*Càlcul Integral en Diverses Variables*

# Cinc Cèntims de Càlcul

Mario Vilar

2 d'agost de 2023

Universitat de Barcelona

## Índex

1

# Mesura de Lebesgue

**Definició 1.1 (Mesura i interval a $\mathbb{R}^n$).** La mesura (*longitud*) d'un *interval* $[a, b]$ (o bé $[a, b)$, $(a, b]$, o $(a, b)$) a $\mathbb{R}$ és $|[a, b]| = b - a$. Diem *interval a* $\mathbb{R}^n$ a qualsevol conjunt de la forma $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, amb $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$, o a qualsevol obtingut de manera semblant reemplaçant qualsevol dels intervals $[a_j, b_j]$ per $[a_j, b_j)$, $(a_j, b_j]$ o bé $(a_j, b_j)$. D'aquests intervals, a vegades també se'n diuen *rectangles*. L'interval és *obert* si els intervals a $\mathbb{R}$ que el produeixen són tots oberts; és a dir, si $I$ té la forma $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$. Anàlogament, $I$ és *tancat* si és de la forma $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

**Definició 1.2 (Volum d'un interval).** Sigui $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ un interval obert. Definim la *mesura exterior per intervals* o *volum d'un interval* i la denotem per $m^*(I)$ o $v(I)$ com el producte de les seves llargàries, és a dir:

$$m^*(I) = v(I) = |I|^* = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

A $\mathbb{R}^2$ un interval és un rectangle, i la seva mesura és l'àrea. A $\mathbb{R}^3$ un interval és un paral·lelepípede i la seva mesura és el volum.

**Definició 1.3 (Mesura exterior de Lebesgue).** Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$. Diem mesura exterior de Lebesgue d'$A$ a l'ínfim:

$$|A|^* = m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ I_i \text{ interval obert} \right\}.$$

Per tant, de tots els possibles recobriments d'$A$ per intervals, en calculem la suma de volums dels intervals i en prenem l'ínfim.

**Propietat 1.4.**

1. *La mesura exterior del conjunt buit és 0.*
2. *Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ i $A \subset B$, llavors $|A|^* \leq |B|^*$.*
3. *Si $A$ és finit o numerable, $|A|^* = 0$.*

*Demostració.* Això és així perquè tot recobriment per intervals de $B$ és també un recobriment per intervals d'$A$ i, per tant, l'ínfim que defineix $|B|^*$ s'agafa sobre un conjunt de recobriments més petit que el conjunt de recobriments d'$A$. L'últim apartat es resol de manera semblant a com hem vist que la mesura d'un sol punt és 0: sigui $\{x_k\}$ un conjunt numerable. Per a tot $k$, tenim $I_k = (x_k - \frac{\varepsilon}{2}, x_k + \frac{\varepsilon}{2})$ és un interval obert que conté $x_k$; és a dir, $|I_k| = \frac{\varepsilon}{2^k}$. Si calculem, doncs:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Obtenim $|\{x_k\}| = \inf\{\sum_k |I_k| \mid x_k \subset \bigcup_k I_k\} = 0$, ja que tots són 0. ■

**Propietat 1.5 (Invariant per translacions).** *A més, $m^*$ és invariant per translacions; això és, per a tot $A \subset \mathbb{R}^n$ i per a tot $x \in \mathbb{R}^n$ tenim $m^*(A+x) = m^*(A)$. Existeix un recobriment en el desplaçat si, i només si, existeix un recobriment en el mateix conjunt:*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \iff A + x \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i + x)$$

*També, el volum és el mateix, $v(I) = v(I+x)$.*

**Propietat 1.6 ($\sigma$-subadditivitat).** *La mesura exterior de Lebesgue, $m^*$, és $\sigma$-subadditiva:*

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k),\ \forall A_k \subset \mathbb{R}^n.$$

**Definició 1.7 ($\sigma$-àlgebra).** Si $\mathcal{X}$ és un espai $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, un família $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ és una $\sigma$-àlgebra si:

1. $\mathcal{X} \in \Sigma$.
2. Si $E \in \Sigma$, aleshores $E^C \in \Sigma$.
3. Si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$, aleshores $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \Sigma$.

**Definició 1.8 (Mesura positiva).** Sigui $\mathcal{X}$ i sigui $\Sigma \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ una $\sigma$-àlgebra. Una funció $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, +\infty]$ és una *mesura positiva* si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu$ és $\sigma$-additiva: si $E_j \in \Sigma$ són disjunts dos a dos, llavors:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

*A tall d'observació, la mesura exterior és positiva*.

**Definició 1.9 (Conjunt mesurable Lebesgue).** Sigui $E \subset \mathbb{R}^n$. Diem que $E$ és mesurable Lebesgue si per a tot $A \subset \mathbb{R}^n$ es dona el següent:

$$|A|^* = |A \cap E|^* + |A \cap E^C|^*.$$

Alternativament, un conjunt $A$ és mesurable Lebesgue si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix un obert $\mathcal{U} \supset A$ tal que $m^*(\mathcal{U} \setminus A) \leq \varepsilon$. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ és mesurable, definim $m(A) = |A| = m^*(A)$.

**Definició 1.10 ($\sigma$-àlgebra de conjunts mesurables Lebesgue).** Els conjunts $E$ que tenen aquesta propietat formen una $\sigma$-àlgebra, denotada $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i anomenada la *$\sigma$-àlgebra de conjunts mesurables Lebesgue*.

**Definició 1.11 (Mesura de Lebesgue).** La mesura exterior restringida a $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ és una mesura positiva, anomenada *mesura de Lebesgue*.

$$\begin{array}{rccl} |\cdot| : & \mu(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & E & \longrightarrow & \mu(E) = |E| \end{array}$$

Per a $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ denotarem $|E|$ en lloc d'$|E|^*$ (tot i que siguin el mateix valor).

**Propietat 1.12.**

1. *Si $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i $A \subset B$, $|A| \leq |B|$.*
2. *Si $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i $A \subset B$, $|B \setminus A| = |B| - |A|$ sempre que $|A| < +\infty$.*
3. *Si $E_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $j \geq 1$, formen una successió ascendent, $E_j \subset E_{j+1}$, per a tot $j \geq 1$, llavors $|\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j| = \lim_{j\to\infty} |E_j|$.*
4. *Invariància per translacions i simetria respecte l'origen. Com ja hem vist per a mesures exteriors, 1.5, si $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, aleshores:*
   - $x + E = \{x + y \mid y \in E\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *i* $|x + E| = |E|$.
   - $-E = \{-x \mid x \in E\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *i* $|-E| = |E|$ *(la mesura positiva és una funció parella).*
5. *Si $I$ és interval, $I \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i $|I| = v(I)$.*

**Observació 1.13.** Els conjunts oberts (i, per tant, tancats) són mesurables. Essent $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ una $\sigma$-àlgebra, també són mesurables els conjunts anomenats:

- $G_\sigma$ és la intersecció numerable d'oberts.
- $F_\sigma$ és la unió numerable de tancats.

2

# Funcions mesurables i simples

**Proposició 2.1.** *Sigui $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable. Són equivalents:*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *el conjunt* $f^{-1}(\alpha, +\infty] = \{x \in E \mid f(x) > \alpha\}$ *és mesurable.*
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *el conjunt* $f^{-1}[\alpha, +\infty] = \{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}$ *és mesurable.*
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *el conjunt* $f^{-1}[-\infty, \alpha) = \{x \in E \mid f(x) < \alpha\}$ *és mesurable.*
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *el conjunt* $f^{-1}[-\infty, \alpha] = \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$ *és mesurable.*

*Quan es compleixen aquestes condicions, també es dona que per a tot $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, $f^{-1}(\{\alpha\}) = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ és mesurable.*

**Definició 2.2 (Funció mesurable).** Una funció $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ és *mesurable* si $E$ és mesurable i es compleix algun dels apartats de la proposició anterior.

**Exemple 2.3 (Exemples de funcions mesurables).**

1. Funcions constants.
2. Funcions característiques de conjunts mesurables.
3. Funcions contínues.
4. Funcions iguals a una funció mesurable llevat, potser, algun conjunt de mesura zero.

**Propietat 2.4.** *Donada $f$, tenim $f^+ = \max\{f, 0\}$ i $f^- = \max\{-f, 0\}$. D'aquesta manera, $f = f^+ - f^-$ i $|f| = f^+ + f^-$.*

1. *Siguin $c \in \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funcions mesurables. Aleshores:*

$$cf,\ f+g,\ f\cdot g;\ \frac{f}{g}[1],\ \max\{f,g\},\ |f|,\ f^+,\ f^-$$

*són funcions mesurables.*

2. *Siguin $f_k : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, funcions mesurables. Aleshores:*

$$\inf_k f_k,\ \sup_k f_k,\ \underline{\lim}_{k\to\infty} f_k,\ \overline{\lim}_{k\to\infty} f_k,\ \lim_{k\to\infty} f_k$$

*són funcions mesurables (sempre que aquests ínfims, suprems i límits existeixin almost everywhere, $x \in E$).*

**Definició 2.5 (Funció simple).** Una funció $s : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es diu *simple* si és de la forma

$$s(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{A_k}(x),\ x \in E,$$

on $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, $\chi$ és la funció característica i $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ són disjunts dos a dos.

**Teorema 2.6.** *Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable. La successió $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ de funcions simples i positives:*

$$s_m = \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m} \cdot \chi_{E(k,m)} + m\chi_{F(m)},\ m \in \mathbb{N},$$

*amb $E(k,m) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{k-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{x}{2^m}\}$ i $F(m) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq m\}$ és creixent ($s_{n+1}(x) \geq s_n(x)$ per a tot $x$) i $\lim_{m\to\infty} s_m(x) = f(x)$.*

**Propietat 2.7 (Propietats de les funcions simples).** *Siguin $c \in \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funcions simples. Aleshores:*

$$cf,\ f+g,\ f\cdot g;\ \frac{f}{g}[2],\ \max\{f,g\},\ |f|,\ f^+,\ f^-$$

*són funcions simples.*

# 3 Integral de Lebesgue

## 3.1 Primer pas

**Definició 3.1 (Integració de funcions simples).** Sigui $s = \sum_{k=1}^{N} x_n \chi_{A_k}$, $x_k \geq 0$ i $k = 1, \ldots, N$ i $A_k$ mesurables (és a dir, $s$ és una funció simple positiva). La integral de $s$ es defineix de la manera que esperem:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cdot |A_k|.$$

[1] Cal suposar que $g(x) \neq 0$ *almost everywhere*.
[2] Tal com hem fet abans, cal suposar que $g(x) \neq 0$ *almost everywhere*.

