El valor de l'angle α entre dues rectes $r = a + \langle u \rangle$ i $s = b + \langle v \rangle$ que es tallen en un espai afí euclidià està definit a $[0, \frac{\pi}{2}]$ per l'expressió

$$\cos(\alpha) = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|}. \quad (6.1.3)$$

Observació 6.1.1.

- Hi posem un valor absolut perquè els vectors directors u, v estan determinats només llevat del signe, $\alpha = \widehat{rs}$.
- L'angle entre dues rectes té sentit encara que no es tallin.



Definició 6.1.2.

- L'angle entre dos hiperplans es defineix com l'angle entre dues rectes perpendiculars a $e \parallel s$: $\widehat{L_1 L_2} = \widehat{r_1 r_2}$.
- L'angle entre una recta r i un hiperplà $\mathbb{L}$ es defineix com el complementari de l'angle entre r i una recta s perpendicular a $\mathbb{L}$.

Definició 6.1.3 (Endomorfisme ortogonal)**.** Sigui E un espai vectorial amb un producte escalar. Es diu que un endomorfisme $f : E \longrightarrow E$ és ortogonal si $f(u) \cdot f(v) = u \cdot v, \forall u, v \in E$. Si f és ortogonal, aleshores preserva normes:

$$\|f(v)\| = \sqrt{f(v) \cdot f(v)} = \sqrt{v \cdot v} = \|v\|, \ \forall v \in E. \quad (6.1.4)$$

Una de les propietats més interessants dels endomorfismes ortogonals és que la condició de preservar el producte escalar implica la linealitat:

Proposició 6.1.4. *Sigui $f : E \longrightarrow E$ una aplicació qualsevol, on E és un espai vectorial euclidià. Si f preserva el producte escalar, aleshores f és lineal.*

Demostració. Per provar la linealitat respecte la suma, anem a veure que per a tot $u, v, f(u+v) - f(u) - f(v)$ té norma zero i, per tant, és el vector zero. En efecte:

$$\begin{gathered}(f(u+v)-f(u)-f(v))\cdot(f(u+v)-f(u)-f(v)) = f(u+v)\cdot f(u+v) - f(u+v)\cdot f(u)\\ -f(u+v)\cdot f(v) - f(u)\cdot f(u+v) + f(u)\cdot f(u) + f(u)\cdot f(v) - f(v)\cdot f(u+v) + f(v)\cdot f(u)\\ +f(v)\cdot f(v) = (u+v)\cdot(u+v) - (u+v)\cdot u - (u+v)\cdot v - u\cdot(u+v) + u\cdot u + u\cdot v\\ -v\cdot(u+v) + v\cdot u + v\cdot v = ((u+v)-u-v)\cdot((u+v)-u-v) = 0\cdot 0 = 0.\end{gathered} \tag{6.1.5}$$

Anàlogament tenim:

$$\begin{gathered}(kf(u)-f(ku))\cdot(kf(u)-f(ku)) = k\overline{k}f(u)\cdot f(u) - kf(u)\cdot f(ku) - \overline{k}f(ku)\cdot f(u)\\ +f(ku)\cdot f(ku) = k\overline{k}u\cdot u - ku\cdot(ku) - \overline{k}(ku)\cdot u + (ku)\cdot(ku) = (ku-ku)\cdot(ku-ku) = 0,\end{gathered} \tag{6.1.6}$$

d'on $kf(u) - f(ku) = 0$ i $f(ku) = kf(u)$. ■

Propietat 6.1.5. *Tot endomorfisme ortogonal té les següents propietats:*

1. *és bijectiu;*
2. *la composició de dos endomorfismes ortogonals f, g també és ortogonal;*
3. *el conjunt $O(E) = \{f : E \longrightarrow E,\ f \text{ ortogonal}\}$ és un grup amb la composició;*

Demostració. Tot endomorfisme ortogonal és bijectiu, ja que

$$f(v) = 0 \implies \|f(v)\| = 0 \implies \|v\| = 0 \implies v = 0, \tag{6.1.7}$$

i, per tant, $\ker(f) = 0$. Com que $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(E)$, deduïm que $\operatorname{im}(f) = E$. Per tant, f és injectiu i exhaustiu.

La composició $g \circ f$ de dos endomorfismes ortogonals f, g també és ortogonal:

$$g(f(u))\cdot g(f(v)) = f(u)\cdot f(v) = u\cdot v,\ \forall u, v \in E. \tag{6.1.8}$$

A més, f ortogonal implica que f^{-1} també és ortogonal:

$$f^{-1}(u)\cdot f^{-1}(v) = f(f^{-1}(u))\cdot f(f^{-1}(v)) = u\cdot v,\ \forall u, v \in E. \tag{6.1.9}$$

Per tant, el conjunt $O(E)$ és un grup amb la composició. ■

Notació 6.1.6 ($O(n)$). Denotarem $O(n) = O(\mathbb{R}^n)$, on $\mathbb{R}^n$ té el producte escalar ordinari. Els grups $O(n)$, $n \geq 2$ es diuen grups ortogonals.

Proposició 6.1.7 (Propietats de les matrius ortogonals). *Donada una matriu $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, les afirmacions següents són equivalents:*

1. *M és una matriu ortogonal,*
2. *$M^T M = \mathbb{I}$,*
3. *M és la matriu d'un endomorfisme ortogonal en una base ortonormal.*

Demostració. Escollim una base $e_1, \ldots, e_n$ a E i diem $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ a la matriu de Gram d'aquesta base. Sigui $f : E \longrightarrow E$ un endomorfisme i sigui M la matriu de f en la base $e_1, \ldots, e_n$. Llavors, f és ortogonal si, i només si,

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(y) &= x \cdot y, \ \forall x, y \in E; \\ (MX)^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) MY &= X^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) Y, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n; \\ X^T M^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) MY &= X^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) Y, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n; \\ M^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) M &= \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi). \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

En el cas particular que la base $e_1, \ldots, e_n$ sigui ortonormal, tenim que $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = \mathbb{I}$ i ens queda la condició $M^T M = \mathbb{I}$. ■