En general, si $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, definim:

$$\int_E s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |A_k \cap E| = \int_E s \cdot \chi_E.$$

**Propietat 3.2.** *Siguin $s, t \geq 0$ funcions simples, i sigui $\{E_i\}_i$ una col·lecció finita o numerable de conjunts mesurables i disjunts dos a dos, tenim:*

1. *Si $\lambda \geq 0$,*
$$\int_{\mathbb{R}}^{n} \lambda s = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} s.$$
*Aquesta propietat és certa, de fet, per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$, però de moment només tenim dret a integrar funcions simples positives.*
2. *Additivitat:*
$$\int_{\mathbb{R}^n} s + t = \int_{\mathbb{R}^n} s + \int_{\mathbb{R}^n} t.$$
3. *Monotonia: si $0 \leq s \leq t$, aleshores:*
$$\int_{\mathbb{R}^n} s \leq \int_{\mathbb{R}^n} t.$$
4. *$\sigma$-additivitat (respecte el conjunt d'integració):*
$$\int_{\bigcup_i E_i} s = \sum_i \int_{E_i} s.$$

## 3.2 Segon pas

Sigui $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable no negativa. Considerem la família de funcions simples que queden per sota de $f$:

$$S(f) = \{s : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty] \text{ simple i amb } 0 \leq s \leq f\}.$$

En general, si $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, aleshores:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \sup_{s \in S(f)} \int \mathbb{R}^n s \implies \int_E f = \int_{\mathbb{R}^n} f \chi_E = \sup_{s \in S(f\chi_E)} \int_{\mathbb{R}^n} s.$$

**Propietat 3.3 (**Observacions i propietats**).**

1. *Quan $f = s$ simple, aquesta definició coincideix amb la del primer pas.*
2. *Monotonia. Si $0 \leq f \leq g$ i $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, llavors:*
$$\int_E f \leq \int_E g.$$
3. *Si $f \geq 0$ és mesurable i $\lambda \geq 0$, llavors:*
$$\int_E \lambda f = \lambda \int_E f.$$

4. *Si $f \geq 0$ mesurable i $E_1, E_2 \in \mathcal{M}(R^n)$ amb $E_1 \subset E_2$, llavors:*

$$\int_{E_1} f \subset \int_{E_2} f.$$

5. *Si $f \geq 0$ és mesurable i $Z$ és tal que $|Z| = 0$, llavors:*

$$\int_E f = \int_{E\setminus Z} f, \ \forall E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

**Proposició 3.4.** *Si $f \geq 0$ és mesurable i $\int_E f \ll +\infty$, llavors $|\{x \in E \mid f(x) = +\infty\}| = 0$.*

*Demostració.* Per a veure això, definim $Z = \{x \in E \mid f(x) = +\infty\}$, que sabem que és mesurable. Per la monotonia, tant respecte al conjunt d'integració com a la funció, tenim:

$$+\infty > \int_E f \geq \int_Z f = \int_Z (+\infty),$$

d'on deduïm que $|Z| = 0$. Més formalment, considerem $A_n = \{x \in E \mid f(x) > n\}$, $n \in \mathbb{N}$, de manera que $Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Llavors:

$$\int_E f \geq \int_{A_n} f \geq \int_A n = n|A_n|.$$

Per tant, $|A_n| \leq \frac{\int_E f}{n} \longrightarrow 0$ sempre que $n \longrightarrow \infty$. Com que $Z \subset A_n$, també tenim que $|Z| \leq |A_n| \longrightarrow 0$ quan $n \longrightarrow \infty$. ∎

**Proposició 3.5.** *Si $f \geq 0$ és mesurable i $\int_E f = 0$, llavors $|\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}| = 0$.*

*Demostració.* Per a veure això, si diem $A_n = \{x \in E \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$ tenim $\{x \in E \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i:

$$0 = \int_E f \geq \int_{A_n} f \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} A_n;$$

per tant, $|A_n| = 0$ per a tot $n \geq 1$ i

$$|\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}| = \left|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right| = 0.$$ ∎

**Proposició 3.6 (Additivitat).** *Sigui $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i siguin $f, g \geq 0$ mesurables. Aleshores:*

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$

**Propietat 3.7 (Més propietats).**

1. *Si $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i $f_n : E \longrightarrow [0, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, són mesurables; llavors,*

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k.$$

2. *Si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ són conjunts mesurables disjunts dos a dos i $f : \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \longrightarrow [0, +\infty]$ és mesurable, llavors:*

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f.$$

## 3.3 Tercer pas

Prenem una funció mesurable $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Donada $f$ amb signe arbitrari, escrivim $f = f^+ - f^-$. Com que $f^+ = \max\{f, 0\}$ i $f^- = \max\{-f, 0\}$, aquestes funcions són mesurables i, per tant, també ho és $|f| = f^+ + f^-$.

**Definició 3.8 (Integral de Lebesgue).** Sigui $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ i sigui $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable tal que almenys un dels dos valors $\int_E f^+$ i $\int_E f^-$ sigui finit. Llavors, definim la *integral de Lebesgue* de $f$ com:

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

**Definició 3.9 (Funció integrable).** Una funció $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable és integrable si:

$$\int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^- \ll \infty.$$

Denotem per $\mathbb{L}^1(E)$ el conjunt de funcions integrables a $E$.

**Observació 3.10.** *Atenció*. Pot passar que $f$ no sigui integrable però que $\int_E f$ sigui ben definit. De fet, amb les definicions que acabem de veure, això passa quan una de les integrals $\int_E f^+$, $\int_E f^-$ és finita i l'altra no.

**Proposició 3.11.** *Sigui $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, un conjunt mesurable.*

1. *$\mathbb{L}^1(E)$ és un espai vectorials sobre el qual la integral de Lesbesgue és una aplicació lineal. És a dir, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $f, g \in \mathbb{L}^1(E)$, llavors $\alpha f + \beta g \in \mathbb{L}^1(E)$ i:*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

2. *Si $f, g \in \mathbb{L}^1(E)$ i $f \leq g$:*

$$\int_E f \leq \int_E g \text{ i } \left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|.$$

3. *Invariància per translacions i simetries. Si $v \in \mathbb{R}^n$ és fix i $f \in \mathbb{L}^1(E)$, llavors $f(x-v) \in \mathbb{L}^1(E+v)$ i:*

$$\int_{E+V} f(x-v)dx = \int_E f(x)dx.$$

*De manera semblant, $f(-x) \in \mathbb{L}^1(-E)$ i:*

$$\int_{-E} f(-x)dx = \int_E f(x)dx.$$

*Aquí, $E + v = \{x + v \mid x \in E\}$ i $-E = \{-x \mid x \in E\}$.*

**Proposició 3.12.**

1. *Si $f \in \mathbb{L}^1(E)$ i $g$ és mesurable tal que $|g| \leq f$, llavors $g \in \mathbb{L}^1(E)$.*
2. *Si $f$ és mesurable i acotada i $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tal que tenim $|E| \ll \infty$, llavors $f \in \mathbb{L}^1(E)$.*

## 4 Riemann i Lebesgue

**Teorema 4.1 (Relació entre Riemann i Lebesgue).** *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathscr{R}([a, b])$, aleshores $f \in \mathbb{L}^1([a, b])$ i:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a.b]} f.$$

**Observació 4.2.**

1. La integral de Lebesgue de les funcions integrables Riemann és precisament el valor de la integral de Riemann.
2. Hi ha funcions integrables en el sentit de Lebesgue que no ho són en el sentit de Riemann.

**Teorema 4.3 (Integral impròpia i integral de Lebesgue).** *Sigui $f : [a, b) \in \mathbb{R}$ amb $-\infty < a < b \leq +\infty$, localment integrable Riemann. Són equivalents:*

1. *$\int_a^b f(x)dx$ és absolutament convergent.*
2. *$f \in \mathbb{L}^1([a, b))$.*

*Quan això passa, $\int_a^{b^-} f(x)dx = \int_{[a,b)} f$.*

## 5 Càlcul d'integrals

**Teorema 5.1 (Teorema de Tonelli).** *Sigui $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow [0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$ mesurable tal que $(x, y) \longmapsto f(x, y)$. Llavors:*

1. *Per a gairebé tot $x \in \mathbb{R}^p$ la funció $f(x, \cdot) : \mathbb{R}^q \longrightarrow [0, +\infty]$ és mesurable. Anàlogament, per a gairebé tot $y \in \mathbb{R}^q$ la funció $f(\cdot, y) : \mathbb{R}^p \longrightarrow [0, +\infty]$ és mesurable.*
2. *Les funcions $\varphi_f : \mathbb{R}^p \longrightarrow [0, +\infty]$ i $\psi_f : \mathbb{R}^q \longrightarrow [0, +\infty]$ definides per:*

$$\varphi_f(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, \cdot) \text{ a.e } x \in \mathbb{R}^p$$
$$\psi_f(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(\cdot, y) \text{ a.e } y \in \mathbb{R}^q$$

   *són mesurables i $\int_{\mathbb{R}^p} \varphi_f = \int_{\mathbb{R}^q} \psi = \int_{\mathbb{R}^n} f$.*

3. *Obtenim les següents igualtats:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_f(x) &= \int_{\mathbb{R}^p} \left( \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dm_q(y) \right) dm_p(x), \\ = \int_{\mathbb{R}^q} \varphi_f(y) &= \int_{\mathbb{R}^q} \left( \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dm_p(x) \right) dm_q(y). \end{aligned}$$

**Observació 5.2.**

- La notació $\int_{\mathbb{R}^p} g(x)dm_p(x)$ indica que integrem $g$ respecte la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}^p$.
- Usant el resultat general que $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$, aquest teorema a la pràctica gairebé s'utilitza amb $p = n-1$ i $q = 1$. Aleshores, el tercer apartat diu que:
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_n)dm_n(x_1,\dots,x_n) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_n)dm_1(x_n)\right)dm_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}).\end{aligned}$$
A partir d'aquí es va iterant la integració per a les variables restants.
- El tercer apartat és el que diu que podem calcular la integral $\int_{\mathbb{R}^n} f$ fent integració iterada i en l'ordre que més ens convingui. La resta d'apartats *només* diuen que totes les funcions que intervenen a la integració iterada són mesurables i, per tant, tenim dret a integrar.

**Teorema 5.3 (Teorema de Fubini).** *Sigui $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrable a $\mathbb{R}^n$. Llavors, els dos primers apartats del teorema de Tonelli valen canviant mesurable per integrable i el tercer val sense canvi. Aleshores, podem integrar iteradament.*

**Observació 5.4 (Comentari sobre el teorema de Tonelli).** L'única hipòtesi sobre la funció $f$ a integrar és $f \geq 0$. Si una de les integrals iterades és finita, les altres també, totes coincideixen i valen $\int_E f = \int_E |f|$. En particular, $f \in \mathbb{L}^1(E)$. Si una de les integrals iterades és $+\infty$, llavors ho són totes i $f \notin \mathbb{L}^1(E)$.

**Observació 5.5 (Comentari sobre el teorema de Fubini).** Que $f \in \mathbb{L}^1(E)$ és una hipòtesi, *no* es dedueix del fet que alguna de les integrals iterades sigui finita. Per a comprovar si $f \in \mathbb{L}^1(E)$ podem aplicar el teorema de Tonelli a $|f|$. Un cop veiem que alguna de les integrals iterades de $\int_E |f|$ és finita, ja tenim que $f \in \mathbb{L}^1(E)$ i, per tant, podem calcular $\int_E f$ iterant integrals d'una variable.

# 6 Canvis de variable

**Definició 6.1 (Canvi de variable, dimensió 1).** Suposem que tenim una funció $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable Riemann (amb $a < b$). Un *canvi de variable* és una aplicació $\phi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ de classe $C^1$, bijectiva i amb $\phi^{-1}$ també de classe $C^1$. Aleshores:
$$\phi([c,d]) = \begin{cases}[\phi(c),\phi(d)], & \text{si } \phi' > 0,\\ [\phi(d),\phi(c)], & \text{si } \phi' < 0,\end{cases}$$
Llavors, $(f\circ\phi)\cdot\phi'$ és integrable Riemann i
$$\int_c^d f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(y)dy \left(\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(y)dy \text{ si } \phi' > 0 \text{ i } -\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(y)dy \text{ si } \phi' < 0\right).$$

Una manera alternativa d'escriure això, tenint en compte el signe de $\phi'$, és:

$$\int_c^d f(\phi(x))|\phi'(x)|dx = \int_a^b f(y)dy.$$

Veurem tot seguit que, en aquesta forma, la igualtat s'estén a diverses variables.