Proposició 6.1.8. *Sigui (E, φ) un espai vectorial euclidià. Sigui $f : E \longrightarrow E$ una aplicació lineal de matriu A respecte d'una base $\mathfrak{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Sigui $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ la matriu de φ respecte de la mateixa base. Llavors f conserva el producte escalar si, i només si, $A^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) A = \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$.*

Demostració. Amb la notació habitual, tenim:

$$A = M(f, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1), \ \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = M(\alpha, \mathfrak{B}_1). \tag{6.1.11}$$

Suposem primerament que f conserva el producte escalar. Llavors, f és bijectiva i $\mathfrak{B}_2 = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ és una base de E. Segons la fórmula del canvi de base, tenim:

$$M(\varphi, \mathfrak{B}_2) = M(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1)^T \cdot M(\varphi, \mathfrak{B}_1) \cdot M(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1), \tag{6.1.12}$$

però és clar que $M(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1) = M(f, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) = A$ i, per tant, la fórmula del canvi de base ens diu, en aquest cas, que $M(\varphi, \mathfrak{B}_2) = A^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) A$. Però com que $\varphi(f(e_i), f(e_j)) = \varphi(e_i, e_j)$, tenim que $M(\varphi, \mathfrak{B}_2) = M(\varphi, \mathfrak{B}_1) = \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi)$ i, així: $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = A^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) A$.

Recíprocament, la igualtat matricial $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) = A^T \mathcal{G}_{\mathfrak{B}}(\varphi) A$ ens diu que:

$$\varphi(e_i, e_j) = \varphi(f(e_i), f(e_j)), \tag{6.1.13}$$

i f conserva el producte escalar. ■

Corol·lari 6.1.9. *Sigui (E, φ) un espai vectorial euclidià. Sigui $f : E \longrightarrow E$ una aplicació lineal de matriu A respecte d'una base ortonormal $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Llavors, f conserva el producte escalar si, i només si, $A^T A = \mathbb{I}$.*

Exemple 6.1.10. Es pot veure que la matriu

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{6.1.14}$$

és ortogonal, $\forall \alpha$, aplicant la propietat que acabem de veure:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.1.15}$$

Observació 6.1.11. Si M és una matriu ortogonal, aleshores:

$$1 = \det(\mathbb{I}) = \det(M^T M) = \det(M^T) \det(M) = \det(M)^2 \iff \det(M) = 1. \tag{6.1.16}$$

Definició 6.1.12 (Endomorfismes propis i impropis). Els endomorfismes ortogonals f amb $\det(f) = 1$ es diuen propis. Els de determinant -1 s'anomenen impropis.

Definició 6.1.13 ($SO(E)$). $SO(E)$ és un conjunt d'endomorfismes sobre E tals que són ortogonals i el seu determinant és 1, en altres paraules:

$$SO(E) = \{f \in O(2) \bigm| \det(f) = 1\}. \tag{6.1.17}$$

$SO(E)$ és un grup ortogonal especial i un subgrup de $O(E)$, ja que $\det(g \circ f) = \det(g) \cdot \det(f)$.

Teorema 6.1.14. *Sigui E un espai vectorial euclidià amb $\dim E = 2$. Si $f : E \longrightarrow E$ és ortogonal, llavors els únics valors propis a $\mathbb{R}$ que f pot tenir són ± 1. A més, si u, v són vectors propis de f de valors propis diferents, aleshores $u \cdot v = 0$.*

Demostració. Suposem que $f(v) = \lambda v,\ v \neq 0$. Llavors:

$$\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \implies |\lambda| = \pm 1. \tag{6.1.18}$$

Ara suposem que $f(u) = u,\ f(v) = -v$. Llavors $u \cdot v = f(u) \cdot f(v) = -uv \implies u \cdot v = 0$. ■

Exemple 6.1.15. Sigui M una matriu tal que:

$$M = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ M^T M = \mathbb{I}, \det(M) = -1. \tag{6.1.19}$$

Definició 6.1.16 (Adjunt de f). Donat un endomorfisme $f : E \longrightarrow E$ amb matriu M en una base ortonormal, denotem per f^a l'endomorfisme amb matriu M^T i l'anomenem adjunt de f. Es compleix:

$$f(u) \cdot v = (M \cdot u)^T \cdot v = u^T \cdot (M^T v) = u \cdot f^a(v),\ \forall u, v \in E. \tag{6.1.20}$$

Observació 6.1.17. Observem que $M^T M = \mathbb{I} \iff M^T = M^{-1}$. Per tant, f és ortogonal si, i només si, $f^a = f^{-1}$.

Proposició 6.1.18. *L'endomorfisme adjunt f^a es correspon amb el dual f^* a través de l'isomorfisme $E \cong E^*$ donat pel producte escalar: $\Phi : E \longrightarrow E^*,\ \Phi(u)(v) = u \cdot v$.*

Demostració. Com tenim $f^* : E^* \longrightarrow E^*,\ f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ i $f^*(\varphi)(v) = \varphi(f(v))$. Aleshores:

$$\begin{gathered} f(u) \cdot v = \Phi(v)(f(u)) = f^*(\Phi(v))(u) \\ f(u) \cdot v = u \cdot f^a(v) = \Phi(f^a(v)) = u,\ \forall v \in E. \end{gathered} \tag{6.1.21}$$

I, per tant, obtenim: $f^*(\Phi(v)) = \Phi(f^a(v)), \forall v \in E$. ■

Acabem la secció amb dues caracteritzacions més dels endomorfismes ortogonals:

Proposició 6.1.19. *Un endomorfisme f és ortogonal si, i només si, preserva normes; $\|f(x)\| = \|x\|$ per a tot $x \in E$.*

Demostració. Ja hem vist que si f és ortogonal, aleshores es conserven les normes. Suposem ara que les normes es conserven i siguin $x, y \in E$. Per hipòtesi, $\|f(x+y)\| = \|x+y\|$. Calculem per separat cada membre, elevat al quadrat:

$$\begin{aligned} f(x+y)\cdot f(x+y) &= (f(x)+f(y))\cdot(f(x)+f(y)) = f(x)\cdot f(x) + f(y)\cdot f(y) + 2f(x)\cdot f(y) \\ &= \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2f(x)\cdot f(y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2f(x)\cdot f(y). \end{aligned} \tag{6.1.22}$$

Per altra banda,

$$(x+y)\cdot(x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x\cdot y. \tag{6.1.23}$$

Comparant, $f(x)\cdot f(y) = x\cdot y$. ■

Proposició 6.1.20. *Una afinitat $(f, \tilde{f})$ manté la distància si, i només si, $\tilde{f}$ és ortogonal.*

6.2

Classificació dels endomorfismes ortogonals

6.2.1 En dimensió 2

Recordem que els endomorfismes ortogonals f compleixen que $\det f = \pm 1$. Ens tocarà dividir la classificació en aquests dos casos: el cas en què $\det f = -1$ i quan $\det f = 1$. Comencem pel primer.