**Teorema 6.2 (Canvi de variable).** *Siguin $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ oberts de $\mathbb{R}^n$ i sigui $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ un difeomorfisme de classe $C^1$. Sigui $E \subset \mathcal{U}$ mesurable i sigui $f : \phi(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ funció mesurable. Aleshores:*

- *$F = \phi(E)$ és mesurable.*
- *La següent funció és mesurable:*

$$\begin{array}{rccl}(f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)| : & E & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & x & \longmapsto & f(\phi(x)) \cdot |\det(D\phi(x))|.\end{array}$$

- *Si $f \geq 0$ o si $f \in \mathbb{L}^1(\phi(E))$, la igualtat següent se sosté:*

$$\int_F f = \int_{\phi^{-1}(F)} (f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)|.$$

*Idea de la demostració, 6.2.* Observem en primer lloc que si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és lineal i bijectiva (isomorfisme) llavors, per a tot $E$ mesurable, $|T(E)| = |\det(T)| \cdot |E|$. És suficient veure això per a $E = I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ interval, ja que, aleshores, podem veure-ho per a oberts i, llavors, per aproximació, a $E$ mesurable qualsevol. Tot $T$ és composició de transformacions de la forma:

$$\begin{aligned} T_1(x_1, \ldots, x_n) &= (kx_1, x_2 \ldots, x_n) \\ T_2(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \\ T_3(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1 + x_2, x_2 \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Per a la primera:

$$|T_1(I)| = |(ka_1, kb_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)| = |k| \cdot |I| = |\det(T_1)| \cdot |I|.$$

Per a la segona és evident que:

$$|T_2(I)| = |(a_1, kb_1) \times (a_j, b_j) \times \cdots \times (a_i, b_i) \times (a_n, b_n)| = |I| = |\det(T_2)| \cdot |I|.$$

Finalment,

$$\begin{aligned} |T_3(I)| = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1+x_2}^{b_1+x_2} dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n &= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} (b_1 - a_1) dx_2 \cdots dx_n \\ &= |I| = |\det(I_3)| \cdot |I|. \end{aligned}$$

A partir d'aquí, es fa una descomposició del domini d'$E$ de les noves variables en intervals petits, on $D\phi$ és un isomorfisme, s'aplica la propietat que acabem de veure i, per aproximació, es dedueix el teorema. ■

**Observació 6.3.**

1. Si diem $F = \phi(E)$ i tenim $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f \geq 0$ o bé $f \in \mathbb{L}^1(F)$, aleshores:
$$\int_F f(x)dm(x) = \int_{\phi^{-1}(F)} f(\phi(y)) \cdot |\det(D\phi(y))|dm(y),$$
on $\phi : E \longrightarrow F$ assigna $y \longmapsto \phi(y) = x$ és un difeomorfisme de classe $C^1$. *És normalment en aquesta forma que utilitzem el teorema del canvi de variable.*
2. Si $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ és obert i $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, el teorema de la funció inversa diu que són equivalents:
   - $\mathcal{V} = \phi(\mathcal{U})$ és obert de $\mathbb{R}^n$ i $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ és un canvi de variable.
   - $\phi$ és injectiva de classe $C^1$ i $\det(D\phi(x)) \neq 0$ per a tot $x \in \mathcal{U}$.

**Observació 6.4.** Com que $D\phi(u, v) = D\phi(\phi^{-1}(x, y))$ i, per la regla de la cadena,
$$D\phi(\phi^{-1}(x, y)) \cdot D\phi^{-1}(x, y) = Id.$$
Tenim que $\det(D\phi(u, v)) = \frac{1}{\det(D\phi^{-1}(u,v))}$. Això vol dir que si ho preferim, o ens convé més, podem calcular $|\det(D\phi(u, v))|$ fent l'invers $|\det \phi^{-1}(x, y)|$.

## 6.1 Coordenades polars

Posem $x = r\cos(\theta)$ i $y = r\sin(\theta)$, on $r$ és la distància de $(x, y)$ a $(0, 0)$ i $\theta$ l'angle que formen el vector $(x, y)$ i el vector $(1, 0)$. Per a què $(x, y) = \phi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ sigui bijectiva cal que $r > 0$ i $\theta \in (0, 2\pi)$ i, per tant, tenim estrictament una bijecció:
$$\phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}.$$
És a dir, no tenim un canvi per a tot $\mathbb{R}^2$, sinó per a $\mathbb{R}^2$ llevat d'una semirecta. Com que el conjunt que no recobrim té mesura zero (i és irrellevant a la integració) a la pràctica accentuarem com si fos un canvi a tot $\mathbb{R}^2$; és a dir, utilitzarem que per a $f$ mesurable:
$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}^2\setminus[0,+\infty)} f.$$
Tal com la tenim definida més amunt obtenim, per tant, $\phi$ de classe $C^1$ i bijectiva. Calculem el determinant jacobià:
$$|\det(D\phi(r, \theta))| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial r} & \frac{\partial\phi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial r} & \frac{\partial\phi_2}{\partial\theta} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{matrix} \right\| = r > 0.$$
Com que el jacobià és no nul, $\phi$ és un difeomorfisme; és a dir, un *canvi de variable*. Aleshores, si $A \subset \mathbb{R}^2$ és mesurable, el teorema del canvi de variable dona:
$$\int_A f(x, y)dm_2(x, y) = \int_{\phi^{-1}(A)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r \cdot d\theta dr.$$
De manera que amb aquestes dues noves variables obtenim un càlcul equivalent. De fet, com $\phi$ és bijectiva, l'expressió de la inversa és $\phi^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(\frac{y}{x}))$.

## 6.2 Coordenades cilíndriques

Aquí fem coordenades polars en $x$, $y$ (o en una altra parella de variables) i deixem $z$ sense canviar. Tindrem $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), z = z$ tal que $r > 0, \theta \in (0, 2\pi), z \in \mathbb{R}$, tal que $r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta = \arctan(\frac{y}{x}), z = z$, i un difeomorfisme de classe $C^1$:

$$\phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}.$$

És a dir, aquí deixem de recobrir *la meitat* del pla $y = 0$, que és un conjunt de mesura zero a $\mathbb{R}^3$. Per tant, podem pensar, a efectes d'integració, que recobrim tot $\mathbb{R}^3$. Observem que el jacobià també és $r$:

$$|\det(D\phi)| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial r} & \frac{\partial\phi_1}{\partial\theta} & \frac{\partial\phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial r} & \frac{\partial\phi_2}{\partial\theta} & \frac{\partial\phi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial r} & \frac{\partial\phi_3}{\partial\theta} & \frac{\partial\phi_3}{\partial z} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = r.$$

## 6.3 Coordenades esfèriques

Aquí agafarem les següents coordenades: $x = r\cos(\theta)\cos(\varphi)$, $y = r\cos(\theta)\sin(\varphi)$ i $z = r\sin(\theta)$. Recordem, $r$ és la distància de $(x, y, z)$ a l'origen $(0, 0, 0)$, $\theta$ és la latitud (angle amb l'equador) i $\varphi$ la longitud (angle amb el meridià) que correspon a $y = 0$. Observem que $\theta$ va de $-\frac{\pi}{2}$ (pol sud) fins a $\frac{\pi}{2}$ (pol nord) i $\varphi$ va de $(0, 2\pi)$ (fa una volta sencera). Per a tenir la injectivitat prendrem $r > 0$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i $\varphi \in (0, 2\pi)$ i tindrem:

$$\phi : (0, +\infty) \times \left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0\}.$$

Com als altres casos, com que el tros que queda fora de la bijecció és de mesura zero (la *meitat* d'un pla), a efectes d'integració podem pensar que és un canvi a tot $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} z &= r\sin\theta, \\ x &= r\cos\theta\cos\varphi, \\ y &= r\cos\theta\sin\varphi. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi &= \arctan(\tfrac{y}{x}), \\ \theta &= \arcsin(\tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}), \\ r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned} \quad |D\varphi| = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= |-r^2\cos\theta| = r^2\cos\theta.$$

**Observació 6.5.** Hi ha també coordenades esfèriques a $\mathbb{R}^n$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cdots\cos(\theta_{n-1}), \\ x_2 &= r\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r\cos(\theta_1)\sin(\theta_2), \\ x_n &= r\sin(\theta_1). \end{aligned}\right\} \quad \theta_{n-1} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \theta_1, \ldots, \theta_{n-2} \in (0, 2\pi).$$

El jacobià d'aquest canvi és $|J| = r^{n-1}\cos^{n-2}(\theta_1)\cos^{n-3}(\theta_2)\cdots\cos(\theta_{n-2})$.

# 7 Corbes parametritzades

## 7.1 Definicions bàsiques

**Definició 7.1 (Corba parametritzada).** Una *corba parametritzada* a $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) és una aplicació contínua:

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)). \end{array}$$

Es diu *paràmetre* de la corba a la variable $t$. Al conjunt imatge $\gamma^* = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}$ se'n diu *recorregut*, o *trajectòria*, de la corba.

**Definició 7.2 (Corba tancada, corba simple).** Diem que una corba $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és *tancada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Diem que la corba $\sigma$ és *simple* si és injectiva (és a dir, si la trajectòria no té autointerseccions). Li diem *tancada simple* si $\gamma(a) = \gamma(b)$ i la trajectòria no té autointerseccions (a part de l'$a$ i $b$).


Figura 1: Corba simple i no simple.

**Observació 7.3.** Si $\gamma$ és tancada i l'únic punt on $\gamma$ no és injectiva, és a $\gamma(a) = \gamma(b)$, encara diem que $\gamma$ és simple.

## 7.2 Reparametritzacions

**Definició 7.4 (Canvi de paràmetre).** Un *canvi de paràmetre* o *reparametrització* és una funció:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & [c,d] \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & [a,b] \\ & s & \longmapsto & \varphi(s) = t \end{array}, \quad \varphi \text{ bijectiva i de classe } C^1,$$

i amb inversa també de classe $C^1$.

La corba $\gamma_1 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donada per la composició $\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(s))$ s'anomena *reparametrització* de $\gamma$. Observem que $\gamma_1^* = \gamma$.

**Observació 7.5.** Cal fer atenció a què si el canvi de paràmetre $\varphi$ té $\varphi'(s) < 0$ per a tot $s \in [c,d]$, aleshores el sentit de la corba canvia; és a dir, obtenim de fet una reparametrització de $-\gamma$. En aquest sentit, $-\gamma$ es pot considerar com una reparametrització $\gamma$.

**Definició 7.6 (Longitud de la corba).** Donada una corba $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$, i assignem $t \longmapsto \gamma(t) := (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$; definim la seva longitud com:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \,.$$

En termes físics, la longitud és la integral de la velocitat $\|\gamma'(t)\|$. Si $l(\gamma) \ll \infty$, diem que $\gamma$ és *rectificable*.

**Teorema 7.7.** *Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és de classe $C^1$, llavors $\|\gamma'(t)\| \in \mathbb{L}^1([a,b])$ i la seva longitud és $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$.*

*Demostració.* Com que $\gamma \in C^1$ podem aplicar el teorema del valor intermig de Lagrange, per a cada interval $[t_{j-1}, t_j]$: existeix $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ tal que:

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = \gamma'(\xi_j)(t_j - t_{j-1}).$$

Aleshores, $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \|\gamma'(\xi_j)\|(t_j - t_{j-1})$ i, per tant:

$$L(P) = \sum_{j=1}^{n} \|\gamma'(\xi_j)\|(t_j - t_{j-1}).$$

Aquesta és una suma de Riemann de la integral $\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$, associada a la partició $a = t_0 < \cdots < t_n = b$. ■

**Definició 7.8 (Corba regular).** Una corba $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és regular si $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ per a tot $t \in [a,b]$.

Donada una corba $\gamma$ regular, amb longitud $L = l(\gamma)$, considerem la *reparametrització* (inversa):

$$\begin{array}{rccl} s: & [a,b] & \longrightarrow & [0,L] \\ & t & \longmapsto & s(t) := l(\gamma_{[a,t]}) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| \, du \,. \end{array}$$

És a dir, el nou paràmetre $s$ queda definit per la igualtat $s = \int_a^t \|\gamma'(u)\| \, du$. La funció $s = s(t)$ és derivable amb $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0$; és a dir, *aplicant el teorema de la funció inversa* trobem que $s(t)$ és estrictament monòtona creixent i de classe $C^1$.

$$t_1 < t_2 \implies s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(u)\| \, du > 0.$$

Per tant, $s$ és una bijecció, un *canvi de paràmetre* i, així, la seva inversa local també és de classe $C^1$:

$$\begin{array}{rccl} t: & [0,L] & \longrightarrow & [a,b] \\ & s & \longmapsto & t(s) \end{array}, \ t \in C^1.$$

**Definició 7.9 (Paràmetre arc).** El paràmetre $s$ s'anomena *paràmetre arc* i la parametrització global $\psi : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\psi(s) = \gamma(t(s))$ s'anomena *parametrització per l'arc*.

**Observació 7.10.** *Clarament,* $s(a) = 0$ *i* $s(b) = L$. Comprovem que la corba reparametritzada té velocitat 1; és a dir, que $\|\psi'(s)\| = 1$, usarem que $t = s^{-1}$:

$$\psi'(s) \overset{\text{cadena}}{=} \gamma'(t(s))t'(s) = \gamma'(t)(s^{-1})'(s) = \gamma'(t)\frac{1}{s'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \implies \|\psi'(s)\| = 1.$$

Per tant, tal com volíem:

$$l(\psi([0,s])) = \int_0^s \|\psi'(u)\|\, du = \int_0^s du = s.$$

El nou paràmetre $s$ coincideix amb la longitud del tros de corba des de l'inici fins a $\gamma(s)$. En altres paraules, amb el canvi de variable $\psi$ la nova corba, $\Gamma(s) = \gamma(\psi^{-1}(s))$, el paràmetre $s$ coincideix amb la longitud transcorreguda.