El polinomi característic de f és

$$p(x) = x^2 - (\mathrm{tr}(f))x + \det(f) = x^2 - tx - 1. \tag{6.2.1}$$

El discriminant d'aquest polinomi és

$$\Delta = t^2 + 4 > 0. \tag{6.2.2}$$

Per tant, $p(x)$ té dues arrels reals diferents, que només poden ser ± 1 perquè f és ortogonal, i f diagonalitza. En cas que $f \in O(2)$ tingui $\det f = -1$, es dona el següent.

Definició 6.2.1 (Reflexió). És aquell endomorfisme f amb matriu associada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ M^{-1} = M^T. \tag{6.2.3}$$

On la base v_1, v_2 de E és ortonormal.

Observació 6.2.2. Fixem-nos que $M^2 = \mathbb{I}$ i, per tant, es tracta d'una simetria. Els subespais de VEPs de VAP 1 i -1 són, respectivament:

$$E_1 = \langle (b, 1-a) \rangle,\ E_{-1} = \langle (-b, 1+a) \rangle. \tag{6.2.4}$$

Aquests subespais són ortogonals i, per això, aquestes simetries es diuen simetries ortogonals.

Ara treballarem el cas que $\det f = 1$. Escollim una base ortonormal e_1, e_2 i escrivim la matriu de f:

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},\ ad - bc = 1. \tag{6.2.5}$$

Per hipòtesi, $M^T = M^{-1}$. Per tant,

$$M^T = M^{-1} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \iff a = d,\ b = -c. \tag{6.2.6}$$

Aleshores,

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \xrightarrow{ad-bc=1} a^2 + b^2 = 1 \tag{6.2.7}$$

Proposició 6.2.3. *$SO(E)$ és un grup commutatiu si* $\dim E = 2$.

Demostració. Plantegem:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap - bq & -aq - bp \\ bp + aq & -bq + ap \end{pmatrix}. \tag{6.2.8}$$

Per tant, f i g commuten. ■

Proposició 6.2.4. *Si $f \in SO(E)$ amb E orientat i* $\dim E = 2$*, llavors f té la mateixa matriu en totes les bases ortonormals positives.*

Demostració. Sigui M la matriu de f en una base ortonormal positiva e_1, e_2 i sigui N la matriu de f en una altra base ortonormal positiva v_1, v_2. Llavors, $M, N \in SO(2)$. Ens ajudem de:

Lema 6.2.5. *La matriu de canvi de base C entre dues bases ortonormals és ortogonal.*

Demostració. Si $e_1, \ldots, e_n$ i $v_1, \ldots, v_n$ són bases ortonormals, llavors la matriu C de canvi de base és $C = (\lambda_{ij})$ si $v_i = \sum_j (\lambda_{ji} e_j)$. Per tant, $C^T C = \mathbb{I}$. ■

La matriu de canvi de base C és una matriu ortogonal perquè envia una base ortonormal a una altra base ortonormal, i $\det C = 1$ perquè les dues bases tenen la mateixa orientació. Per tant, $C \in SO(2)$. Ara, tenim que $N = C^{-1}MC = C^{-1}CM = M$, ja que $SO(2)$ és un grup commutatiu. Per tant, si $f \in SO(E)$ amb E orientat i $\dim E = 2$, existeix un únic nombre real $0 \leq \alpha < 2\pi$ tal que f té la matriu

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{6.2.9}$$

en qualsevol base ortonormal positiva. Direm que f és una rotació d'angle α. En el cas particular $\alpha = \pi$, tenim que

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.2.10}$$

i f és una simetria vectorial central. ■

Proposició 6.2.6. *S'obté un isomorfisme de grups escollint una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ d'E: $O(E) \cong O(n)$ per a tot espai vectorial euclidià E de dimensió n.*

Demostració. A cada endomorfisme ortogonal $f : E \longrightarrow E$ li fem correspondre la seva matriu M en la base $e_1, \ldots, e_n$ que es pot veure com un endomorfisme $M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que és ortogonal respecte al producte escalar ordinari, ja que $M^T M = \mathbb{I}$. La correspondència

$$O(E) \longrightarrow O(n),\ \phi(f) = M \tag{6.2.11}$$

és un morfisme de grups perquè $\phi(g \circ f) = \phi(f) \cdot \phi(f)$ i és bijectiu perquè cada endomorfisme està determinat unívocament per la seva matriu en la base $e_1, \ldots, e_n$. ■

Proposició 6.2.7. *Sigui $f \in SO(2)$ i*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{6.2.12}$$

la seva matriu en la base ortonormal e_1, e_2. Aleshores, si u és un vector unitari qualsevol,

$$a = u \cdot f(u), \; b = \det_{e_i}(u, f(u)). \tag{6.2.13}$$

Demostració. Sigui $u = \alpha e_1 + \beta e_2$ amb $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Llavors:

$$f(u) = (a\alpha - b\beta)e_1 + (b\alpha + a\beta)e_2, \tag{6.2.14}$$

d'on

$$u \cdot f(u) = \alpha(a\alpha - b\beta) + \beta(b\alpha + a\beta) = a(\alpha^2 + \beta^2) = a, \tag{6.2.15}$$

i

$$\det_{e_i}(u, f(u)) = \begin{vmatrix} \alpha & a\alpha - b\beta \\ \beta & b\alpha + a\beta \end{vmatrix} = b(\alpha^2 + \beta^2) = b. \tag{6.2.16}$$

■

Aquesta proposició ens diu, en particular, que a és independent de la base ortonormal escollida i que b varia, com a molt, en el signe. En efecte, si u_1, u_2 és una altra base ortonormal:

$$\det_{u_i}(u, f(u)) = \det_{u_i}(e_1, e_2) \cdot \det_{e_i}(u, f(u)) = \pm b, \tag{6.2.17}$$

ja que $\det_{u_i}(e_1, e_2) = \pm 1$. Aquest determinant és 1 quan e_1, e_2 i u_1, u_2 són de la mateixa orientació i -1 en cas contrari.