8

# Integrals de funcions i camps

**Definició 8.1 (Integral sobre una corba).** Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ i sigui $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua. Sigui, també, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ corda de classe $C^1$ a trossos amb $\gamma^* \subset A$. La integral de $f$ sobre $\gamma$ és:

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt\,.$$

És a dir, integrem $f$ a la trajectòria de $\gamma$ respecte de l'element de longitud de $\gamma$, $\|\gamma'(t)\|\, dt$.

*Si pensem que $\gamma^*$ és un fil de densitat $f$, aleshores $\int_\gamma f\, ds$ representa la massa total del fil.*

**Propietat 8.2.**

1. *El valor de la integral no depèn de la parametrització triada. Sigui $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ tal que assignem $s \longmapsto \varphi(s) = t$, i.e. canvi de paràmetre. Denotant $\Gamma = \gamma \circ \varphi$:*

$$\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt = \int_c^d f((\gamma\circ\varphi)(s))\|\gamma'(\varphi(s))\| \cdot \|\varphi'(s)\|\, ds$$
$$\int_c^d f((\gamma\circ\varphi)(s))\|(\gamma\circ\varphi)'(s)\|\, ds = \int_c^d f(\Gamma(s))\|\Gamma(s)\|\, ds\,.$$

2. *Propietats heretades de les integrals:*
   - *Si $f_1, f_2$ són ambdues contínues,*
   $$\int_\gamma (f_1 + f_2)\, ds = \int_\gamma f_1\, ds + \int_\gamma f_2\, ds\,.$$
   - *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, el producte escalar amb la integral és la integral del producte escalar:*
   $$\int_\gamma (\lambda f)\, ds = \lambda \int_\gamma f\, ds\,.$$

- *El valor absolut de la integral de la funció és la integral del valor absolut de la funció:*

$$\left|\int_\gamma f\, ds\right| \leq \int_\gamma |f|\, ds\,.$$

- *Si $\alpha \vee \beta = \gamma$*[3]*, tenim el següent:*

$$\int_\gamma f\, ds = \int_\alpha f\, ds + \int_\beta f\, ds\,.$$

- *Aquest és un cas particular de la independència per parametritzacions:*

$$\int_{-\gamma} f\, ds = \int_\gamma f\, ds\,.$$

**Definició 8.3 (Camp vectorial).** Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$. Un camp vectorial a $A$ és una aplicació $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C(A)$, tal que $x \longmapsto F(x)$, on $F(x)$ és $(F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n))$. És a dir, a cada punt $x \in A$ li assignem un vector de $\mathbb{R}^n$.

**Definició 8.4 (Integral d'un camp sobre la corba).** Sigui $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una corba de classe $C^1$ a trossos i sigui $F$ un camp continu definit almenys a $\gamma^*$. La *integral d'F al llarg de $\gamma$* és:

$$\int_\gamma F\, ds = \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt\,.$$

**Observació 8.5.** Observem que integrem la funció que surt de fer el producte escalar de $F(\gamma(t))$ i $\gamma'(t)$, és a dir, $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$. En particular, si el camp és perpendicular a la corba a tot arreu, la integral resultant és 0.

En termes físics, aquesta integral indica el treball realitzat pel camp de forces $F$ per desplaçar una partícula de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

**Notació 8.6.** A vegades, donat un camp $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ a $\mathbb{R}^2$, s'escriu també:

$$\int_\gamma F\, ds = \int_\gamma F_1(x, y)\, dx + F_2(x, y)\, dy\,.$$

Podem pensar que:

$$\int_\gamma F\, ds = \int_\gamma (F_1, F_2) \cdot (dx, dy).$$

9

# Gradient i camps conservatius

Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un obert i sigui $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Recordem que el *vector gradient de $f$* al punt $x \in \Omega$ és $\nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$.

[3] No confondre amb la notació de *Geometria Projectiva*, aquí el símbol $\vee$ indica la *unió* de les dues corbes.

**Definició 9.1 (Camp vectorial conservatiu).** Un camp vectorial $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es diu *conservatiu* si existeix una funció diferenciable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x) = F(x)$, on $x \in \Omega$. Equivalentment:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = F_i(x), \; i = 1, \dots, n.$$

Aleshores, es diu que $f$ és un *potencial* del camp $F$.

**Teorema 9.2 (Teorema fonamental de les integrals en línia).** *Sigui $\Omega$ un obert connex de $\mathbb{R}^n$. Sigui $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camp conservatiu i sigui $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un potencial de $F$. Donada una corba $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$ a trossos i amb $\gamma^* \subset \Omega$, aleshores:*

$$\int_\gamma F\, dr = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

*En particular, si $\gamma$ és una corba tancada, llavors $\int_\gamma F\, dr = 0$.*

El que ens ve a dir aquest teorema és que per a camps conservatius la integral de línia no depèn del camí, només depèn del punt inicial i final.

*Demostració.* Essent $\nabla f = F$, pel teorema fonamental del càlcul:

$$\int_\gamma F\, dr = \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)\, dt = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a).$$

A més, si una corba és tancada, $\gamma(b) = \gamma(a)$, de manera que $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a))$ i, evidentment, $\int_\gamma F\, dr = 0$. ■

**Proposició 9.3.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ obert i connex, i sigui $F$ camp conservatiu de classe $C^1$ (cada component $F_k$, $k = 1 \div n$, és de classe $C^1$). Llavors:*

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}, \; 1 \leq j \leq k \leq n, \; x \in \Omega.$$

*Demostració.* Essent $F$ conservatiu i de classe $C^1$, existeix $f \in C^2(\Omega)$ obert amb $\nabla f = F$; és a dir, amb $F_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ per a tot $j = 1 \div n$. Llavors, essent $f \in C^2$ i per les igualtats de derivades creuades (teorema de Schwartz):

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}, \; 1 \leq j \leq k \leq n.$$ ■

Malauraudament, aquesta condició necessària tan senzilla no sempre és suficient. Afortunadament, tot i que la condició necessària de la proposició no és suficient en general, sí que ho és en molts casos.

**Definició 9.4 (Obert simplement connex).** Un obert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és *simplement connex* si és arc-connex (donats $x_1, x_2 \in \Omega$ existeix un camí continu dins $\Omega$ que uneix $x_1, x_2$) i tot camí tancat dins $\Omega$ pòt deformar-se de manera contínua a un sol punt sense sortir de $\Omega$. *Informalment, diem que a $\mathbb{R}^2$ un domini $\Omega$ és simplement connex si és d'una sola peça i no té forats.*

**Definició 9.5 (Obert estrellat).** Un obert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es diu *estrellat* si existeix $a \in \Omega$ tal que per a tot $x \in \Omega$ el segment $S(a,x) = \{ta + (1-t)x \mid t \in [0,1]\}$, que uneix $x$ i $a$, és tot dins $\Omega$.

**Lema 9.6 (Lema de Poincaré).** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un obert simplement connex i sigui $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camp de classe $C^1$. Aleshores, $F$ és conservatiu si, i només si:*

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x), \ 1 \leq j \leq k \leq n, \ x \in \Omega.$$

*Demostració del cas $\Omega$ estrellat.* Per simplificar, suposem que $a = 0$. Mirem a posteriori com hauria de ser $f$ amb $\nabla f = F$. Dient $\gamma(t) = tx$, $t \in [0,1]$ al segment que uneix $a = 0$ i $x$, caldria:

$$f(x) - f(0) = \int_\gamma \nabla f \, dr = \int_0^1 \nabla f(tx)x \, dt = \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n F_j(tx)x_j \right) dt = \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 F_j(tx)\, dt \right) x_j.$$

Definim, doncs:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 F_j(tx)\, dt \right) x_j.$$

Comprovem que la funció és un potencial de $F$: fixant $k = 1, \ldots, n$ i derivant obtenim:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 F_k(tx)\, dt + \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx) t \, dt \right) x_j.$$

Utilitzant la hipòtesi podem suposar $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx)$ i, per tant:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 F_k(tx)\, dt + \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx) x_j \right) t \, dt = \int_0^1 F_k(tx)\, dt + \int_0^1 \frac{dF_k}{dt}(tx) t \, dt\,.$$

Integrant per parts aquesta darrera integral:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 F_k(t_x)\, dt + (F_k(tx)t)_0^1 - \int_0^1 F_k(tx)\, dt = F_k(x).$$

■

*10*

# Teorema de Green

**Teorema 10.1 (Teorema de Green).** *Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ un domini regular*[4] *de $\mathbb{R}^2$ i sigui $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un camp de classe $C^1$ a un entorn de $\overline{D}$. Aleshores:*

$$\int_{\partial^+ D} F \, dr = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

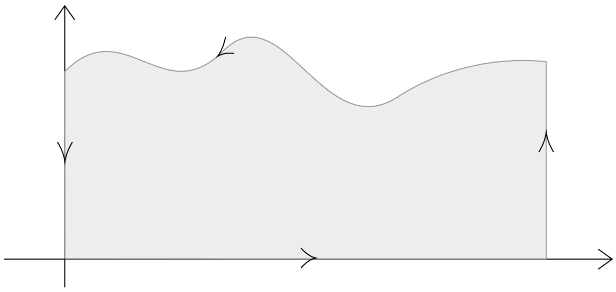
*on $\partial^+ D = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$ indica la corba vora de $D$ recorreguda de manera que el domini queda a l'esquerra.*

[4] Aclarirem més endavant què és un domini regular. De moment, podem pensar que és una definició molt general i que inclou, àmpliament, els casos que tractem habitualment.

**Definició 10.2 (Domini bàsic).** Sigui $D \subset \mathbb{R}^2$ un domini (obert i connex) acotat. Diem que $D$ és bàsic si és de la forma:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, c < y < f(x)\}, \; a, b, c \in \mathbb{R}, \; a < b,$$

a més que fixem $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funció de classe $C^1$ a trossos amb $c < f(x)$ per a tot $x \in [a, b]$. La frontera de $D$ és la unió de tres segments i el tros de la gràfica de $f$ a $[a, b]$:



$$\begin{aligned} \gamma_1 : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_1(x) &= (x, c) \\ \gamma_2 : [c, f(b)] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_2(y) &= (b, y) \\ -\gamma_3 : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & (-\gamma_3)(x) &= (x, f(x)) \\ -\gamma_4 : [c, f(a)] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & (-\gamma_4)(y) &= (a, y) \end{aligned}$$

Aquesta vora és una corba de classe $C^1$ a trossos i tancada.

**Definició 10.3 (Domini elemental).** Un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ es diu elemental si és la imatge per una rotació centrada a (0, 0) d'un domini bàsic; és a dir, $D$ és elemental si existeixen $R_\theta$ rotació centrada a (0, 0) i d'angle $\theta$ i $D_b$ domini bàsic tals que $D = R_\theta(D_b)$. Aleshores, també $\partial^+ D = R_\theta(\partial^+ D_b)$ és una corba de classe $C^1$ a trossos i tancada. *Informalment, diem que els dominis elementals són translacions i rotacions de dominis bàsics.*

**Definició 10.4 (Domini regular).** Diem que $D$ és regular si:

1. $\partial D$ és la unió d'un nombre finit de corbes $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ tancades, simples, de classe $C^1$ a trossos tals que $\alpha_j^* \cap \alpha_k^* = \emptyset$ si $j \neq k$.
2. Per a tot $p \in \partial D$ existeix un entorn obert $\mathcal{U}_p$ de $p$ tal que $D_p = D \cap \mathcal{U}_p$ és un domini elemental i la component $\gamma_s$ (la que no és necessàriament un segment) de $\partial^+ D_p$ coincideix amb $\partial^+ D \cap \mathcal{U}_p$.

Podem pensar, informalment, que $\partial D$ és localment la gràfica d'una funció de classe $C^1$.

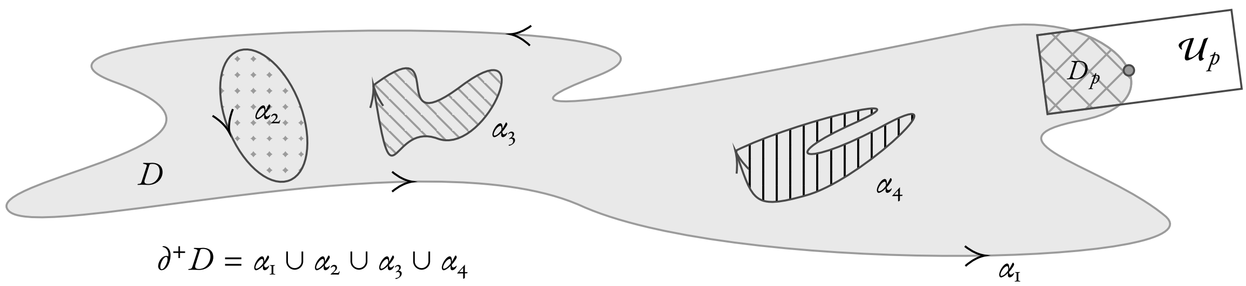



Figura 2: Domini regular.

**Definició 10.5 (Domini elemental, $\mathbb{R}^3$).** Un domini $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es diu *elemental* si, en un sistema de coordenades adequat, és del tipus:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, c < z < f(x, y)\},$$

on $D \subset \mathbb{R}^2$ és un domini regular, $f$ és una funció de classe $C^1$ a un entorn de $\overline{D}$ i $c \in \mathbb{R}$ és una constant, tal que $c < f(x, y)$ per a tot $(x, y) \in \overline{D}$.

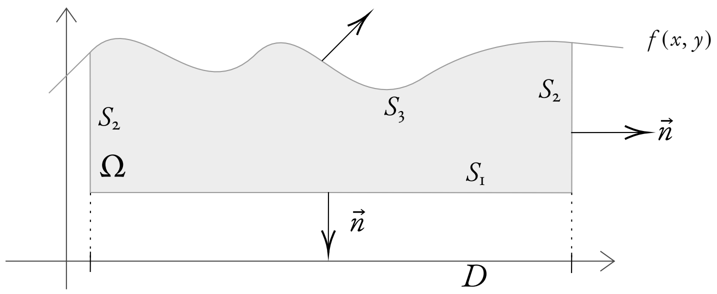



Figura 3: Domini elemental en $\mathbb{R}^3$

La vora de $\Omega$, orientada positivament, està formada per les superfícies regulars orientades:

1. $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = c\}$, orientada per $\vec{n}(x, y, z) = (0, 0, -1)$.
2. $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \partial D, c \leq z \leq f(x, y)\}$ orientada per $\vec{n}(x, y, z) = (\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y), 0)$, on $(\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y))$ és el vector normal unitari exterior a $\partial_+ D$ a $(x, y) \in \partial D$.
3. $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \overline{D}, z = f(x, y)\}$, orientada per:

$$n(x, y, z) = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}, \quad \phi(x, y) = (x, y, f(x, y)), (x, y) \in D.$$

**Definició 10.6 (Domini regular, $\mathbb{R}^3$).** Un obert connex i acotat $\Omega$ és un domini regular de $\mathbb{R}^3$ si:

1. La frontera $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ és una superfície regular sense vora (orientada pel normal exterior a $\Omega$) que anomenem vora de $\Omega$ orientada positivament i escrivim $\partial_+\Omega$.
2. Cada punt $p \in \partial\Omega$ té un entorn $\mathcal{U}_p$ tal que $\mathcal{U}_p \cap \Omega$ és un domini elemental. A més, la superfície $\partial_+(\mathcal{U}_p \cap \Omega)$ conté $\mathcal{U}_p \cap \partial_+\Omega$, amb la mateixa orientació.

*Idea de la demostració del teorema de Green.* Considerem el cas en què $D$ sigui un interval $(a, b) \times (c, d)$. Parametritzant cada segment de la manera habitual i aplicant el teorema fonamental del càlcul tenim:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} F\,dr &= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + \int_{\partial D} Q\,dy \\
&= \int_a^b (P(x, c) - P(x, d))\,dx + \int_c^d (Q(b, y) - Q(a, y))\,dy \\
&= -\int_a^b \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dy\,dx + \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right) dx\,dy\,.
\end{aligned}$$

Per a un domini regular general podem aproximar $\Omega$ interiorment per un domini $\Omega_\delta$ format per quadrats (o rectangles) de costat, com a molt, $\delta$. Aleshores, apliquem el cas anterior a cadascun dels quadrats que conformen $\Omega_\partial$. Si diem $\{Q_i\}$ a aquests quadrats tenim, per una part:

$$\iint_{\Omega_\partial} (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \sum_i \iint_{Q_i} (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \sum_i \int_{\partial^+ Q_i} P\, dx + Q\, dy\,.$$

Observem que les integrals als costats que són vora de dos cubs completament continguts a $\Omega$ es cancel·len, ja que es recorren en sentits oposats. Amb això, totes les vores interiors es cancel·len i sobreviu només la vora exterior de $\Omega_\partial$; queda:

$$\iint_{\Omega_\partial} (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \int_{\partial^+\Omega_\partial} P\, dx + Q\, dy\,.$$

Fent $\partial \to 0$ obtenim el resultat general. ■

II

# Superfícies parametritzades

## II.1 Àrea d'una superfície

**Definició II.1 (Superfície elemental).** Sigui $\mathcal{U}$ un obert connex a $\mathbb{R}^2$ i sigui:

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$$

una aplicació injectiva, de classe $C^1$ i amb rang $D\phi(u,v) = 2$ per a tot $(u,v) \in \mathcal{U}$. Diem *superfície elemental* a la imatge $S_\phi = \phi(\overline{D})$ d'un domini regular $D$ amb $\overline{D} \subset \mathcal{U}$.

**Observació II.2.**

- La injectivitat de $\phi$ es demana perquè no hi hagi punts «dobles» a la superfície, de la mateixa manera que demanàvem a les corbes que fossin simples.
- La condició sobre el rang de $D\phi$ assegura que el conjunt imatge té dimensió 2, que no degenera enlloc. Veurem més endavant que els vectors columna de $D\phi(u,v)$ generen el pla tangent a la superfície al punt $\phi(u,v)$.

Sigui $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ obert connex a $\mathbb{R}^2$ i sigui $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $C^1$, injectiva i amb $\operatorname{rg}(D\phi(u,v)) = 2$ a tot punt $(u,v)$ d'$\mathcal{U}$. Sigui $D \subset \mathcal{U}$ regular i sigui $\phi(\overline{D}) = S$ superfície elemental. Aquestes condicions impliquen que per a qualsevol $p \in S$ el conjunt de vectors tangents a $S$ a $p$ és un subespai vectorial de dimensió 2, l'espai generat pels vectors:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \phi_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} = \phi_v = (x_v, y_v, z_v).$$

Els vectors tangents a la superfície al punt $p$ són tots els punts tangents a alguna corba de classe $C^1$ a $S$ que passi per $p$ (és a dir, les corbes imatge per $\phi$ d'una corba de classe $C^1$ a $D$ que passi per $(u_0, v_0)$ on $\phi(u_0,v_0) = p$).

**Definició II.3 (Espai tangent).** A l'*espai tangent a una superfície* $S$ al punt $p$ la denotem $T_p(s)$, i considerem que són tots els vectors tangents a alguna corba de classe $C^1$ a $S$ i que passa per $p$. Pel que acabem de veure, si $p = \phi(u_0, v_0)$ llavors:

$$T_p(s) = \langle \phi_u(u_0, v_0), \phi_v(u_0, v_0) \rangle .$$

**Definició II.4 (Espai normal).** Un cop tenim l'espai tangent podem considerar l'*espai normal*; és a dir, la recta que passa per $p$ i és perpendicular al pla tangent. L'espai normal es denota per $N_p(S)$.

**Definició II.5 (Vector normal).** Un *vector normal* ve donat de manera natural per $N_\phi = \phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)$. Sovint es considera el *vector normal unitari* que té norma 1:

$$n_{\phi(p)} = \frac{\phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)}{\|\phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0)\|} .$$

**Definició II.6 (Camp normal).** Diem *camp normal a* $S$ al camp vectorial definit a $S$ per:

$$\begin{array}{rccl} F: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p & \longmapsto & F(p) = n_\phi(p) \end{array}$$

és a dir, al camp donat pel normal unitari.

Sigui $S = \phi(\overline{D})$ una superfície elemental amb les mateixes notacions que fins ara.

**Definició II.7 (Àrea d'una superfície).** Definim l'*àrea* de $S$ com:

$$\text{area}(S) = \iint \|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv \, .$$

L'element d'àrea $\|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv$ es pot veure com l'àrea de la imatge per $\phi$ de l'element d'àrea $du\,dv$ a $D$. *L'àrea del paral·lelogram és la norma del producte exterior $\phi_u \times \phi_v$, és a dir, està determinat per $\phi_u$ i $\phi_v$ és precisament $\|\phi_u \times \phi_v\|$.*

**Observació II.8. L'àrea no depèn de la parametrització triada**. És a dir, si tenim una altra parametrització $\psi : \mathcal{U}' \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i un altre domini regular, $D' \subset \mathcal{U}'$ tals que $S = \psi(\overline{D'})$, llavors el valor de l'àrea no canvia:

$$\iint_D \|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv = \iint_D \|\psi_s \times \psi_t\| \, ds \, dt \, .$$

*Demostració.* Anem a veure això tot seguit, amb un argument que, de fet, demostrarà que qualsevol integral de superfície, que veurem més endavant, és independent de la parametrització triada. Sigui, doncs, $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^2$ obert connex i sigui:

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathcal{U}' & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (s,t) & \longmapsto & \psi(s,t) \end{array}$$

de classe $C^1$, injectiva i amb $D\psi(s,t)$ de rang 2 per a tot $(s,t) \in \mathcal{U}'$. Sigui $D' \subset \mathcal{U}'$ regular tal que $S = \psi(D')$.

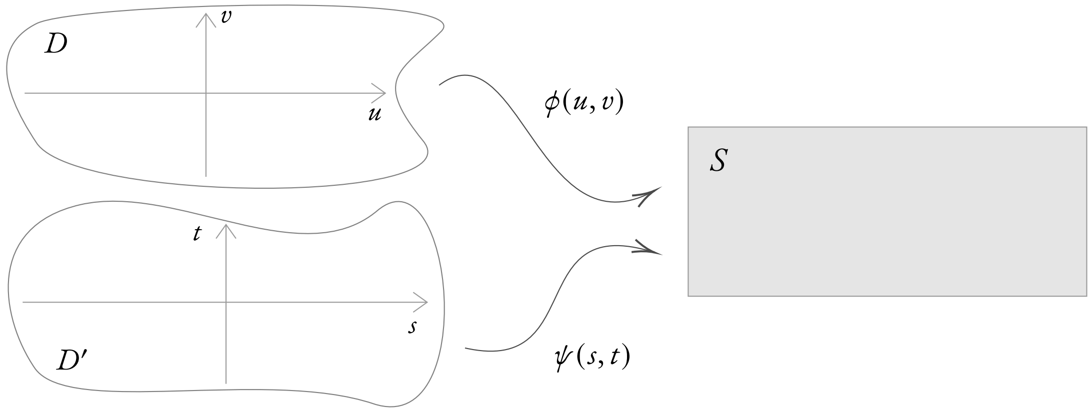



Figura 4: Aplicacions $\phi, \psi$ sobre els dominis $D, D'$.