Proposició 6.2.8. *Donats dos vectors $u, v \in E$ que tenen la mateixa norma, $\|u\| = \|v\| \neq 0$, existeix una $f \in SO(2)$ i només una tal que $f(u) = v$.*

Corol·lari 6.2.9. *Si $f \in SO(2)$ deixa un vector fix, aleshores $f = \mathbb{I}$.*

Definició 6.2.10 (Angle). Un angle en un espai vectorial euclidià E de dimensió 2 és una classe d'equivalència de parells de vectors unitaris (u, v) on definim $(u, v) \sim (u', v')$ si hi ha $g \in SO(E)$ tal que $g(u) = u'$ i $g(v) = v'$. Denotarem per

Teorema 6.2.11. *Si $\dim E = 2$ i E és orientat, hi ha una correspondència bijectiva entre $SO(E)$ i el conjunt dels angles a E.*

Demostració.

$\Longrightarrow$ Donat $f \in SO(E)$, li fem correspondre l'angle $(u, f(u))$ on u és un vector unitari qualsevol. Aquesta aplicació està ben definida: si u' és un altre vector unitari, llavors $(u.f(u)) \sim (u', f(u'))$, ja que si escollim un $g \in SO(E)$ tal que $g(u) = u'$, llavors

$$g(f(u)) = f(g(u)) = f(u'), \tag{6.2.18}$$

perquè $SO(E)$ és commutatiu quan $\dim E = 2$.

$\Longleftarrow$ Recíprocament, donat un angle $\widehat{uv}$, hi fem correspondre l'únic $f \in SO(E)$ tal que $v = f(u)$. Hem de veure que f és únic. Suposem que $f, g \in SO(E)$ satisfan $f(u) = v$, $g(u) = v$. Posem $e_1 = u$ i diem e_2 a l'únic vector unitari tal que e_1, e_2 és una base ortonormal positiva. Aleshores, $f(e_1), f(e_2)$ i $g(e_1), g(e_2)$ són bases positives, ja que $f, g \in SO(E)$:

$$\det_{e_i}(f(e_1), f(e_2)) = \det f = 1 > 0. \tag{6.2.19}$$

Com que $f(e_1) = g(e_1) = v$, també ha de ser $f(e_2) = g(e_2)$. Aleshores, $f = g$ perquè coincideixen en els vectors d'una base.

■

Corol·lari 6.2.12. *Donat un angle $\widehat{uv}$, li podem assignar l'únic nombre real $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que l'únic endomorfisme $f \in SO(E)$ amb $f(u) = v$ té la matriu:*

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{6.2.20}$$

en qualsevol base ortonormal positiva.

Observació 6.2.13.

- Si E no és orientat, llavors α només queda determinat a $[0, \pi]$.
- Si u, v són vectors no nuls no necessàriament unitaris en un espai vectorial E euclidià de dimensió arbitrària, definim l'angle $\widehat{uv}$ com l'angle $\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right)$ en l'espai vectorial $\langle u, v\rangle$. L'espai vectorial $\langle u, v\rangle$ té el producte escalar induït per E, però en general no tindrà cap orientació canònica.
- En cas que u, v siguin linealment dependents, $\widehat{uv} = 0$ si $v = \lambda u$ amb $\lambda > 0$ i $\widehat{uv} = \pi$ si $\lambda < 0$.
- Si $u = 0$ o bé $v = 0$, llavors $\widehat{uv}$ no està definit.
- Suposem que E és orientat i $\dim E = 2$. Sigui e_1, e_2 una base ortonormal positiva. Siguin $u = u_1e_1 + u_2e_2$ i $v = v_1e_1 + v_2e_2$ i suposem que u, v són unitaris: $u_1^2 + u_2^2 = v_1^2 + v_2^2 = 1$. Sigui, per últim, $\alpha = \widehat{uv}$. Llavors, l'únic $f \in SO(E)$ tal que $f(u) = v$ té la matriu

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{6.2.21}$$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{6.2.22}$$

Calcularem el producte escalar entre u i v amb la matriu de $f(u) = v$:

$$u \cdot v = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (u_1^2 + u_2^2)\cos(\alpha) = \cos(\alpha). \tag{6.2.23}$$

Si u, v no són unitaris, aleshores:

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \frac{u}{\|u\|}\frac{v}{\|v\|} = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\alpha), \ \alpha = \widehat{uv}. \tag{6.2.24}$$

- Finalment, observem que la composició de rotacions ens dona fórmules trigonomètriques. Utilitzant la definició de suma de dos angles, ens queda:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix} &= g\circ f = \begin{pmatrix}\cos(\beta) & -\sin(\beta)\\ \sin(\beta) & \cos(\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\\ &= M_g\cdot M_f = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta)+\cos(\alpha)\cos(\beta)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.2.25}$$

A més, tenim que

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix} \tag{6.2.26}$$

L'angle O correspon a l'endomorfisme $\mathbb{I}\in SO(E)$. Per tant, si α correspon a f, llavors $-\alpha$ correspon a f^{-1}. Això ens diu que:

$$\widehat{vu} = -\widehat{uv},\quad \cos(-\alpha)=\cos(\alpha),\ \sin(-\alpha)=-\sin(\alpha). \tag{6.2.27}$$

Definició 6.2.14 (Suma de dos angles)**.** Definim la suma de dos angles α,β amb endomorfismes $f,g\in SO(E)$ com l'angle associat a $g\circ f$.