Com que $\phi$ és bijectiva i de classe $C^1$ de $D$ a $\phi(D) = S$ i $\psi$ també és bijectiva de classe $C^1$ de $D'$ a $\psi(D') = S$, tenim que $g : \psi^{-1} \circ \Phi : D \longrightarrow D'$ és un canvi de variable ($g$ de classe $C^1$, bijectiva i amb inversa de classe $C^1$). En particular, $\det Dg(u,v) \neq 0$; és a dir, $\det Dg(u,v)$ té signe constant. Com que $\phi : \psi \circ g$, la regla de la cadena dona:

$$D\phi(u,v) = D\psi(g(u,v)) \cdot Dg(u,v),\ \forall (u,v) \in D.$$

Expressem aquesta igualtat explícitament; si diem $\psi(s,t) = (\tilde{x}(s,t), \tilde{y}(s,t), \tilde{z}(s,t))$, això és:

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_s \circ g & \tilde{x}_t \circ g \\ \tilde{y}_s \circ g & \tilde{y}_t \circ g \\ \tilde{z}_s \circ g & \tilde{z}_t \circ g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_u & s_v \\ t_u & t_v \end{pmatrix}_{(u,v)}.$$

Recordem que $(s,t) = g(u,v) = (s(u,v), t(u,v))$. Aquesta igualtat permet escriure les components del vector $\phi_u \times \phi_v$:

$$\phi_u \times \phi_v = \left( \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right) = (\psi_s \times \psi_t) \det Dg.$$

Per tant, tenim que $\|\phi_u \times \phi_v\|(u,v) = \|(\psi_s \times \psi_t)(g(u,v))\| \cdot |\det Dg(u,v)|$. Pel teorema del canvi de variable, queda directament:

$$\iint_D \|\phi_u \times \phi_v\|\, du\, dv = \iint_D \|\psi_s \times \psi_t(g(u,v))\| \cdot |\det Dg(u,v)|\, du\, dv = \iint_{D'} \|(\psi_s \times \psi_t)(s,t)\|\, ds\, dt\,. \blacksquare$$

**Observació 11.9.** Essent $\phi_u \times \phi_v = (\psi_s \times \psi_t) \det Dg$, veiem que si $\det Dg(u,v) > 0$ es preserva el signe del vector normal, mentre que si $\det Dg(u,v) < 0$, aleshores canvia l'orientació. **Cada superfície té, doncs, dues possibles orientacions, determinades pel vector normal** (si tenim una parametrització $\phi$ tota altra $\psi$ tindrà la mateixa norma que $\phi$ o la oposada, $n_{p,\phi} = n_{p,\psi}$).

Sigui $S$ una superfície elemental orientada amb el camp normal unitari $n_\phi = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$.

## *11.2* Vora orientada

**Definició 11.10 (Vora de $S$).** Donada la parametrització $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ amb $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ i donat $D \subset \mathcal{U}$ regular amb $\overline{D} \subset \mathcal{U}$, definim la *vora* de $S$ com $\partial S = \phi(\partial D)$ la imatge de la vora de $D$.

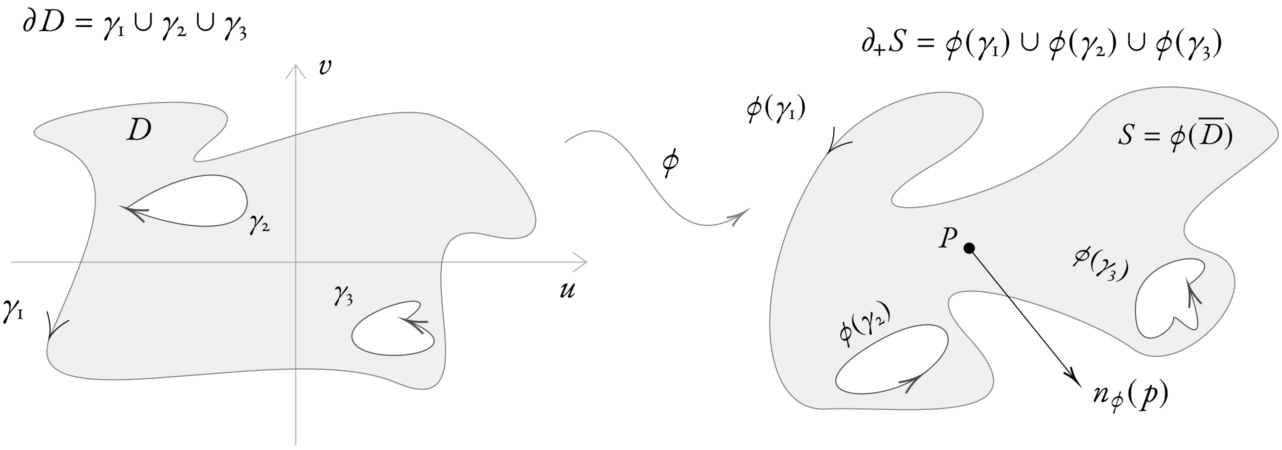



Figura 5: Vora de $S$.

Si $\partial D$ és la reunió de les corbes $\gamma_i$ tal que $i = 1, \dots, N$ de classe $C^1$ a trossos i simples, aleshores $\partial S = \phi(\gamma_1) \cup \cdots \cup \phi(\gamma_n)$.

**Definició 11.11 (Vora orientada).** La *vora orientada* $\partial_+ S$ és tal que cada corba $\phi(\gamma_i)$ té l'orientació induïda pel vector normal $n_\phi$; és a dir, si ens posem drets damunt la superfície en la direcció del normal, la corba $\phi(\gamma_i)$ té l'orientació que fa que, seguint la corba, la superfície quedi a l'esquerra.

*12*

# Integrals de superfície i flux de camp

Sigui $S = \phi(\overline{D})$ superfície elemental, on $D \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ és una regió regular amb $\overline{D} \subset \mathcal{U}$ i $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, on $\phi = \phi(u, v)$ és una parametrització. Sigui $n_\phi$ el camp normal unitari determinat per aquesta parametrització (que té direcció $\phi_u \times \phi_v$).

**Definició 12.1 (Integral de $f$ a $S$).** Donada una funció contínua $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ (camp escalar), definim la *integral de $f$ a $S$* com:

$$\int_S f \, d\sigma = \int_D f(\phi(u, v)) \cdot \|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv;$$

és a dir, com la integral dels valors $f$ a $S$ respecte l'element d'àrea $d\sigma = \|\phi_u \times \phi_v\| \, du \, dv$.

**Proposició 12.2.** *La integral no depèn de la parametrització triada. La prova d'aquest fet és anàloga a la prova que la definició d'àrea d'una superfície no depèn de la parametrització.*

*Demostració*. Amb la mateixa notació d'aleshores, suposem que tenim dues parametritzacions $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\psi : \mathcal{U}' \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i dos dominis regulars $D \subset \mathcal{U}$, $D' \subset \mathcal{U}'$ amb $\phi(\overline{D}) = S = \psi(\overline{D}')$.

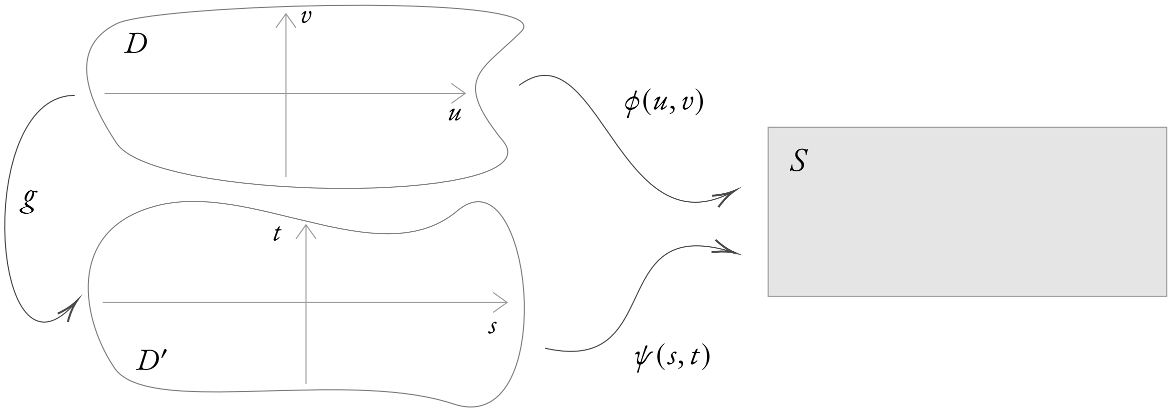



Figura 6: La integral no depèn de la parametrització triada.

Aleshores, $g = \psi^{-1} \circ \phi : D \longrightarrow D'$ és un canvi de variable entre $D$ i $D'$ i es té:

$$\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v) = (\psi_s(g(u,v)) \times \psi_t(g(u,v))) \det Dg(u,v).$$

Per tant, pel teorema del canvi de variable:

$$\begin{aligned}\int_{D'} f(\psi(s,t))\|\psi_s \times \psi_t\|\, ds\, dt &= \int_D f(\psi(g(u,v)))\|\psi_s(g(u,v)) \times \psi_t(g(u,v))\| \det Dg(u,v)\, du\, dv \\ &= \int_D f(\psi(u,v))\|\phi_u(u,v) \times \phi_v(u,v)\|\, du\, dv = \int_S f\, d\sigma\,.\end{aligned}$$

■

**Definició 12.3 (Flux d'un camp a través de la superfície).** Sigui $S = \phi(\overline{D})$ una superfície elemental i sigui $F : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un camp vectorial continu. Definim el flux del camp $F$ a través de la superfície $S$ orientada per $\vec{n}_\phi$ com:

$$\int_S \langle F, \vec{n}_\phi \rangle\, d\sigma = \int_S F \cdot \vec{n}_\phi \cdot d\sigma\,.$$

Si posem això explícitament en termes de la parametrització, tenim:

$$\int_S (F \cdot \vec{n}_\phi)\, d\sigma = \iint_D F(\phi(u,v)) \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} \|\phi_u \times \phi_v\|\, du\, dv = \iint_D F(\phi(u,v))(\phi_u \times \phi_v)\, du\, dv\,.$$

Imaginem que $F$ representa la velocitat (en magnitud i direcció) a la que es mou la partícula de coordenades $(x, y, z)$ d'un fluid.

**Observació 12.4.** El flux de $F$ a través de $S$ indica la quantitat de fluid que travessa $S$ per unitat de temps. Si el camp està alineat amb el normal a la superfície, aquesta quantitat és gran. *Com més paral·lel sigui el camp amb S, menor és aquesta quantitat*. En tot cas, és clar que aquesta quantitat depèn de l'orientació que té el camp respecte $S$.

13

# Rotacional i teorema d'Stokes

**Definició 13.1 (**Rotacional de $F$**).** Donat $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ obert i un camp $F = (P, Q, R) \in C^1(\mathcal{U})$ diem *rotacional de* $F$ al *camp* $\operatorname{rot}(F) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definit per:

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y).$$

Formalment:

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Si $\mathcal{U}$ és un domini simplement connex, $F$ és conservatiu si, i només si, $\operatorname{rot} F = 0$.

1. El vector $\operatorname{rot} F$ indica la rotació provocada pel camp $F$.
2. La direcció de $\operatorname{rot} F$ indica l'eix de rotació i $\|\operatorname{rot} F\|$ la seva magnitud.
3. *Suposem que $F$ són les línies de corrent d'un fluid i posem una bola a la posició $(x, y, z)$ en mig del corrent. La bola rodarà d'acord amb les línies de corrent de $F$, amb eix de rotació i magnitud donats per* $\operatorname{rot} F$.

**Teorema 13.2 (**Teorema d'Stokes**).** *Sigui $S$ una superfície elemental orientada pel normal unitari $\vec{n}$. Sigui $F$ camp de classe $C^1$ definit a tot un entorn de $S$. Aleshores:*

$$\int_{\partial_+ S} F\, dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\sigma\,.$$

**Observació 13.3.**

1. Podem veure aquest resultat com una **generalització del teorema de Green**. Imaginem que estem a la situació del teorema de Green: tenim $D \subset \mathbb{R}^2$ domini regular i $F = (P, Q)$ camp de classe $C^1$. Ara mirem tot això dins $\mathbb{R}^3$: tenim $D$ superfície parametritzada $\phi(x, y) = (x, y, 0)$ tal que $(x, y) \in D$ i un camp $\overline{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$. Com que $D$ és un tros del pla $z = 0$, el vector normal unitari és $\vec{n} = (0, 0, 1)$, ja que $\phi_x \times \phi_y = (0, 0, 1)$. Per altra part,

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ p & q & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, Q_x - P_y).$$

Per tant, el teorema de Stokes, en aquest cas, dona:

$$\int_{\partial_+ S} \overline{F}\, dr = \iint_D (0, 0, Q_x - P_y)(0, 0, 1)\, dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy\,.$$

Com que

$$\int_{\partial^+ S} \overline{F}\, dr = \int_{\partial^+ D} F\, dr = \int_{\partial^+ D} P\, dx + Q\, dy,$$

obtenim exactament el teorema de Green.