6.2.2 En dimensió 3

Teorema 6.2.15 (Teorema espectral)**.** *Si un endomorfisme $f: E\longrightarrow E$ és ortogonal, hi ha alguna base ortonormal $e_1,\ldots,e_n$ on f té la matriu següent:*

$$f = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}} & & & & 0\\ & \boxed{\begin{matrix}-1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{A_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{A_k}\end{pmatrix} \tag{6.2.28}$$

i

$$A_i = \begin{pmatrix}\cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i)\\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i)\end{pmatrix},\quad 0<\alpha_i<\pi,\ \forall i. \tag{6.2.29}$$

Demostració. Sigui $f: E\longrightarrow E$, f ortogonal. Considerem els subespais propis:

$$E^+ = \{v\in E \mid f(v)=v\},\ E^- = \{v\in E\mid f(v)=-v\}. \tag{6.2.30}$$

Llavors E^+ i E^- són ortogonals (perquè VEPs de VAPs diferents són ortogonals). Sigui $F = E^+\oplus E^-$. El subespai F és invariant per f. Aleshores, $F^\perp$ també és invariant per f. Podem escriure $E = E^+\oplus E^-\oplus F^\perp$. Considerem la restricció de f a $F^\perp$ i sigui $p(x)$ el polinomi mínim de la restricció: $p(x)$ no té arrels reals, ja que $b_i>0$, $\forall i$, i

$$p(x) = (x^2+a_1x+b_1)\cdots(x^2+a_kx+b_k). \tag{6.2.31}$$

D'aquesta manera, el determinant de la restricció d'f a $F^\perp$ és igual a 1. Posem $p(x) = (x^2 + a_1x + b_1) \cdot r(x)$ i escollim $u \in F^\perp$ tal que $v_1 = r(f)(u) \neq 0$. Sabent que ens surt $p(f)(u) = 0$:

$$\begin{aligned} p(f)(u) = 0 \implies (f^2 + a_1 f + b_1\mathbb{I})(r(f)(u)) &\implies (f^2 + a_1 f + b_1\mathbb{I})(v_1) = 0 \\ \implies f(f(v_1)) &= -a_1 f(v_1) - b_1 v_1. \end{aligned} \tag{6.2.32}$$

Aleshores, $\langle v_1, f(v_1)\rangle$ és invariant per f. Així, $E = E^+ \oplus E^- \oplus \langle v_1, f(v_1)\rangle \oplus \langle v_1, f(v_1)\rangle^\perp$. Repetint el mateix raonament iterativament, ens queda:

$$E = E^+ \oplus E^- \oplus \langle v_1, f(v_1)\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_k, f(v_k)\rangle. \tag{6.2.33}$$

Escollint una base ortonormal de cadascun d'aquests subespais obtenim una base ortonormal d'E on la matriu de f és la donada per l'enunciat del teorema. ■

Hem de veure alguns aspectes que hem usat en la demostració d'aquest teorema. Sigui $f : E \longrightarrow E$ ortogonal amb $\dim E = 3$. Com que f conserva el producte escalar i E té dimensió 3, el polinomi característic de f té una arrel real i aquesta ha de ser ± 1. Dit això, f té una de les matrius següents en una base ortonormal e_1, e_2, e_3 adient:

1r cas : $\det f = 1$. Es poden diverses situacions:

1. Que la matriu de f sigui la identitat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0,\ f = \mathbb{I}. \tag{6.2.34}$$

2. Posem f és una simetria axial vectorial, de tal manera que e_1 és un VEP de VAP 1 i e_2, e_3 són VEPs de VAP -1. La matriu del sistema *en qualsevol base* és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \alpha = \pi. \tag{6.2.35}$$

3. f és una rotació vectorial, de tal manera que e_1 és un VEP de VAP 1 i e_2, e_3 pertanyen a $\langle e_1\rangle^\perp$. La matriu del sistema és:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{6.2.36}$$

Observació 6.2.16. La traça de M, $\operatorname{tr} M$, és $\operatorname{tr} M = 1 + 2\cos(\alpha) \iff \cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} M - 1)$. La traça d'un endomorfisme no depèn de la base.

2n cas : $\det f = -1$. Tornem a distingir situacions:

1. f és una simetria especular vectorial, e_1, e_2 són VEPs de VAP 1 i e_3 és un VEP de VAP -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.2.37}$$

2. $f = -\mathbb{I}$ en qualsevol base, i f esdevé una simetria central vectorial:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.2.38}$$

3. f és una rotoreflexió vectorial d'angle α, e_1 és un VEP de VAP -1 i e_2, e_3 pertanyen a $\langle e_1 \rangle^\perp$. Una rotoreflexió és composició d'una rotació amb una reflexió respecte al pla de la rotació. La matriu del sistema és:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \ 0 < \alpha < \pi. \tag{6.2.39}$$

Lema 6.2.17. *Si $f : E \longrightarrow E$ és ortogonal i un subespai $F \subset E$ és invariant per f, aleshores $F^\perp$ també és invariant per f.*

Demostració. Per definició, F és invariant per f si, i només si, $f(F) \subseteq F \iff f(F) = F$, donat que f és invertible. Amb el mateix argument, $f^{-1}(F) = F$. Volem demostrar que $f(F^\perp) \subseteq F^\perp$: sigui $u \in F^\perp$ qualsevol, hem de trobar que $f(u) \in F^\perp$. Ara, sigui $v \in F$ arbitrari:

$$f(u) \cdot v = u \cdot f^{-1}(v) = 0, \tag{6.2.40}$$

on hem usat que f és ortogonal implica que f^{-1} és ortogonal a la primera igualtat i que $f^{-1}(v) \in F$ perquè F és invariant per f, a la segona. ■

VII

Desplaçaments

7.1

Definició i classificació

Definició 7.1.1 (Desplaçament). Sigui $(\mathbb{A}, E)$ un espai afí euclidià. Una afinitat $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ és un desplaçament si l'endomorfisme $\tilde{f} : E \longrightarrow E$ és ortogonal.