2. *Per què és raonable que hi hagi una relació entre la circulació de $F$ a $\partial^+ S$ i la rotació del camp a $S$?* Considerem la situació següent, amb un camp constant horitzontal. Les integrals $\int_{\gamma_1} F$ i $\int_{\gamma_2} F$ valen zero, ja que $F$ i $\gamma'$ són perpendiculars. Les integrals $\int_{\gamma_2} F$ i $\int_{\gamma_4} F$ tenen la mateixa magnitud i signes oposats. Tot plegat, la circulació total a $\partial_+ S$ és 0. Observem que $\operatorname{rot} F = (0,0,0)$, ja que el camp és constant. Sigui ara un camp simètric respecte el pla $z = 0$, amb signes diferents a $z > 0$ i $z < 0$. Aquí, $\int_{\gamma_1} F$ i $\int_{\gamma_3} F$ són zero, com al cas anterior. En canvi, $\int_{\gamma_2} F$ i $\int_{\gamma_4} F$ tenen la mateixa magnitud i el mateix signe. Tot plegat,
$$\int_{\partial_+ S} F = \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_4} F.$$
Aquest camp produeix una rotació al voltant de l'eix $y$, pel canvi de sentit dels vectors a alçada $z = 0$. Finalment, considerem una situació com la del dibuix. Aquí, les quatre integrals $\int_{\gamma_i} F$ són positives ($F$ i $\gamma'$ estan alineats). Per tant, $\int_{\partial_+ S} F$ tindrà un valor *elevat*. Observem que la rotació que produeix el camp també és gran a $S$.

*Demostració del teorema de Stokes*. Siguin, com sempre, $D \subset \mathcal{U}$ regular, amb $\overline{D} \subset \mathcal{U}$, $\phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrització, tals que $S = \phi(\overline{D})$. Sigui $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrització de $\partial_+ D$, de manera que $\Gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\Gamma(t) = \phi(\gamma(t))$ és una parametrització de $\partial_+ S$:

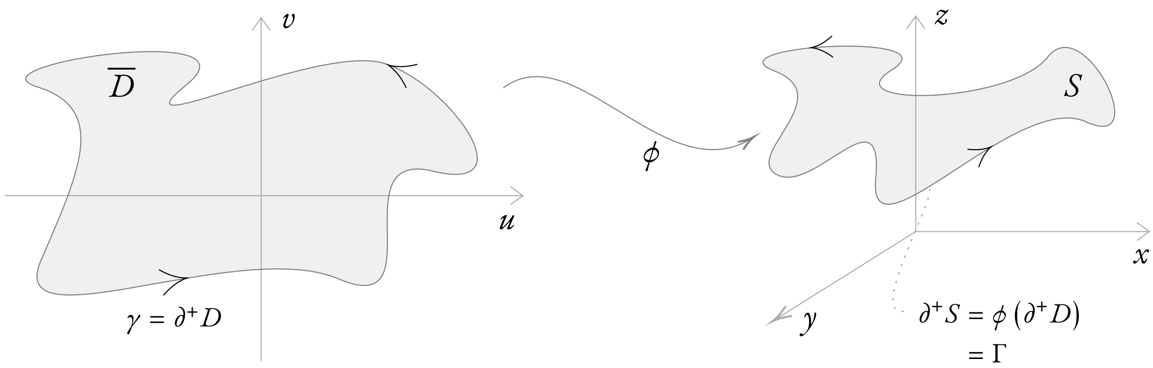



Figura 7: Representació de la demostració.

Dient $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, tenim:
$$\int_{\partial_+ S} F\,dr = \int_a^b F(\phi(\gamma(t)))\cdot(\phi\circ\gamma)(t)\,dt = \int_a^b \langle F(\phi(\gamma(t))), \phi_u(\gamma'(t))\gamma_1'(t) + \phi_v(\gamma'(t))\gamma_2'(t)\rangle\,dt\,.$$
Observem que aquesta és la integral de línia del camp a $\mathbb{R}^2$ (al pla $(u,v)$) donat per
$$(F(\phi(u,v))\phi_u, F(\phi(u,v))\phi_v).$$
Aleshores, pel teorema de Green tenim:
$$\int_{\partial_+ S} F\,dr = \iint_D \frac{\partial}{\partial u}\langle F(\phi(u,v)), \phi_v(u,v)\rangle - \frac{\partial}{\partial v}\langle F(\phi(u,v))\phi_u(u,v)\rangle\,du\,dv\,.$$

Aplicant la regla de la cadena a les derivades que apareixen a aquesta expressió es comprova que aquesta integral val:

$$\iint_D \langle \operatorname{rot} F(\phi(u,v)), \phi_u(u,v)\phi_v(u,v)\rangle \, du\, dv = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot d\sigma,$$

tal com volíem obtenir. ■

14

## Superfícies regulars

**Definició 14.1 (Superfície regular orientada).** Es diu que $S \subset \mathbb{R}^3$ és una *superfície regular orientada* si es pot expressar de la forma $S = S_1 \cup \cdots \cup S_n$, on $S_j$ són superfícies elementals orientades.

A més, les vores $\partial_+ S_j$ *enganxen bé*, en el sentit següent.

**Definició 14.2 (Vora orientada d'una superfície).** Diem $\partial_+ S_j = \gamma_j^1 \cup \cdots \cup \gamma_j^{N(j)}$ a la vora orientada de $S_j$; aleshores, si $S_i \cap S_j \neq \emptyset$, només són possibles les situacions següents, $i \neq j$:

1. $S_i \cap S_j$ és un únic punt.
2. $S_i \cap S_j$ és una de les components $\gamma_i^m$ de $\partial_+ S_i$ (i una component $\gamma_j^p$ de $\partial_+ S_j$) i $\gamma_i^m, \gamma_j^p$ tenen *orientacions oposades*. És a dir, com a conjunts $S_i \cap S_j = \gamma_i^m = \gamma_j^p$ i $\gamma_i^m = -\gamma_j^p$.[5]

Si diem $\psi_j$ a la col·lecció de components de $\partial_+ S_j$ que no es cancel·len, aleshores diem que $\partial_+ S = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ és la vora orientada de $S$.

**Observació 14.3 (Vora orientada).** En paraules més planeres, la vora orientada de la superfície regular és la reunió de les vores de les superfícies elementals $S_i$ que no hem enganxat (és a dir, que eliminem els arcs comuns). En aquest sentit, no és vàlid que un arc $\gamma$ sigui frontera de tres o més superfícies.

**Definició 14.4 (Superfície tancada).** Una superfície regular orientada $S$ es diu *tancada* si no té vora. Això correspon al cas en què les vores de les diferents $S_i$ es cancel·len.

**Proposició 14.5.** *Donada $S = S_1 \cup \cdots \cup S_n$ una superfície regular (amb $S_i$ superfícies elementals) i donada $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua, definim:*

$$\int_S f \, d\sigma = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} f\, d\sigma \, . \text{ En particular, } \operatorname{area}(S) = \sum_{i=1}^n \operatorname{area}(S_i).$$

*Anàlogament, si $F : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ és un camp continu:*

$$\int_S F\, d\sigma = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} F \, d\sigma \, .$$

5 En aquest segon cas, direm que $\gamma_i^m$ i $\gamma_j^p$ *es cancel·len*. Demanarem també que cada $\gamma_{i,m}$ es pugui cancel·lar com a molt amb $\gamma_j^p$ $(i \neq j)$.

*El flux de $f$ a través de $S$ és, també:*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \langle F, n_\phi \rangle \, d\sigma \, .$$

Com que les vores de $S_i$ s'enganxen per a construir $S$ es cancel·len, també val el teorema d'Stokes.

**Teorema 14.6 (Stokes, superfícies orientades).** *Sigui $S$ superfície regular orientada. Sigui $\mathcal{U}$ entorn obert de $S$ i sigui $F \in C^1(\mathcal{U})$ un camp. Llavors:*

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot d\sigma = \int_{\partial^+ S} F \, dr \, .$$

*En particular, si $S$ és una superfície regular tancada (sense vora), llavors el valor d'aquesta integral és zero.*

15

# Teorema de la divergència

La divergència d'un camp vectorial $F$ a un punt $p$ és un escalar que mesura en quin grau el punt $p$ és una *font* (o un *xuclador*) de $F$. Pensem que $F$ indica la velocitat d'un fluid, aleshores $\operatorname{div} F(p)$ mesura en quin grau el fluid *marxa* de $p$. Si $\operatorname{div} F(p)$ és negatiu, vol dir que $p$ actua com un xuclador del fluid.

**Definició 15.1 (Divergència).** Més formalment, donat un camp $F$ de classe $C^1$ a una regió de $\mathbb{R}^3$ i donat un punt $p = (x_0, y_0, z_0)$ a aquesta regió, tenim:

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|Q(p,\varepsilon)|} \iint_{\partial Q(p,\varepsilon)} F\vec{n} \, d\sigma,$$

on $Q(p,\varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \times (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ és el cub de centre $p$ i costat $2\varepsilon$ (si canviem $Q(p,\varepsilon)$ per la bola $B(p,\varepsilon)$, tenim exactament la mateixa definició).

Per tant, la divergència mesura el volum del flux exterior de $F$ per volum infinitesimal.

Normalment no s'utilitza la definició anterior per a calcular la divergència, sinó que s'utilitza la següent expressió equivalent.

**Lema 15.2.** *Sigui $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(\mathcal{U})$, on $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ és obert. Si $p \in \mathcal{U}$:*

$$\operatorname{div} F(p) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(p) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(p) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(p).$$

*Demostració de 15.2.* Al càlcul de la integral $\iint_{\partial Q(p,\varepsilon)} F\vec{n} \, d\sigma$ que apareix a la definició de $\operatorname{div} F(p)$, aparellarem cares paral·leles i comprovarem, fent servir la fórmula de Taylor, els valors que apareguin amb el valor al centre. Sigui $C_1$ la cara del cub en $x = x_0 + \varepsilon$. Parametritzem aquesta cara amb $y$ i $z$: $(x_0 + \varepsilon, y, z)$, amb $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ i $z \in (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$. El normal exterior és $\vec{n} = (1, 0, 0)$. Anàlogament, sigui $C_2$ la cara

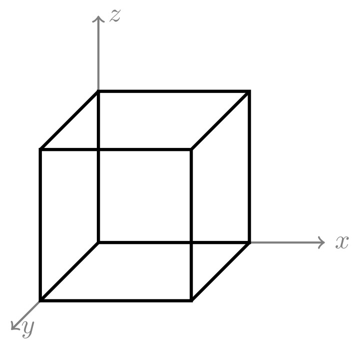



Figura 8: Un cub en els eixos tridimensionals.

oposada, amb $x = x_0 - \varepsilon$. Parametritzem $(x_0 - \varepsilon, y, z)$ amb $(y, z) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \times (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$. Aquí, el normal exterior és $\vec{n} = (-1, 0, 0)$. Utilitzem la fórmula de Taylor per comparar $F(x_0 \pm \varepsilon, y, z)$ amb $F(x_0, y, z)$. A $C_1$ hi tenim:

$$F_1(x_0 + \varepsilon, y, z) = F_1(x_0, y, z) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

A $C_2$ hi tenim:

$$F_1(x_0 - \varepsilon, y, z) = F_1(x_0, y, z) - \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Amb això, el tros de la integral que correspon en les cares $C_1$ i $C_2$ és:

$$\begin{aligned} \iint_{C_1 \cup C_2} F\vec{n}\, d\sigma &= \iint_{C_1} F_1(x_0 + \varepsilon, y, z)\, dy\, dz - \iint_{C_2} F_1(x_0 - \varepsilon, y, z)\, dy\, dz \\ &= 2\varepsilon \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} \int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z) + o(\varepsilon) \right) dy\, dz\,. \end{aligned}$$

Com que $|Q(p, \varepsilon)| = (2\varepsilon)^3$, tenim:

$$\frac{1}{|Q(p,\varepsilon)|} \iint_{C_1 \cup C_2} F\vec{n}\, d\sigma = \frac{1}{(2\varepsilon)^3} \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} \int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z) + o(\varepsilon) \right) dy\, dz\,.$$

Comprovem ara que el límit quan $\varepsilon \to 0$ d'aquesta mitjana és $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$. Per una part:

$$\frac{1}{(2\varepsilon)^3} \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} \int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} o(\varepsilon)\, dy\, dz = \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} \int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \frac{o(1)}{\varepsilon}\, dy\, dz,$$

essent $o(1)$ acotat quan $\varepsilon \to 0$ queda clar que aquest terme tendeix a 0. Per a l'altre terme utilitzem un cop més la fórmula de Taylor: com que $\frac{\partial F}{\partial x}$ és contínua:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + o(1).$$