Proposició 7.1.2. *Els desplaçaments conserven les distàncies:*

$$d(f(p), f(q)) = d(p, q), \ \forall p, q \in \mathbb{A} \tag{7.1.1}$$

Demostració.

$$d(f(p), f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = \|\tilde{f}(\overrightarrow{pq})\| = \|\overrightarrow{pq}\| = d(p, q), \tag{7.1.2}$$

on en la tercera igualtat hem utilitzat que $\tilde{f}$ és ortogonal. ■

Proposició 7.1.3. *Sigui un punt $p \in \mathbb{A}$ i sigui $\tilde{f} : E \longrightarrow E$ definida per la fórmula $\tilde{f}(u) = \overrightarrow{f(a)f(b)}$ amb $b = a + u$. Aleshores, $\tilde{f}$ és lineal i f una aplicació afí amb endomorfisme associat $\tilde{f}$.*

Demostració. Per veure que $\tilde{f}$ és lineal serà suficient provar que preserva el producte escalar. Sigui $u, v \in E$ i posem $p = a + u$ i $q = a + v$. En particular, $u = \overrightarrow{ap}$ i $v = \overrightarrow{aq}$. Aleshores:

$$d(p,q)^2 = \overrightarrow{pq}\cdot\overrightarrow{pq} = (\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{aq})\cdot(\overrightarrow{pa}+\overrightarrow{aq}) = d(p,a)^2+d(a,q)^2+2\overrightarrow{pa}\cdot\overrightarrow{aq} = d(p,a)^2+d(a,q)^2-2u\cdot v. \tag{7.1.3}$$

Calculant de la mateixa manera, utilitzant el punt $f(a)$ en lloc d'a, trobem que:

$$d(f(p), f(q))^2 = d(f(p), f(a))^2 + d(f(a), f(q))^2 - 2\tilde{f}(u) \cdot \tilde{f}(v). \tag{7.1.4}$$

Comparant, arribem a $\tilde{f}(u) \cdot \tilde{f}(v) = u \cdot v$. Veiem ara que f és una aplicació afí: fixem dos punts $p, q \in \mathbb{A}$ i aleshores,

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{f(p)f(a)} + \overrightarrow{f(a)f(q)} = \tilde{f}(\overrightarrow{pa}) + \tilde{f}(\overrightarrow{aq}) = \tilde{f}(\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{aq}) = \tilde{f}(\overrightarrow{pq}). \tag{7.1.5}$$

■

Exemple 7.1.4.

1. Les translacions són desplaçaments: si τ és una translació, llavors $\tilde{t} = \mathbb{I} \implies \tau$ ortogonal.
2. Les homotècies $h_{c,r}$ de centre c i raó r són desplaçaments si, i només si $r = \pm 1$, ja que $\tilde{h}_{c,r} = r \cdot \mathbb{I}$.

Definició 7.1.5 (Desplaçament propi). És propi (impropi) si $\det \tilde{f} = 1$ ($\det \tilde{f} = -1$).

Proposició 7.1.6. *Una simetria central és un desplaçament propi si, i només si,* $\dim E$ *és parella.*

Demostració. Una simetria central f és una homotècia de raó $r=-1$. La matriu de $\tilde{f}$ és

$$\begin{pmatrix}-1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & -1\end{pmatrix}, \quad \det\tilde{f}=(-1)^n,\ n=\dim E. \tag{7.1.6}$$

■

7.1.1 Classificació dels desplaçaments

7.1.1.1 En dimensió 2

Sigui $f:\mathbb{A}\longrightarrow\mathbb{A}$ un desplaçament amb $\dim E=2$. Llavors, $\tilde{f}\in O(E)\cong O(2)$.

1r cas $\det\tilde{f}=1$. Llavors, $\tilde{f}\in SO(E)$. En qualsevol referència ortonormal, f s'expressa com:

$$\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}. \tag{7.1.7}$$

1. Si $\alpha=0$, f és una translació, o bé $f=\mathbb{I}$.
2. Si $\alpha\neq 0,\pi$, $\tilde{f}$ no té cap valor propi a $\mathbb{R}$ (en particular, no té VAP 1) i, per tant, f té un únic punt fix p. Llavors, f és una rotació de centre p i angle α. Aquestes afinitats són el·líptiques. Si prenem p com a origen del sistema de referència, aleshores f queda com:

$$\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}. \tag{7.1.8}$$

   El cas particular $\alpha=\pi$ correspon a una simetria central, i aleshores $\tilde{f}=-\mathbb{I}$.

2n cas $\det(\tilde{f})=-1$. Llavors, $\tilde{f}$ té valors propis, i han de ser necessàriament ±1, ja que $\tilde{f}$ és ortogonal. Si escollim una base e_1,e_2 de E amb $f(e_1)=e_1, f(e_2)=-e_2$ l'expressió de f és

$$\begin{pmatrix}x^*\\ y^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}, \quad x^*=x+a,\ y^*=-y+b. \tag{7.1.9}$$

Estudiem els punts fixos que compleixen $x=x+a$, $y=-y+b$:

1. Si $a=0$, llavors $y=\frac{1}{2}b$ és una recta de punts fixos i f és una simetria axial (també es diu reflexió). f és una homologia general de raó -1 amb el feix de rectes invariants perpendicular a la recta de punts fixos.
2. Si $a\neq 0$, llavors f no té punts fixos. La recta $y=\frac{1}{2}b$ és invariant per f: $x^*=x+a$ i $y^*=-y+b$. f és composició d'una simetria axial amb una translació en la direcció de la recta invariant. Es diu que f és una reflexió amb lliscament. El vector de la translació és:

$$v=\frac{1}{2}\overrightarrow{pp^{**}}, p \text{ qualsevol.} \tag{7.1.10}$$

   A més, la recta invariant passa pel punt mitjà de p i p^* per a p arbitrari. Comprovem la descomposició de f en una reflexió i una translació:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & -1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{7.1.11}$$

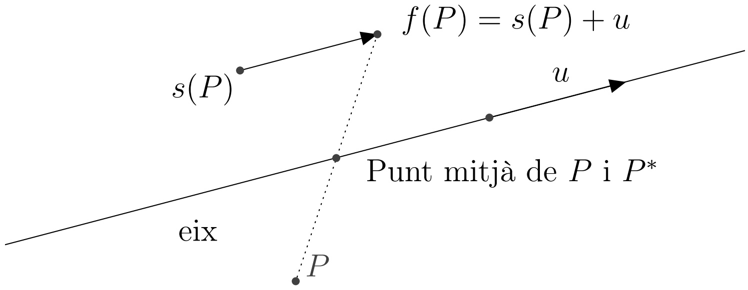


Figura 7.1: Simetria axial seguida d'una translació.

Exemple 7.1.7. Trobem el vector de la translació del sistema

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{25} \\ -\frac{2}{25} \end{pmatrix}, \quad M^T M = \mathbb{I}, \ \det M = -1. \tag{7.1.12}$$

Resolució. Així doncs, $\tilde{f}$ és un endomorfisme ortogonal impropi. f no té punts fixos implica que f és una reflexió amb lliscament. Per tant:

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{32}{25}x - \tfrac{24}{25}y + \tfrac{1}{25} &= 0 \\ -\tfrac{24}{25}x - \tfrac{18}{25}y - \tfrac{2}{25} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ no té solucions.} \tag{7.1.13}$$

La recta invariant passa pel punt mitjà de (x, y) i (x^*, y^*) per a x, y arbitraris. Per exemple:

$$\left.\begin{aligned} p = (0,0), \ p^* &= (\tfrac{1}{25}, \tfrac{-2}{25}) \\ q = (0,1), \ q^* &= (-\tfrac{23}{25}, \tfrac{1}{5}) \end{aligned}\right\} \ r : 100x + 75y + 1 = 0. \tag{7.1.14}$$

El vector de la translació és $v = \frac{1}{2}\overrightarrow{pp^{**}} = (\frac{33}{625}, \frac{-44}{625})$. ■

Exemple 7.1.8. Trobem les equacions d'una rotació f a $\mathbb{R}^2$ de centre $(2, -1)$ i angle $\frac{\pi}{3}$.

Resolució. La matriu de $\tilde{f}$ en una base ortonormal positiva ha de ser:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{7.1.15}$$

Com que $(2, -1)$ ha de ser un punt fix de f, obtenim:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{7.1.16}$$

■

7.1.1.2 En dimensió 3

Sigui $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ un desplaçament amb $\dim E = 3$. En aquest cas, $\tilde{f} \in O(E) \cong O(3)$.

1. $\det \tilde{f} = 1$: com que $\tilde{f} \in SO(E)$, el teorema espectral ens assegura que existeix una referència ortonormal $\{p; e_1, e_2, e_3\}$ on f s'expressa com

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{7.1.17}$$

1. Si $\alpha = 0$, llavors f és una translació o bé la identitat.
2. Si $\alpha \neq 0$ i $a = 0$, aleshores f té una recta de punts fixos de direcció $\langle e_1 \rangle$. En aquest cas, f és una rotació d'angle α al voltant de la recta de punts fixos.

Com que, en general, la base e_1, e_2, e_3 l'haurem de trobar nosaltres, convé observar els fets següents:

1. El vector e_1 és un vector propi de $\tilde{f}$ de valor propi 1.
2. Els vectors e_2, e_3 poden ser qualsevol base ortonormal del subespai $\langle e_1 \rangle^{\perp}$.
3. L'angle α es pot obtenir immediatament (ja que la traça no depèn del canvi de base) de la igualtat:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} M - 1), \tag{7.1.18}$$

on M és la matriu de $\tilde{f}$ (en qualsevol base). En el cas particular $\alpha = \pi$, resulta que f és una simetria axial (una rotació de 180 graus al voltant d'una recta de punts fixos). Si $\alpha \neq 0$ i $a \neq 0$, llavors f no té punts fixos, ja que $x = x + a$ no té solucions, i f és la composició d'una rotació d'angle α al voltant d'un eix de direcció $\langle e_1 \rangle$ seguida d'una translació en la direcció $\langle e_1 \rangle$:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & b \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & b \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.1.19}$$

Un desplaçament d'aquest tipus es diu desplaçament helicoidal.

Definició 7.1.9 (Helicoidal). Un moviment helicoidal té una recta invariant i no té punts fixos.

L'angle α satisfà $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} M - 1)$, on M és la matriu de $\tilde{f} \in SO(3)$ en qualsevol base. La rotació i la translació en un moviment helicoidal commuten.

2. $\det \tilde{f} = -1$. Si $\det \tilde{f} = -1$, llavors el teorema espectral afirma l'existència d'una referència ortonormal $\{p; e_1, e_2, e_3\}$ on f s'expressa com:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{7.1.20}$$

1. En cas que $\alpha = 0$, les equacions d'f queden així:

$$\begin{aligned} x^* &= -x + a \\ y^* &= y + b \\ z^* &= z + c \end{aligned} \tag{7.1.21}$$

Si $b = c = 0$, llavors f té un pla de punts fixos de direcció $\langle e_1 \rangle^{\perp}$, on e_1 és un VEP de VAP -1. En aquest cas, f és una simetria especular. Si $b \neq 0$ o bé $c \neq 0$, llavors f no té punts fixos. És una simetria especular seguida d'una translació de vector paral·lel al pla de la simetria, que és l'únic pla invariant d'f.

2. Si $\alpha \neq 0$, aleshores f és la composició d'una simetria especular i una rotació d'angle α al voltant d'un eix perpendicular al pla de la simetria. La reflexió i la rotació commuten:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & b \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & b \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.1.22}$$

Com que $\tilde{f}$ no té valor propi 1, deduïm que f té un únic punt fix, que és la intersecció de l'eix de la rotació amb el pla de la simetria. En el cas particular $\alpha = \pi$, resulta que f és una simetria central. L'angle de la rotació s'obté de la igualtat:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} M + 1), \tag{7.1.23}$$

on M és la matriu de $\tilde{f}$ en qualsevol base. Rotació i translació en un moviment helicoidal commuten.

Exemple 7.1.10.