Llavors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\varepsilon)^3} \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} \int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y, z)\, dy\, dz &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{(2\varepsilon)^3} \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} \int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} o(1)\, dy\, dz \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + o(1). \end{aligned}$$

Ajuntant-ho tot, queda:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|Q(p,\varepsilon)|}\iint_{C_1\cup C_2} F\vec{n}\,d\sigma=\frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0,y_0,z_0).$$

De manera anàloga es pot veure que les integrals corresponents a les cares amb $y$ fixada donen $\frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$ i les corresponents a $z$ fixada donen $\frac{\partial F_3}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$. Això acaba aquesta demostració. ■

**Teorema 15.3 (Teorema de la divergència, o de Gauss).** *Sigui $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ un domini regular. Sigui $F$ un camp de classe $\mathcal{C}^1$ a $\mathcal{U}$ i sigui $\mathcal{U}\subset\Omega$ obert amb $\overline{\mathcal{U}}\subset\Omega$. Aleshores:*

$$\int_{\mathcal{U}}\operatorname{div}F=\int_{\partial_+\mathcal{U}}F\,dv,$$

*on l'orientació de $\partial_+\mathcal{U}$ ve donada pel normal exterior a $\mathcal{U}$.*

**Observació 15.4 (Observacions al teorema).**

1. La definició detallada de domini regular la trobarem més enrere, per coherència amb el text. És la versió a $\mathbb{R}^3$ de la definició de domini regular a $\mathbb{R}^2$ que vam veure quan parlàvem del teorema de Green. Es pot veure a 10.6.
2. Aquest és un teorema de la família de Green o Stokes, en el que relacionem una integral a una regió amb una altra integral a la seva vora.

A continuació, la demostració pel cas d'un domini $\Omega$ elemental $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D, c<z<f(x,y)\}$ i un camp $F$ vertical $F(x,y,z)=(0,0,R(x,y,z))$.

*Demostració del teorema de la divergència.* Si comencem per la integral de la divergència tenim:

$$\int_\Omega\operatorname{div}F=\iint_D\left(\int_c^{f(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy=\iint_D(R(x,y,f(x,y))-R(x,y,c))\,dx\,dy\,.$$

Ara mirem la integral a $\partial^+\Omega=S_1\cap S_2\cap S_3$ tros per tros:

- $S_2$. Aquí, $F\vec{n}=(0,0,R)(\alpha_1,\alpha_2,0)=0$[6]. Per tant, la contribució és nul·la.
- $S_3$. Aquí, $z=f(x,y)$ i, per tant:

$$\int_{S_3}F\,d\sigma=\iint_D(0,0,R)(-f_x,-f_y,1)\,dx\,dy=\iint_D R(x,y,f(x,y))\,dx\,dy\,.$$

Tot plegat, tenim el mateix valor d'abans:

$$\int_{\partial_+D}F\,dr=-\iint_D R(x,y,c)\,dx\,dy+\iint_D R(x,y,f(x,y))\,dx\,dy\,.$$

De manera semblant, es pot veure que per a camps de la forma $F=(P,Q,0)$, usant el teorema d'Stokes, el resultat també val. Amb això, es veu que el teorema de la divergència val per a dominis elementals. Per a demostrar-ho a un domini regular, simplement cal recobrir-lo per dominis elementals mitjançant una partició i aplicar el que acabem de veure. ■

[6] Segons la definició 10.5, $\alpha_1$ i $\alpha_2$ són tals que $(\alpha_1(x,y),\alpha_2(x,y))$ és el vector normal unitari exterior a $\partial_+D$.

# A — Teoremes de convergència

**Teorema A.1 (Teorema de la convergència monòtona).** *Sigui $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable i siguin $f_n : E \longrightarrow [0, +\infty]$, $n \geq 1$, funcions mesurables tals que*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots \qquad \text{a.e. } x \in E$$

*Aleshores:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n$$

**Corol·lari A.2.** *Sigui $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable i siguin $f_n : E \longrightarrow [0, +\infty]$, $n \geq 1$. Aleshores:*

$$\sum_{n\geq 1} \int_E f_n = \int_E \sum_{n\geq 1} f_n.$$

**Lema A.3 (Lema de Fatou).** *Sigui $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable i siguin $f_n : E \longrightarrow [0, +\infty]$, $n \geq 1$, funcions mesurables. Aleshores:*

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

**Teorema A.4 (Teorema de la convergència dominada).** *Sigui $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable i siguin $f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 1$, funcions mesurables. Si existeix $g : E \longrightarrow [0, +\infty]$ integrable $\left(g \in \mathbb{L}^1(E)\right)$ tal que per a tot $n \geq 1$, $f_n(x) \to f(x)$ quan $n \to \infty$ i:*

$$\left|f_n(x)\right| \leq g(x) \qquad \text{a.e. } x \in E.$$

*Aleshores, $f_n \in \mathcal{L}^1(E)$ i:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n.$$

# B — Preguntes possibles de teoria

**Exercici B.1.**

- *Demostreu que si un conjunt mesurable $A \subset \mathbb{R}$ té algun punt interior, llavors $m(A) > 0$.*
- *Demostreu que si $Z \subset \mathbb{R}$ té mesura zero, llavors $\mathbb{R} \backslash Z$ és un conjunt dens a $\mathbb{R}$.*

*Demostració.* Si $A$ és un conjunt mesurable que té un punt interior $x_0$, existeix un interval obert $I$ tal que $x_0 \in I \subset A$. Com $I = (a, b)$ per a certs $a, b$ tals que $a < b$, tenim que $|I| = b - a > 0$ té mesura positiva. Per tant, com $I \subset A$, $|A| \geq |I| > 0$ i $|A| > 0$.

Prenem $Z \subset \mathbb{R}$ i $|Z| = 0$. Denotem $E = \mathbb{R} \setminus Z$. Recordem que $E$ és dens en $\mathbb{R}$ si, i només si, $\overline{E} = \mathbb{R}$. Raonem per reducció a l'absurd. Si $\overline{E} \neq \mathbb{R}$, $\overline{E}$ és subconjunt propi d'$\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$ és un obert no buit. Aleshores,

$\mathbb{R} \setminus \overline{E}$ té punts, tots interiors. Pel primer apartat, $|\mathbb{R} \setminus \overline{E}| > 0$. Podríem acabar ja, però si volem seguir amb l'absurd:

$$\mathbb{R} \setminus \overline{E} \subsetneq \mathbb{R} \setminus E = Z \implies \begin{cases} |\mathbb{R} \setminus \overline{E}| \leq |\mathbb{R} \setminus E| = |Z| = 0 \\ |\mathbb{R} \setminus \overline{E}| > 0 \end{cases}$$

On hem usat que $|Z| = 0$ per hipòtesi. De manera que obtenim $0 < |\mathbb{R} \setminus \overline{E}| \leq 0$, absurd que ve de suposar $\overline{E} \neq \mathbb{R}$. Per tant, $\overline{E} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus Z$ dens en $\mathbb{R}$. ∎

**Exercici B.2.** *Digueu si són certes o falses les afirmacions següents (si són certes proveu-les, i si no doneu un contraexemple).*

1. *Si $\mathcal{A}_k$, $k \geq 1$, són $\sigma$-àlgebres a $\mathbb{R}^n$ aleshores $\mathcal{A} := \cap_{k\geq 1}\mathcal{A}_k$ també és una $\sigma$-àlgebra a $\mathbb{R}^n$.*
2. *Per a tot $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$* amb $|A|, |B| < +\infty$,

$$||A| - |B|| \leq |A \setminus B| + |B \setminus A|$$

3. *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és integrable, aleshores* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4. *Sigui $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que la seva frontera $\partial E$ té mesura exterior zero. Aleshores $E$ és mesurable.*

*Demostració.* Primer apartat. $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$, ja que $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}_k$ per a tot $k \in \mathbb{N}$ i, per tant, $\mathbb{R}^n \in \bigcap_{k\geq 1} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}$. Si $E \in \mathcal{A}$, $E \in \mathcal{A}_k$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. Com que $\mathcal{A}_k$ és una $\sigma$-àlgebra, $\mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{A}_k$ per a tot $k \in \mathbb{N}$ i:

$$\mathbb{R}^n \setminus E \in \bigcap_{k\geq 1} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}.$$

Utilitzem el mateix argument que abans, partint del fet que $E_1, \ldots, E_n$ pertanyen a les $k$-$\sigma$-àlgebres, arribem finalment al fet que ens interessa.

Segon apartat. Usem el fet de teoria de conjunts que $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ i viceversa, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, per a tot conjunt $A, B$. A més, aquests dos conjunts són disjunts:

$$\left.\begin{matrix} |A| = |A \setminus B| + |A \cap B| \\ |B| = |B \setminus A| + |A \cap B| \end{matrix}\right\} \implies |A| - |B| = |A \setminus B| - |B \setminus A| \leq |A \setminus B| + |B \setminus A|.$$

Intercanviant els papers d'$A$ i $B$, obtenim una desigualtat complementària $|B| - |A| \leq |A \setminus B| + |B \setminus A|$. Així, obtenim el resultat.

Quart apartat: Sigui $E \subset \mathbb{R}^n$ subconjunt. La seva frontera és $\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}$. Podem posar $E = \mathring{E} \cup (E \setminus \mathring{E})$. Usant que $\mathring{E} \subset E \subset \overline{E}$,

$$(E \setminus \mathring{E}) \subset (\overline{E} \setminus \mathring{E}) = \partial E.$$

En particular, $|E \setminus \mathring{E}|^* \leq |\partial E|^* = 0$, la última igualtat per hipòtesi. Per tant, $\mathring{E}$ és obert i, per tant, mesurable, i $E \setminus \mathring{E}$ té mesura exterior 0 (i, per tant, és mesurable). La unió de mesurables és mesurable; així, $E$ és mesurable. ∎

C

# Ultraresum

$$\left.\begin{array}{c} g \in \mathcal{L}^1 \\ f \text{ mesurable} \\ |f| \leq g \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1$$

$$\int_E |f| \ll \infty \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1$$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ mesurable} \\ f \text{ acotada} \\ E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \\ |E| \ll \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1$$

$$\left.\begin{array}{c} E \text{ compacte} \\ f \in \mathcal{C}(E) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ acotada}$$

$$\begin{array}{c} E \text{ mesurable} \\ \{x \mid f(x) \gtreqless \alpha\} \\ \text{és mesurable} \end{array} \Longrightarrow f \text{ mesurable}$$

$$f \text{ constant} \Longrightarrow f \text{ mesurable}$$

$$f \in \mathcal{C} \Longrightarrow f \text{ mesurable}$$

$$\begin{array}{c} f \text{ a.e } g \\ g \text{ mesurable} \end{array} \Longrightarrow f \text{ mesurable}$$

$$f = \chi_E \Longrightarrow f \text{ mesurable}$$

$$E \text{ numerable} \Longrightarrow m^*(E) = 0$$

$$E \text{ finit} \Longrightarrow m^*(E) = 0 \Longrightarrow E \text{ mesurable}$$

$$E \text{ compacte} \Longrightarrow E \text{ mesurable}$$

$$E \text{ tancat de } \mathbb{R}^n \Longrightarrow E \text{ mesurable}$$

$$E \text{ obert de } \mathbb{R}^n \Longrightarrow E \text{ mesurable}$$

$$E \text{ mesurable} \Longleftrightarrow E^c \text{ mesurable}$$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ simple} \\ E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \\ c \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} cf, f+g, fg \\ \frac{f}{g}, \max\{f,g\}, |f| \\ f^+, f^- \\ \text{simples} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ mesurable} \\ E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \\ c \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} cf, f+g, fg \\ \frac{f}{g}, \max\{f,g\}, |f| \\ f^+, f^- \\ \text{mesurables} \end{array}$$

$$f_k \text{ mesurables} \Longrightarrow \begin{array}{c} \inf_k, \sup_k, \overline{\lim}_k \\ \underline{\lim}_k, \lim_k \end{array} \text{ mesurables}$$

$$\{E_i\}_{i \in I} \text{ mesurables} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} E_i \text{ mesurable}$$