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{7.1.24}$$

f és un desplaçament impropi amb un punt fix. Per tant, f és una simetria especular seguida d'una rotació:

$$\begin{aligned} M^T M &= I, \\ \det M &= -1, \\ \operatorname{tr} M &= \tfrac{5}{7}. \end{aligned} \tag{7.1.25}$$

L'angle de la rotació s'obté fent:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} M + 1) = \frac{6}{7} \implies \alpha = 0,5411. \tag{7.1.26}$$

El punt fix de f s'obté resolent el sistema d'equacions $X = MX + B$. El resultat és $p = (-2, 6, -1)$. El subespai propi de $\tilde{f}$ de valor propi -1 és generat per $e_1 = (2, 0, -3)$. Per tant, la recta invariant és $p + \langle e_1 \rangle = (-2, 6, -1) + \langle (2, 0, -3) \rangle$. El pla invariant és:

$$p + \langle e_1 \rangle^\perp : 2x - 3z + 1 = 0. \tag{7.1.27}$$

Si escollim com a referència $\{p; e_1, e_2, e_3\}$ on e_2, e_3 és una base ortonormal de $\langle e_1 \rangle^\perp$, aleshores l'expressió de f queda així:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{7} & -\frac{\sqrt{13}}{7} \\ 0 & \frac{\sqrt{13}}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.1.28}$$

una rotoreflexió d'angle 31º, on l'origen de coordenades és un punt fix. Podem fer explícit, si volem, el canvi de base:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 0, -3), \; e_2 = (0, 1, 0), \; e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 0, 2).$$

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{\sqrt{13}}{7} \\ 0 & -\frac{\sqrt{13}}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}, \tag{7.1.29}$$

on $C^{-1} = C^T$, ja que C és ortogonal. Amb l'orientació corresponent a la base e_1, e_2, e_3 que hem escollit, l'angle de gir és negatiu.

7.2 Resultats finals

Denotem per $E(n)$ el conjunt dels desplaçaments $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ amb el producte escalar ordinari. Si $f \in E(n)$, llavors l'endomorfisme associat $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és ortogonal; és a dir,

$$f \in E(n) \implies \tilde{f} \in O(n). \tag{7.2.1}$$

Proposició 7.2.1. *El conjunt $E(n)$ és un grup amb la composició. A més, l'aplicació*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E(n) & \longrightarrow & O(n) \\ & f & \longmapsto & \Phi(f) := \tilde{f} \end{array} \tag{7.2.2}$$

és un morfisme de grups.

Demostració. La demostració és directa:

$$\Phi(g \circ f) = \widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f} = \Phi(g) \circ \Phi(f), \ \forall f, g \in E(n). \tag{7.2.3}$$

■

Proposició 7.2.2. *Aquest morfisme Φ és exhaustiu, és a dir, $\forall \varphi \in O(n) \exists f \in E(n) \mid \tilde{f} = \varphi$.*

Demostració. Donat $\varphi \in O(n)$, escollim un punt $p \in \mathbb{R}^n$ qualsevol i definim $f(x) = p + \varphi(\overrightarrow{px})$. Llavors:

$$f(a + v) = p + \varphi(\overrightarrow{pa} + v) = p + \varphi(\overrightarrow{pa}) + \varphi(v) = f(a) + \varphi(v), \tag{7.2.4}$$

d'on f és una afinitat amb $\tilde{f} = \varphi$. Com que φ és ortogonal, f és un desplaçament. ■

Aleshores, $\Phi : E(n) \longrightarrow O(n)$ és un epimorfisme de grups. El seu nucli és

$$\ker(\Phi) = \{f \in E(n) \mid \tilde{f} = \mathbb{I}\} = \{\text{translacions a } \mathbb{R}^n\}. \tag{7.2.5}$$

Per tant, les translacions són un subgrup normal de $E(n)$. Si el denotem per $T(n)$, llavors $E(n)/T(n)$ i $O(n)$ tracen un isomorfisme entre ells. Si escollim un sistema de referència $\{p; e_1, \dots, e_n\}$ cada $f \in E(n)$ s'expressa com $X^* = MX + B$ i l'endomorfisme $\tilde{f} \in O(n)$ és el que té la matriu M en la base $e_1, \dots, e_n$.

Observació 7.2.3. L'isomorfisme $E(n)/T(n) \cong O(n)$ ens diu que dos desplaçaments f, g tenen el mateix endomorfisme associat si, i només si, $g^{-1} \circ f$ és una translació; és a dir, si g és composició de f amb una translació.

Cada endomorfisme ortogonal $\varphi \in O(n)$ determina un desplaçament donat per $X^* = MX$, on M és la matriu de φ en la base $e_1, \dots, e_n$. Això ens dona un morfisme de grups:

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & O(n) & \longrightarrow & E(n) \\ & \tilde{f} & \longmapsto & \Psi(f) := f \end{array} \tag{7.2.6}$$

que és injectiu i satisfà $\Phi \circ \Psi = \mathbb{I}$. En aquesta situació: Es diu que el monomorfisme Ψ *escindeix* l'epimorfisme Φ i que el treu $E(n)$ de desplaçaments de $\mathbb{R}^n$ és el producte semidirecte del grup $O(n)$ d'endomorfismes ortogonals i el grup $T(n)$ de les translacions. Tot i que el grup $T(n)$ és commutatiu, en general els seus elements no commuten amb els de $E(n)$.

$$\begin{tikzcd} T(n) \arrow[r, tail] & E(n) \arrow[r, two heads] & O(n) \arrow[l, tail, bend left] \end{tikzcd}$$

Figura 7.2: Cadena de morfismes: la segona correspon a Φ i la tercera, a Ψ.

Bibliografia

[Que85] Michel Queysanne. *Algebra básica*. Vicens-Vives, 1985.

[CL09] Manuel Castellet i Irene Llerena. *Àlgebra lineal i geometria*. Vol. 1. Univ. Autònoma de Barcelona, 2009.

[Cre13] Teresa Crespo. *Àlgebra Lineal*. Notes de l'assignatura d'Àlgebra Lineal. Gen. de 2013.

Índex terminològic